

ИЗПИТ-ЗАДАЧИ ПО ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ, ИНФОРМАТИКА, 17.06.2014 г.
ПЪРВА ЧАСТ



Име: Ф№: Група:

Зад.	1	2	3	ОБЩО
<i>точки</i>				
<i>от макс.</i>	10	20	20	50

Зад. 1 Нека $P(x, y)$ е произволен двуместен предикат. Коментирайте следното твърдение: дали то е вярно, или не е вярно? Обосновете отговорите си.

$$\forall x \forall y (P(x, y)) \equiv \forall x P(x, y) \wedge \forall y P(x, y)$$

Зад. 2 Дадена е квадратна дъска с размери $2^n \times 2^n$ сантиметра, за някое естествено число n . Дъската е разчертана на еднакви квадратчета с размери 1×1 сантиметър. Всички квадратчета са бели с изключение на едно, което е черно, което се намира на *произволно място*. Казваме, че черното

квадратче е “дупката”. Примерно, ето една такава дъска за $n = 2$: . Дадени са и неограничено количество Г-образни форми, всяка от които се състои от три квадратчета, всяко 1×1 сантиметър, долепени ето така: . Г-образните форми може да бъдат въртени на 90, 180 или 270 градуса и да бъдат слагани върху дъската, така че всяка Г-форма да покрие точно три нейни *бели* квадратчета. Дупката не може да бъде покривана. Докажете по индукция по n , че всяка дъска $2^n \times 2^n$ с дупка на произволно място може да бъде покрита с Г-форми, които не се застъпват. Примерно, показаната

дъска 4×4 може да бъде покрита ето така: .

Упътване. На пръв поглед, твърдението не може да се докаже по индукция. Да разгледаме дъска $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ с дупка на произволно място. Тя се състои от четири дъски $2^n \times 2^n$, долепени една до друга. Нека индуктивното предположение е, че ако всяка от тези четири има по една дупка на произволно място, тя може да бъде покрита с Г-форми. Това не ни дава покриване на голямата дъска, защото четирите дупки са на произволни места и не можем просто да сложим още една Г-форма, за да покрием три от тях и да оставим само една непокрита. А ние не искаме да пренареждаме Г-формите – това не би било доказателство по индукция.

Всъщност твърдението може лесно да бъде доказано по индукция, ако първо бъде доказано, пак по индукция, едно помощно твърдение: че всяка дъска $2^n \times 2^n$ с дупка, която обаче не е на произволно място, а на точно определено място, може да бъде покрита с Г-форми. Вие трябва да съобразите кое място е подходящо.

Зад. 3 Българската азбука има 30 букви. *Стринг* над азбуката е всяка последователност от букви, примерно ААБАЯВ е стринг с дължина шест. Колко стринга с дължина двадесет има, такива че:

1. Няма ограничения.
2. Няма повтаряне на букви.
3. Има точно поне едно повтаряне на буква.
4. Се състоят само от буквите Ф, И и М, като всяка буква се среща поне веднъж.
5. Няма повтаряне на букви и освен това буквите, отляво надясно, са в нарастващ азбучен ред.