3. Безкрайни числови редици. Сходимост

3.1. Безкрайна числова редица - определение.

Определение 1. *Казваме, че е дадена* ***безкрайна редица*** *от реални числа* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *(записване съкратено* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *или* $\{a_n\}$*), ако на всяко естествено число* n *по някакво правило е съпоставено реално число* a_n*. Числото* a_n *се нарича* n*-ти или общ член на редицата.*

Редиците могат да бъдат зададени по различни начини:

1) чрез формула за общия член:

$$\text{чрез } a_n = \frac{1}{n} \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{се задава редицата } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

2) чрез рекурентна формула:

$$\text{чрез } a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}, n > 2$$

$$\text{се задава редицата на Фибоначи } 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

3) чрез някакво по-сложно правило:

$$\text{чрез } a_n = \begin{cases} 0 & \text{за всяко } n = 3k-2, k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{k} & \text{за всяко } n = 3k-1, k \in \mathbb{N} \\ k & \text{за всяко } n = 3k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{се задава редицата } 0, 1, 1, 0, \frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{3}, 3, \ldots$$

4) чрез описване на общия член или на цялата редица с думи:

чрез думите *редицата от всички прости естествени числа*

се задава редицата $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$

3.2. Подредици.

Ако премахнем част от членовете на дадена редица $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, но така, че да останат безброй много членове, ще получим нова редица, която се нарича подредица на редицата $\{a_n\}$.

Например, ако премахнем всички членове с четни номера, подредицата, която остава, изглежда така:

$$a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots, a_{2k-1}, \ldots.$$

Ако вземем произволна редица от естествени числа $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, която е строго монотонно растяща в смисъл, че $n_k < n_{k+1}$ за всяко $k \in \mathbb{N}$, то тази редица определя съответна подредица

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

на редицата $\{a_n\}$. В разгледания по-горе пример имаме $n_k = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

3.3. Ограниченост на числова редица.

Определение 2. *Казваме, че редицата $\{a_n\}$* ***е ограничена отгоре****, ако съществува такова число A, че $a_n \leq A$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Числото A се нарича* ***горна граница*** *за редицата $\{a_n\}$.*

Определение 3. *Казваме, че редицата $\{a_n\}$* ***е ограничена отдолу****, ако съществува такова число B, че $a_n \geq B$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Числото B се нарича* ***долна граница*** *за редицата $\{a_n\}$.*

Определение 4. *Казваме, че редицата $\{a_n\}$* ***е ограничена****, ако е ограничена отгоре и отдолу, т.е. ако съществуват такива числа A и B, $B \leq A$, че $B \leq a_n \leq A$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, или, казано по друг начин, ако съществува такова число $C > 0$, че $|a_n| \leq C$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. ($C = \max(|A|, |B|)$).*

Пример 1. *Редицата с общ член $a_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, е ограничена.*

Тук трябва да посочим две числа A и B, $B \leq A$, за които да бъде изпълнено $B \leq \dfrac{1}{n} \leq A$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Можем да изберем $A = 1$ и $B = 0$, тъй като очевидно $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Пример 2. *Редицата с общ член $a_n = n, n \in \mathbb{N}$, е ограничена отдолу.*

Необходимо е да намерим число B, за които да бъде изпълнено $B \leq n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Можем да изберем $B = 0$. Тогава $0 \leq n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Да отбележим, че редицата $\{a_n\}$ не е ограничена отгоре. Това може да се докаже чрез допускане на противното:

Да допуснем, че редицата $\{a_n\}$ е ограничена отгоре, т.е. съществува такова число $A > 0$, че $a_n \leq A$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Нека $m = [A]$ - цялата част на числото А. Тогава $m \in \mathbb{N}$ и са изпълнени неравенствата $m \leq A < m + 1$. Тук получаваме противоречие, тъй като числото $m + 1$ е член на редицата $\{a_n\}$ $(m + 1 = a_{m+1})$.

3.4. Сходимост.

Определение 5. *Казваме, че редицата $\{a_n\}$* ***клони към числото*** *a (или* ***има граница*** *a), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова естествено число ν_ε, че за всяко $n > \nu_\varepsilon$ е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$. Всяка редица, която има граница, се нарича* ***сходяща****.*

С формули се записва по следния начин:

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ - чете се *a_n клони към a при $n \to \infty$*, или

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ - чете се *границата на a_n е равна на a при $n \to \infty$*.

