1. Множества.

Въвеждаме понятието **множество** като съвкупност от **елементи**;
елементите могат да бъдат **протоелементи** – всеки реален или измислен математически обект, който не е множество – или самите те могат да бъдат **добре дефинирани** множества;
едно множество е **добре дефинирано**, ако се знае кои са елементите му, т.е. те са дефинирани преди това;
нека M е множество; ще отбелязваме $x \in M$, ако обектът x е елемент на M или $x \notin M$, ако x не е елемент на M; ако M е добре дефинирано множество, то за всеки обект x е изпълнено точно едно от $x \in M$, $x \notin M$;
ще казваме, че множествата A и B са равни, когато са съставени от едни и същи елементи, бележим $A = B$;
един начин за задаване на множество е чрез изреждане на елементите в него, разделени със запетая между фигурни скоби;
оттук нататък всички множества ще считаме, че са добре дефинирани; целта е да се изгради непарадоксална логика (например парадокс на Ръсел);

Аксиоми за множествата:
A.1. (**аксиома за обема**) нека A и B са множества;
ако за всеки обект x имаме: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, то $A = B$;
неформално аксиомата за обема гласи, че едно множество еднозначно се определя от принадлежността на неговите елементи;

Следствие: две множества са равни, когато са съставени от едни и същи елементи, без значение редът на елементите или дали те се повтарят; например $\{ a, a, b \} = \{ a, b \}$, $\{ a, b\} = \{ b, a\}$;

Мета-теорема: Дадени са множества A и B; твърди се, че $A = B$;
Доказателство: за всеки елемент $a \in A$ показваме, че $a \in B$;
за всеки елемент $b \in B$ показваме, че $b \in A$;
от аксиомата за обема ➔ $A = B$;

A.2. (**аксиома за отделянето**)
нека M е множество;
въвеждаме понятието **предикат** $P(x)$ ($x \in M$) – параметризиран въпрос с два възможни отговора (true – истина и false – лъжа), при това отговорът зависи от параметъра x;
аксиомата твърди, че ако $M' = \{ x \mid P(x) = true, x \in M \}$, то M′ е множество; M′ се нарича **подмножество** на M (или още M съдържа M′); бележим $M' \subseteq M$ ($M \supseteq M'$); ако $M \neq M'$ пишем $M' \subset M$ ($M \supset M'$);

означаваме с $\varnothing$ множеството, което не съдържа елементи, т.е. за всеки обект x, $x \notin \varnothing$;

Теорема: За всяко множество M имаме: $M \subseteq M$ и $\varnothing \subseteq M$ (наричат се **тривиални подмножества** на множеството M);
Доказателство: нека t (x) е предикатът, който е тъждествено истина (true); тогава $M = \{ x \mid t(x) = true,\ x \in M\}$ ➔ M е подмножество на M;
нека f (x) е предикатът, който е тъждествено лъжа (false); тогава
$\varnothing = \{ x \mid f(x) = true,\ x \in M \}$ ➔ $\varnothing$ е подмножество на M;

нека M е множество; нека P (X) е предикат, верността на който е проверима за всяко $X \subseteq M$;
казваме, че множеството M_1 е **минимално по включване** със свойството P, ако $P(M_1) = true$ и за всяко $M_2 \subset M_1$ имаме $P(M_2) = false$;
казваме, че множеството M_1 е **максимално по включване** със свойството P, ако $P(M_1) = true$ и за всяко M_2, $M_1 \subset M_2 \subseteq M$ имаме
$P(M_2) = false$;

Операции с множества
A, B – множества;
- **обединение** на A и B означаваме $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ или $x \in B \}$
- **сечение** на A и B означаваме $A \cap B = \{ x \mid x \in A$ и $x \in B \}$
- **разлика** на A и B означаваме $A \setminus B = \{ x \mid x \in A$ и $x \notin B \}$
- **симетрична разлика** на A и B означаваме
  $A\ !\ B = \{ x \mid (x \in A$ и $x \notin B)$ или $(x \notin A$ и $x \in B) \}$

в повечето разсъждения ще считаме, че всички множества, които се разглеждат са подмножества на множеството U, което ще наричаме **универсално множество (универсум)**;

- **допълнение** на множеството A (до универсалното множество U) означаваме $\bar{A} = \{ x \mid x \notin A$ и $x \in U \} = U \setminus A$;

под **фамилия** от множества ще разбираме множество от множества;

най-общо под алгебра ще разбираме непразно множество, в което са въведени операции; алгебрата на подмножествата на дадено множество (U) с по-горе въведените операции се нарича **булева алгебра** на името на Джордж Бул;

Свойства на операциите: (A, B, C са множества)
1. Комутативност: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
2. Асоциативност: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. Идемпотентност: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
4. Дистрибутивност: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. Константи: $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$
6. Допълнение: $A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \varnothing$, $\bar{\bar{A}} = A$

7. Закони на Де Морган: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Примерно доказателство на законите на Де Морган:
нека $x \in \overline{A \cup B}$; тогава $x \notin A \cup B$ ➔ $x \notin A$, $x \notin B$ ➔ $x \in \overline{A}$, $x \in \overline{B}$ ➔
$x \in \overline{A} \cap \overline{B}$; нека $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$; тогава $x \notin A$ и $x \notin B$ ➔ $x \notin A \cup B$ ➔
$x \in \overline{A \cup B}$; сега от аксиомата за обема ➔ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
ще бележим $\mathbf{J_2} = \{0, 1\}$;
нека A е множество; фамилията от всички подмножества на A наричаме **булеан** на A и бележим с $2^A = \{ S \mid S \subseteq A \}$;
например $2^{\mathbf{J_2}} = \{ \varnothing, \{0, 1\}, \{0\}, \{1\} \}$;

