ПРИМЕРНО РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

ОТ ПРЕДИШНА КУРСОВА РАБОТА ПО

МАТЕМАТИКА

Задача 3 . Да се изследва функцията

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

за локални екстремуми, монотонност, изпъкналост, асимптоти и да се начертае нейната графика.

1) Определяме дефиниционното множество на функцията. То се състои от всички реални числа x, за които

знаменателят на функцията е различен от нула, т.е. $x^2 - 9 \neq 0$ за $x \neq \pm 3$.

Следователно дефиниционното множество $D = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

След това проверяваме дали функцията е четна или нечетна:

$$f(x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 9} = \frac{-x^3}{x^2 - 9} = -f(x).$$

Следователно $f(x)$ е нечетна функция.

$f(x)$ е частно на диференцируемите функции x^3 и $x^2 - 9$, следователно $f(x)$ е непрекъсната и диференцируема за всяко $x \in D$.

2) Намираме производните на функцията :

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(x^2-9\right) - x^2.2x}{\left(x^2-9\right)^2} = \frac{3x^4 - 27x^2 - 2x^4}{\left(x^2-9\right)^2} = \frac{x^4 - 27x^2}{\left(x^2-9\right)^2}\,.$$

$$f''(x) = \frac{\left(4x^3 - 2.27x\right)\left(x^2-9\right)^2 - \left(x^4 - 27x^2\right).2\left(x^2-9\right)^2.2x}{\left(x^2-9\right)^4} =$$

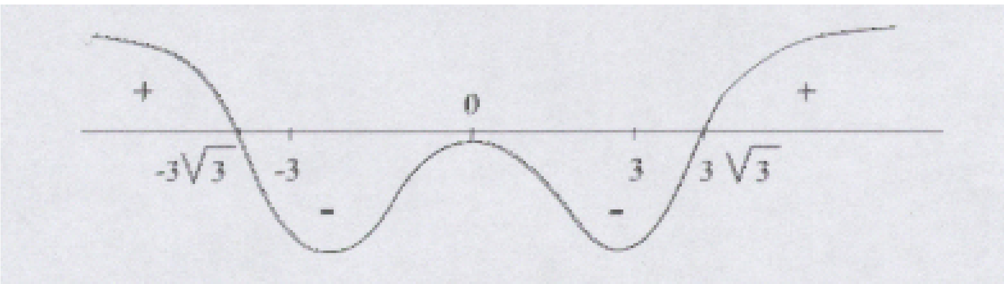
$$= \frac{\left(x^2-9\right)\left(\left(4x^3 - 54x\right)\left(x^2-9\right) - \left(x^4 - 27x^2\right)4x\right)}{\left(x^2-9\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(x^2-9\right)\left(4x^5 - 36x^3 - 54x^3 + 54.9.x - 4x^5 + 4.27x^3\right)}{\left(x^2-9\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(x^2-9\right)\left(18x^3 - 54.9x\right)}{\left(x^2-9\right)^4} = \frac{18x\left(x^2-9\right)\left(x^2-27\right)}{\left(x^2-9\right)^4}\,.$$

Знаменателите на $f'(x)$ и $f''(x)$ са положителни и следователно знаците на първата и втората производна се определят съответно от знаците на числителите им. Затова ще изследваме само числителите на производните. Разглеждаме числителя на първата производна $x^4 - 27x^2 = x^2\left(x^2-27\right) = x^2\left(x-3\sqrt{3}\right)\left(x+3\sqrt{3}\right)$.

Той се анулира за $x = 0$, $x = -3\sqrt{3}$, $x = 3\sqrt{3}$. По метода на интервалите определяме знаците му.



Следователно за $x \neq \pm 3$ имаме $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty, -3\sqrt{3}\right) \cup \left(3\sqrt{3}, +\infty\right)$

и $f'(x) < 0$ при $x \in \left(-3\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, 3\sqrt{3}\right)$, както и

$f'(x) = 0$ за $x = 0$, $x = -3\sqrt{3}$ $x = 3\sqrt{3}$.

Следователно функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща в интервалите

$\left(-\infty, 3\sqrt{3}\right)$ и $\left(3\sqrt{3}, +\infty\right)$, и е строго монотонно намаляваща за

$x \in \left(-3\sqrt{3}, -3\right) \cup \left(-3; 3\right) \cup \left(3, 3\sqrt{3}\right)$.