Геометричен смисъл на Определение 5: Разглеждаме произволен интервал от вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Ако $a_n \to a$, то всички членове на редицата, чиито номера са по-големи от някакво число ν_ε (зависещо от избора на ε), се намират в този интервал, т.е. при $n > \nu_\varepsilon$ ще бъде изпълнено $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \iff |a_n - a| < \varepsilon$.

По друг начин същото може да се изрази така: $a_n \to a$ тогава и само тогава, когато извън произволна симетрична околност $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, на числото a има само краен брой членове на редицата.

Забележка. Съществуват и числови редици, които нямат граница. Тези редици се наричат **разходящи**. Пример за такава редица е $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$.

3.5. Свойства на сходящите редици.

Свойство 1. *Ако към една сходяща редица добавим краен брой нови членове (или махнем краен брой членове), то ще получим отново сходяща редица със същата граница.*

Доказателство. Това свойство е непосредствено следствие от геометричното тълкуване на Определение 5. Действително, ако $a_n \to a$, то за всяко $\varepsilon > 0$ извън интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ има само краен брой членове на редицата $\{a_n\}$. Добавянето или махането на краен брой членове очевидно няма да промени нищо - отново извън всеки интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ще има само краен брой членове на новата редица. □

Свойство 2. *Всяка сходяща редица има единствена граница.*

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. че сходящата редица $\{a_n\}$ има две граници a и b, $a \neq b$. Нека да изберем $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{3} > 0$. Тогава:

1) от избора на ε следва, че интервалите $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ не се пресичат;

2) тъй като $a_n \to a$, извън интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ има само краен брой членове на редицата $\{a_n\}$;

3) тъй като $a_n \to b$, то съществува такова ν, че за всяко $n > \nu$ е изпълнено $a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Това означава, че в интервала $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ има безброй много членове на редицата.

От 1) следва, че всички точки на интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ са извън интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а според 2) извън интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ има само краен брой членове на редицата $\{a_n\}$. Получава се, че в интервала $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ също има само краен брой членове на редицата $\{a_n\}$. Това противоречи на 3).

Следователно сходящата редица $\{a_n\}$ не може да има повече от една граница, т.е. тя има единствена граница. □

Свойство 3. *Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща към числото a, то всяка нейна подредица също клони към a.*

Доказателство. Нека $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}, \dots$ е произволна подредица на редицата $\{a_n\}$. Взимаме произволно число $\varepsilon > 0$. Тъй като $a_n \to a$, то съществува такова число ν, че при $n > \nu$ имаме $|a_n - a| < \varepsilon$. Избираме число k_0 така, че $n_{k_0} \geq \nu$ (можем да направим това, тъй като $n_k \to +\infty$). Тогава при $k > k_0$ имаме $n_k > n_{k_0} \geq \nu$ и следователно $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. С това доказахме, че $a_{n_k} \to a$. □

Свойство 4. *Всяка сходяща редица е ограничена.*

Доказателство. Нека $a_n \to a$. Тогава от Определение 5 следва, че за $\varepsilon = 1$ извън интервала $(a-1, a+1)$ има само краен брой членове на редицата $\{a_n\}$. Нека това са членовете $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}$. Да означим

$$m = \min(a-1, a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}),$$

$$M = \max(a+1, a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}).$$

За всеки член на редицата $\{a_n\}$ са възможни два случая:

1 случай. $a_n \in (a-1, a+1)$. В този случай е изпълнено $m \leq a-1 < a_n < a+1 \leq M$.

2 случай. $a_n \notin (a-1, a+1)$. Тогава a_n е някой от членовете $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_k}$ и от избора на числата m и M получаваме $m \leq a_n \leq M$.