нека a и b са произволни елементи; множеството { a, { a, b}} ще бележим с (a, b) и ще наричаме **наредена двойка** от елементите
a и b; ясно е, че $(a, b) \neq (b, a)$;

дефинираме **декартово произведение** на множествата A и B:
$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$, т.е. декартовото произведение на две множества A и B е множеството от всички наредени двойки с първи елемент от A и втори елемент от B;
ако M е множество, декартовото произведение M x M бележим с M^2 и наричаме **декартов квадрат** на M;

Примери:
ако в евклидовата равнина E е въведена координатна система, то на всяка точка е съпоставена биективно наредена двойка реални числа, така че $E = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$;
$\mathbf{J_2} \times \mathbf{J_2} = \{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) \}$;

ясно е, че ако A, B и C са множества, то
$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$, тъй като наредената двойка (a, (b, c)) се различава от ((a, b), c); можем да разгледаме асоциативен вариант на декартовото произведение:
дефинираме **тройно декартово произведение** на множествата
A, B и C: $A \times B \times C = \{ (a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C \}$; елементите
(a, b, c) на A x B x C наричаме наредени тройки;
ще считаме, че $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$, т.е. наредените двойки ((a, b), c) и (a, (b, c)) ще отъждествяваме с наредената тройка
(a, b, c);
аналогично можем да дефинираме **n-кратно декартово произведение** на множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$:
$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \}$; елементите
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ на $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ наричаме наредени n-орки; ще считаме, че $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i) \times (A_{i+1} \times A_{i+2} \times \dots \times A_n) = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$
за всяко $i = 1, 2, \dots, n-1$;

Индуктивно дефиниране на множество

дадени са множество $M_0 \neq \varnothing$ и множество от операции O;
казваме, че множеството M е **индуктивно дефинирано**, ако

1. База: за всяко $x \in M_0$ имаме $x \in M$;
2. Индукционно предположение: нека в M има елементи $x_1, x_2, \ldots$;
3. Индукционна стъпка: ако $y = o(x_1, x_2, \ldots)$, $o \in O$, то $y \in M$;
4. Заключение: в M няма други елементи, освен тези в M_0 и добавените в индукционната стъпка;

пример:
индуктивна дефиниция на **N** (като подмножество на **R**):
$M_0 = \{ 0 \}$, $O = \{ ++\}$;

1. База: $0 \in \mathbf{N}$;
2. Предположение: нека $i \in \mathbf{N}$;
3. Стъпка: тогава $i{+}{+} \in \mathbf{N}$;
4. Заключение: няма други елементи в **N**;

и така $\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, \ldots\}$
независима индуктивна дефиниция на **N**:
$M_0 = \{ \varnothing \}$, O = { образуване на множество}

1. База: $\varnothing \in \mathbf{N}$;
2. Предположение: нека $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{N}$;
3. Стъпка: тогава $\{ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\} \in \mathbf{N}$;
4. Заключение: няма други елементи в **N**;

и така $\mathbf{N} = \{ \varnothing, \{ \varnothing\}, \{ \varnothing, \{ \varnothing\}\}, \{ \varnothing, \{ \varnothing\}, \{ \varnothing, \{ \varnothing\} \}, \ldots \}$; това множество удоволетворява аксиомите на Пеано, като операцията предшественик е принадлежност, т.е. x предшества y, ако
$x \in y$ и тогава то е точно множеството на естествените числа;

Мета-теорема: Дадено е множество M, което е индуктивно дефинирано; твърди се, че за всяко $x \in M$ е в сила $P(x)$;
Доказателство: (използваме горните означения)

1. База: за всеки елемент $x_0 \in M_0$ проверяваме верността на $P(x_0)$;
2. Предположение: нека $P(x)$ е вярно за всички елементи $x_1, x_2, \ldots$ в M до момента;
3. Стъпка: за $y = o(x_1, x_2, \ldots)$ показваме, че $P(y)$ е вярно;
4. Заключение: тъй като в M няма други елементи, то $P(x)$ е вярно за всяко $x \in M$;

Индексиране на множества

дефинираме $\mathbf{I_n} = \{ i \mid i \in N, 1 \leq i \leq n \}$, $\mathbf{J_n} = \{ i \mid i \in N, 0 \leq j \leq n\text{-}1 \}$,
$\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$;

дадено е множество A и множество I; ще използваме елементите на I за да означаваме елементите на A – избираме главен символ, например a и за всяко $x \in A$ избираме $i \in I$ и означаваме $x = a_i$;

при това различните елементи в A трябва да имат различни индекси; така $A = \{ a_i \mid i \in I \}$; I се нарича **индексно множество**;
например, ако индексното множество е $\mathbf{I_n}$, то
$A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$, ако индексното множество е **N**, то
$A = \{ a_0, a_1, a_2, \ldots\}$;

нека I е индексно множество на фамилията $\{ A_i \mid i \in I \}$;
означаваме $\bigcup_{i \in I} A_i = \{ a \mid$ съществува $i \in I$, такова че $a \in A_i \}$ – наричаме **многократно обединение**;
означаваме $\bigcap_{i \in I} A_i = \{ a \mid$ за всяко $i \in I$ имаме $a \in A_i \}$ – наричаме **многократно сечение**;
тези две дефиниции са възможни, тъй като обединението и сечението на множества са асоциативни операции;

нека A е множество, I е индексно множество;
казваме, че фамилията $R = \{ A_i \mid i \in I, A_i \subseteq A \}$ е **разбиване** на A, ако:

1. $A_i \neq \varnothing$ за всяко $i \in I$;
2. $A_i \cap A_j = \varnothing$ за всеки $i \neq j$;
3. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$;