При $x = -3\sqrt{3}$ производната $f'(x)$ сменя знака си от "+" към "–", следователно при $x = -3\sqrt{3}$ функцията $f(x)$ има локален максимум равен на

$$f\left(-3\sqrt{3}\right) = \frac{\left(-3\sqrt{3}\right)^3}{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 - 9} = \frac{-9\sqrt{3}}{2},$$

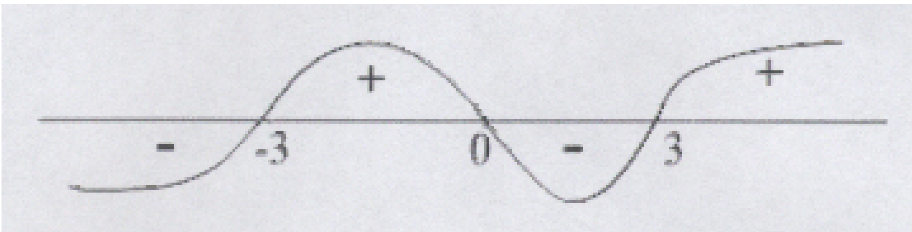
а при $x = 3\sqrt{3}$ производната $f'(x)$ сменя знака си от "–" към "+" следователно при $x = 3\sqrt{3}$ функцията $f(x)$ има локален минимум

$$f\left(3\sqrt{3}\right) = \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^3}{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - 9} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Разглеждаме числителя на втората производна

$$18x\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + 27\right) = 18x\left(x - 3\right)\left(x + 3\right)\left(x^2 + 27\right).$$

По метода на интервалите определяме знаците му :



$f''\left(x\right) > 0$ за $x \in \left(-3,\, 0\right) \cup \left(3, +\infty\right)$,

$f''\left(x\right) < 0$ за $x \in \left(-\infty, -3\right) \cup \left(0, 3\right)$,

$f''\left(x\right) = 0$ за $x = 0$.

Изключваме точките $x = -3$ и $x = 3$, тъй като те не принадлежат на дефиниционното множество. Следователно $f(x)$ е строго изпъкнала за $x \in \left(-3,\, 0\right) \cup \left(3, +\infty\right)$ и $f(x)$ е строго вдлъбната за $x \in \left(-\infty, -3\right) \cup \left(0, 3\right)$.

Точката $x = 0$ е инфлексна точка, тъй като в нея втората производна си сменя знака.

4) Изследваме границите на функцията в краищата на интервалите от дефиниционното множество:

Намираме границата на функцията когато x клони към -3 със стойности по малки от -3 , т.е.

$$\lim_{x\to -3-0} f(x) = \lim_{x\to -3-0} \frac{x^3}{(x-3)(x+3)} = \frac{(-3)^3}{(-6)(-0)} = -\infty .$$

Намираме границата на функцията когато x клони към -3 със стойности по-големи от -3 , т.е.

$$\lim_{x\to -3+0} f(x) = \lim_{x\to -3+0} \frac{x^3}{(x-3)(x+3)} = \frac{(-3)^3}{(-6)(+0)} = +\infty .$$

Аналогично намираме границата и когато x клони към 3 отляво или отдясно :

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \frac{(3)^3}{(+6)(-0)} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 3+0} f(x) = \frac{(3)^3}{(+6)(+0)} = +\infty .$$

Изследваме границите и при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{\pm\infty}{1-0} = \pm\infty .$$

5) Изследваме функцията за асимптоти :

Левите и десните граници на функцията в точките $x = -3$ и $x = 3$ са безкрайни. Следователно в тях функцията $f(x)$ има вертикални асимптоти. При $x \to \pm\infty$ границите са безкрайни и следователно функцията няма хоризонтални асимптоти. Ще изследваме функцията за наклонени асимптоти. Търсим границите

$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad l = \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - kx \right) :$$

$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{\frac{x^2-9}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2-9} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{1}{1-0} = 1 ,$$

$$l = \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - 1.x \right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9} - x \right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x^3 + 9x}{x^2-9} = \lim_{x\to +\infty} \frac{9x}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{0}{(+\infty)(1-0)} = 0.$$

Следователно функцията $f(x)$ има наклонена асимптота с уравнение $y = x$.

6) Тъй като $f(x) = 0$ за $x = 0$ е единственото решение на уравнението, следва, че

точката $(0,0)$ е точката, в

която графиката на функцията пресича координатните оси.

7) Нанасяме всички получени данни за функцията в таблицата

x	$-\infty$ $\quad -3\sqrt{3} \quad$ -3	0	3 $\quad 3\sqrt{3} \quad +\infty$
y	$-\infty \quad \uparrow \quad -9\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \downarrow \quad -\infty$	$+\infty \quad \downarrow \quad 0 \quad \downarrow \quad -\infty$	$+\infty \quad \downarrow \quad 9\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \uparrow \quad +\infty$
y'	+ + 0 - - -	- - 0 - -	-- - 0 + +
y''	- - - - -	+ + 0 - -	+ + + + +

8) Построяваме графиката на функцията**.**