Следователно $m \leq a_n \leq M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, т.е. редицата $\{a_n\}$ е ограничена. □

Свойство 5. *Ако $a_n \to a$, $b_n \to b$ и $a_n \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, то $a \leq b$.*

Доказателство. Да допуснем противното, т.е., че $a > b$. Избираме $\varepsilon = \dfrac{a-b}{3} > 0$. Тогава интервалите $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ не се пресичат и са изпълнени неравенствата

$$b-\varepsilon < b < b+\varepsilon < a-\varepsilon < a < a+\varepsilon.$$

Тъй като $a_n \to a$, то съществува число ν_1 такова, че при $n > \nu_1$ имаме $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Аналогично, тъй като $b_n \to b$, то съществува число ν_2 такова, че при $n > \nu_2$ имаме $b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

Да означим $\nu = \max(\nu_1, \nu_2)$. Тогава при $n > \nu$ ще имаме едновременно $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. От тук и от неравенствата по-горе следва, че $b_n < a_n$ при $n > \nu$, което противоречи на условието. Противоречието се дължи на допускането, че $a > b$. Следователно $a \leq b$. □

Свойство 6 (Лема за двамата полицаи). *Дадени са три редици $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{x_n\}$, които удовлетворяват неравенствата $a_n \leq x_n \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава ако $a_n \to x$ и $b_n \to x$, то $x_n \to x$.*

Доказателство. Избираме произволно число $\varepsilon > 0$. Тъй като $a_n \to x$, то съществува число ν_1 такова, че при $n > \nu_1$ имаме $x - \varepsilon < a_n < x + \varepsilon$. Аналогично, тъй като $b_n \to x$, то съществува число ν_2 такова, че при $n > \nu_2$ имаме $x - \varepsilon < b_n < x + \varepsilon$.

Да означим $\nu = \max(\nu_1, \nu_2)$. Тогава при $n > \nu$ ще имаме

$$x - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < x + \varepsilon,$$

т.е. получаваме, че $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ при $n > \nu$. Следователно $x_n \to x$. $\square$

Свойство 7. *Редицата $\{a_n\}$ клони към 0 тогава и само тогава, когато редицата $\{|a_n|\}$ клони към 0.*

Доказателство. 1) Нека $a_n \to 0$. Вземаме произволно число $\varepsilon > 0$. Тогава съществува такова число ν, че при $n > \nu$ е изпълнено $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$. Получаваме, че $||a_n| - 0| = ||a_n|| = |a_n| < \varepsilon$ при $n > \nu$, т.е. $|a_n| \to 0$.

2) Нека $|a_n| \to 0$. Вземаме произволно число $\varepsilon > 0$. Тогава съществува такова число ν, че при $n > \nu$ е изпълнено $||a_n| - 0| = ||a_n|| = |a_n| < \varepsilon$. Получаваме, че $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$ при $n > \nu$, т.е. $a_n \to 0$. $\square$

Свойство 8. *Ако $a_n \to 0$, а $\{b_n\}$ е ограничена редица, то $a_n b_n \to 0$.*

Доказателство. Тъй като $\{b_n\}$ е ограничена редица съществува число $B > 0$ такова, че $|b_n| \leq B$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| \leq B\,|a_n| \text{ за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

Лесно се вижда, че редицата $\{B\,|a_n|\}$ клони към 0. Да вземем произволно число $\varepsilon > 0$. Тъй като $a_n \to 0$, за числото $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{B} > 0$ съществува такова число ν, че при $n > \nu$ е изпълнено $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{B}$. Следователно $|B\,|a_n| - 0| = B\,|a_n| < \varepsilon$ при $n > \nu$.

Сега от лемата за двамата полицаи следва, че $a_n b_n \to 0$. $\square$

3.6. Аритметични действия със сходящи редици.

Теорема 1. *Нека $a_n \to a$ и $b_n \to b$. Тогава:*

1) редицата $\{a_n \pm b_n\}$ е сходяща и $a_n \pm b_n \to a \pm b$;

2) редицата $\{a_n b_n\}$ е сходяща и $a_n b_n \to ab$;

3) ако $b \neq 0$, то $b_n \neq 0$ при $n > n_0$, редицата $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=n_0+1}^{\infty}$ е сходяща и $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.

Доказателство. 1) Вземаме произволно число $\varepsilon > 0$. Тъй като $a_n \to a$, то съществува число ν_1 такова, че при $n > \nu_1$ имаме $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, тъй като $b_n \to b$, то съществува число ν_2 такова, че при $n > \nu_2$ имаме $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Да означим $\nu = \max(\nu_1, \nu_2)$. Тогава при $n > \nu$ е изпълнено

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следователно $a_n \pm b_n \to a \pm b$.

2) Случаят, когато $a_n \to 0$, вече е доказан (Свойство 8). Нека сега $a \neq 0$. Разглеждаме разликата $a_n b_n - ab$:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| =$$

$$= |(a_n - a) b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b|\,.$$

Вземаме произволно число $\varepsilon > 0$. Тъй като $\{b_n\}$ е сходяща редица от Свойство 4 имаме, че $\{b_n\}$ е ограничена и следователно съществува число $B > 0$ такова, че $|b_n| \leq B$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Тъй като $a_n \to a$, то съществува число ν_1 такова, че при $n > \nu_1$ имаме
$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2B}$.

Тъй като $b_n \to b$, то съществува число ν_2 такова, че при $n > \nu_2$ имаме
$|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2\,|a|}$.

Да означим $\nu = \max(\nu_1, \nu_2)$. Тогава при $n > \nu$ получаваме

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b| \leq$$

$$|a_n - a|\,B + |a|\,|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2B} B + |a| \frac{\varepsilon}{2\,|a|} = \varepsilon,$$

което доказва, че $a_n b_n \to ab$.

3) Първо да разгледаме случая, когато $b > 0$. Тъй като $b_n \to b$, то само краен брой членове на редицата $\{b_n\}$ са извън интервала $\left(b - \dfrac{b}{2}, b + \dfrac{b}{2}\right)$, което означава още, че само краен брой членове на редицата $\{b_n\}$ може да са равни на 0. Означаваме с n_0 най-големият измежду номерата на членовете, които са извън интервала $\left(\dfrac{b}{2}, \dfrac{3b}{2}\right)$ и получаваме $b_n > \dfrac{b}{2} > 0$ при $n > n_0$.

Тъй като при $n > n_0$ имаме $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{|b - b_n|}{|b|\,|b_n|} < \dfrac{2}{b^2}\,|b - b_n| \to 0$, то $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$. Оттук като приложим 2) получаваме

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n} \to a \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Случаят, когато $b < 0$, може да се сведе до вече разгледания:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{-a_n}{-b_n} \to \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

□

3.7. Монотонност на числова редица.

Определение 6. *Казваме, че редицата* $\{a_n\}$ ***е монотонно растяща****, ако* $a_n \leq a_{n+1}$ *за всяко* $n \in \mathbb{N}$.

Определение 7. *Казваме, че редицата* $\{a_n\}$ ***е монотонно намаляваща****, ако* $a_n \geq a_{n+1}$ *за всяко* $n \in \mathbb{N}$.

Пример 3. *Редицата с общ член* $a_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$*, е монотонно намаляваща.*

Пример 4. *Редицата с общ член* $a_n = n, n \in \mathbb{N}$, *е монотонно растяща.*

Теорема 2. *Всяка ограничена отгоре монотонно растяща редица е сходяща. Всяка ограничена отдолу монотонно намаляваща редица е сходяща.*

Доказателство. Ще разгледаме случая, когато редицата $\{a_n\}$ е ограничена отгоре и монотонно растяща.

Да означим с A множеството от елементите на редицата, т.е. $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Тогава множеството A е също ограничено отгоре и от принципа за непрекъснатост следва, че съществува $\sup A = a$.

Ще покажем, че $a_n \to a$. Взимаме произволно число $\varepsilon > 0$. Тъй като a е най-малката горна граница на множеството A, то числото $a - \varepsilon$ не е горна граница на A. Следователно съществува елемент a_ν на множеството A такъв, че $a - \varepsilon < a_\nu$. Тъй като редицата $\{a_n\}$ е монотонно растяща имаме, че $a_\nu \leq a_n$ за всяко $n > \nu$. Получаваме, че

$$a - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \text{ за всяко } n > \nu.$$

т.е. $|a_n - a| < \varepsilon$ за всяко $n > \nu$, което доказва твърдението.

Случаят, когато редицата $\{a_n\}$ е ограничена отдолу и монотонно намаляваща, се доказва аналогично.

□

Теорема 3 (Кантор). *Нека е дадена последователност от затворени интервали* $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$, *за която са изпълнени следните условия:*

1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ *за всяко* $n \in \mathbb{N}$*;*

2) $b_n - a_n \to 0$.

Тогава съществува точно едно число C *такова, че* $C \in [a_n, b_n]$ *за всяко* $n \in \mathbb{N}$.

Доказателство. Да разгледаме редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. От условие 1) следва, че :

а) $a_n \leq a_{n+1}$ и $b_n \geq b_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\{a_n\}$ е монотонно растяща, а $\{b_n\}$ е монотонно намаляваща.

б) $a_n \leq b_1$ и $b_n \geq a_1$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\{a_n\}$ е ограничена отгоре, а $\{b_n\}$ е ограничена отдолу.

Следователно двете редици са сходящи, т.е. $a_n \to a$, $b_n \to b$.

Тъй като $a_n \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, то имаме, че $a \leq b$, а от монотонността на редиците следва, че $a_n \leq a$ и $b_n \geq b$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Като използваме условие 2) получаваме

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n \to 0,$$

т.е. $a = b = C$ - търсеното число. $C \in [a_n, b_n]$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, тъй като $a_n \leq a = C$ и $b_n \geq b = C$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Да допуснем, че освен C съществува и друго число D такова, че $D \in [a_n, b_n]$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Да предположим, че $C < D$ (случаят $D < C$ е аналогичен). Тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n \leq C < D \leq b_n$, т.е. $[C, D] \subset [a_n, b_n]$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Но тогава $b_n - a_n \geq D - C > 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, т.е. $b_n - a_n \not\to 0$. Получихме противоречие с условие 2), дължащо се на допускането, че числото C не е единствено. □

Теорема 4 (Болцано-Вайерщрас). *Всяка ограничена редица има сходяща подредица.*

Доказателство. Нека редицата $\{p_n\}$ е ограничена и нека $[a_1, b_1]$ е затворен интервал, който съдържа всички членове на тази редица. Разделяме интервала $[a_1, b_1]$ на две части - $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ и $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Поне един от тези два интервала съдържа безброй много членове на редицата $\{p_n\}$. Означаваме с $[a_2, b_2]$ един от тези два интервала, който има свойството да съдържа безброй много членове на редицата $\{p_n\}$. След това разделяме интервала $[a_2, b_2]$ на две части - $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$ и $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$ и означаваме с $[a_3, b_3]$ един от тези два интервала, който има свойството да съдържа безброй много членове на редицата $\{p_n\}$.

По-нататък продължаваме по индукция. Ако сме получили интервала $[a_k, b_k]$ със свойството да съдържа безброй много членове на редицата $\{p_n\}$, то поне една от двете му половини $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ и $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$ ще съдържа безброй много членове на редицата - означаваме съответния интервал с $[a_{k+1}, b_{k+1}]$.

По построение имаме:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots,$$

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \ldots = \frac{1}{2^k}(b_1 - a_1), \text{ т.е. } b_{k+1} - a_{k+1} \to 0.$$

От теоремата на Кантор следва, че съществува единствено число C такова, че $C \in [a_k, b_k]$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. От доказателството на теоремата на Кантор знаем, че $a_k \to C$ и $b_k \to C$.

В интервала $[a_1, b_1]$ избираме p_{n_1} - произволен член на редицата $\{p_n\}$. След това в интервала $[a_2, b_2]$ избираме член p_{n_2} на редицата $\{p_n\}$ така, че $n_2 > n_1$. Това е възможно, тъй като $[a_2, b_2]$ съдържа безброй много членове на редицата.

Продължаваме по индукция. Ако сме избрали член на редицата p_{n_k} в интервала $[a_k, b_k]$, то в интервала $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ избираме член $p_{n_{k+1}}$ на редицата $\{p_n\}$ така, че $n_{k+1} > n_k$. Това е възможно, тъй като $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ съдържа безброй много членове на редицата.

По този начин избрахме подредица $\{p_{n_k}\}$ на редицата $\{p_n\}$ такава, че $p_{n_k} \in [a_k, b_k]$ за всяко $k \in \mathbb{N}$, т.е. $a_k \le p_{n_k} \le b_k$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. От лемата за двамата полицаи следва, че $p_{n_k} \to C$, т.е. $\{p_{n_k}\}$ е сходяща подредица на ограничената редица $\{p_n\}$. $\square$

3.8. Неперово число.

Да разгледаме редицата $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Може да се докаже, че тази редица е ограничена и монотонно растяща, откъдето според Теорема 2 следва, че тя е сходяща. Границата на тази редица се означава с e и се нарича **неперово число**, т.е.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Неперовото число е ирационално, $e \approx 2,718\ldots$, и играе изключително важна роля в математиката.

3.9. Редици, клонящи към безкрайност.

Определение 8. *Казваме, че редицата* $\{a_n\}$ ***клони*** $+\infty$ *(или* ***има граница*** $+\infty$*), ако за всяко* $A > 0$ *съществува такова естествено число* ν_A*, че за всяко* $n > \nu_A$ *е изпълнено* $a_n > A$*.*

Геометричен смисъл на Определение 8: Разглеждаме произволен интервал от вида $(A, +\infty)$, $A \in \mathbb{R}$. Ако $a_n \to +\infty$, то всички членове на редицата, чиито номера са по-големи от някакво число ν_A (зависещо от избора на A), се намират в този интервал, т.е. при $n > \nu_A$ ще бъде изпълнено $a_n > A$.

По друг начин същото може да се изрази така: $a_n \to +\infty$ тогава и само тогава, когато за произволно число $A \in \mathbb{R}$ е изпълнено, че само краен брой членове на редицата не са по-големи от A.

Определение 9. *Казваме, че редицата* $\{a_n\}$ ***клони*** $-\infty$ *(или* ***има граница*** $-\infty$*), ако за всяко* $B < 0$ *съществува такова естествено число* ν_B*, че за всяко* $n > \nu_B$ *е изпълнено* $a_n < B$*.*

Геометричен смисъл на Определение 9: Разглеждаме произволен интервал от вида $(-\infty, B)$, $B \in \mathbb{R}$. Ако $a_n \to -\infty$, то всички членове на редицата, чиито номера са по-големи от някакво число ν_B (зависещо от избора на B), се намират в този интервал, т.е. при $n > \nu_B$ ще бъде изпълнено $a_n < B$.

По друг начин същото може да се изрази така: $a_n \to -\infty$ тогава и само тогава, когато за произволно число $B \in \mathbb{R}$ е изпълнено, че само краен брой членове на редицата не са по-малки от B.

Свойство 9. *Нека* $\{a_n\}$ *е редица от положителни числа, т.е.* $a_n > 0$ *за всяко* $n \in \mathbb{N}$*. Тогава:*

1) ако $a_n \to 0$*, то* $\dfrac{1}{a_n} \to +\infty$*;*

2) ако $a_n \to +\infty$*, то* $\dfrac{1}{a_n} \to 0$*.*

Доказателство. 1) Нека $a_n \to 0$. Вземаме произволно число $A > 0$. Тогава за числото $\varepsilon = \dfrac{1}{A} > 0$ съществува такова число ν, че при $n > \nu$ е изпълнено $|a_n - 0| = |a_n| = a_n < \varepsilon = \dfrac{1}{A}$. Като използваме, че $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, получаваме $\dfrac{1}{a_n} > A$ при $n > \nu$. Следователно $\dfrac{1}{a_n} \to +\infty$.

2) Нека $a_n \to +\infty$. Вземаме произволно число $\varepsilon > 0$. Тогава за числото $A = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ съществува такова число ν, че при $n > \nu$ е изпълнено $a_n > A = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Като използваме, че $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, получаваме $\dfrac{1}{a_n} < \varepsilon$ при $n > \nu$ или, записано по друг начин, $\left|\dfrac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$ при $n > \nu$. Следователно $\dfrac{1}{a_n} \to 0$. $\square$

Свойство 10. *Нека* $\{a_n\}$ *е редица от отрицателни числа, т.е.* $a_n < 0$ *за всяко* $n \in \mathbb{N}$. *Тогава:*

1) ако $a_n \to 0$, *то* $\dfrac{1}{a_n} \to -\infty$;

2) ако $a_n \to -\infty$, *то* $\dfrac{1}{a_n} \to 0$.

Доказателството е аналогично на доказателството на предходното свойство.