Пирамида. Пирамида и сфера.

***Дефиниция:***

 Тяло, на което една от стените е многоъгълник, а останалите стени са триъгълници с общ връх, наричаме **пирамида**.

***Дефиниция:***

 Отсечката съединяваща върха на пирамидата с проекцията му върху равнината на основата наричаме **височина на пирамидата**.



Положението на петата на височината върху равнината на основата се определя от следните **свойства на пирамидата**:

1. Всички околни ръбове са равни тогава и само тогава, когато около основата на пирамидата може да се опише окръжност и петата на височината съвпада с центъра на тази окръжност.
2. Два или повече околни ръба са равни тогава и само тогава, когато петата на височината лежи на пресечната точка на симетралите на съответните отсечки.
3. Две околни стени сключват равни ъгли с равнината на основата тогава и само тогава, когато петата на височината е равноотдалечена от съответните основни ръбове.
4. Всички околни стени сключват равни ъгли с основата тогава и само тогава, когато в основата може да се впише окръжност и петата на височината съвпада с центъра на тази окръжност.
5. Околен ръб *AS* и основен ръб *AB*, излизащи от един и същи връх *A* на пирамидата, са перпендикулярни тогава и само тогава, когато петата *O* лежи на правата през *A*, перпендикулярна на *AB*.
6. Кръстосаните околен ръб *AS* и основен ръб *BC* на пирамида са перпендикулярни тогава и само тогава, когато петата *O* лежи върху перпендикуляра, спуснат от *A* към *BC*.
7. Петата *O* на височината на пирамида съвпада с центъра на вписаната в основата окръжност, ако е изпълнено едно от твърденията:
* всички околни стени сключват равни двустенни ъгли с основата;
* височините на всички околни стени са равни (при правилна пирамида);
* проекциите на височините на всички околни стени върху основата са равни (равни на радиуса *r* на вписаната в основата окръжност);
* всички околни стени сключват равни ъгли с височината на пирамидата
1. Петата O на височината на пирамида съвпада с центъра на описаната около основата окръжност, ако е изпълнено едно от твърденията:
* всички околни ръбове са равни;
* всички околни ръбове сключват равни ъгли с основата;
* всички околни ръбове сключват равни ъгли с височината на пирамидата;
* проекциите на всички околни ръбове върху основата са равни

***Дефиниция:***

Пирамида, на която основата е правилен многоъгълник, а околните стени са еднакви равнобедрени триъгълници, наричаме **правилна пирамида**.

***Дефиниция:***

Върха на правилната пирамида се проектира ортогонално в центъра на равнината на основата. Тогава отсечката, която съединява върха с центъра на основата, е **височината *h* на пирамидата**.

***Дефиниция:***

**Апотема** наричаме височината на коя да е околна стена, прекарана към съответния основен ръб.

Всички апотеми на пирамидата са равни.

***Дефиниця:***

**Апотема на основата** наричаме проекцията на дадена апотема върху основата, т.е. височина на съответния триъгълник на основата.

Всички околни ръбове са равни и образуват с равнината на основата равни ъгли.

Лице на повърхнина и обем на пирамида

Лицето на околната повърхнина бележим с *S*.

1. В правилна n-ъгълна пирамида ***S =*** $\frac{na}{2}k$ ***=*** $\frac{Pk}{2} $, където ***k*** е апотемата, ***а*** – дължината на основния ръб, ***n*** – броят на страните в основата, а ***P*** е периметърът на основата.
2. При неправилна пирамида околната повърхнина S получаваме, като сумираме лицата на околните стени.

Лицето на пълната повърхнина бележим с *S1*;

1. При правилна n – ъгълна пирамида: ***S1 = S + B***, където ***B*** е лицето на основата.
2. При неправилна пирамида лицето на пълната повърхнина ***S1*** е равно на сбора от лицата на всички стени (околни и основа).

Обемът на пирамидата бележим с V. И при правилна, и при неправилна пирамида ***V =*** $\frac{1}{3}Bh $, където ***h*** е височината на пирамидата.

Пирамида и сфера

Вписана сфера

В пирамида може да се впише сфера тогава и само тогава, когато са изпълнени някои от твърденията:

1. Всички стени на пирамидата са допирателни до сферата.
2. Ъглополовящите равнини на всички двустенни ъгли при основните ръбове се пресичат в една точка.
3. Ако двустенните ъгли при основните ръбове на пирамидата са равни.

Ако в пирамида може да се впише сфера, то са изпълнени някои от следните **твърдения**:

1. Всички околни стени сключват равни двустенни ъгли с основата.
2. Проекциите на височините на всички околни стени върху равнината на основата са равни.
3. Височините на всички околни стени са равни.
4. Ъглополовящите равнини на всички двустенни ъгли между две съседни околни стени минават през височината на пирамидата.
5. Всички околни стени сключват равни ъгли с височината на пирамидата.
6. В основата на пирамидата може да се впише окръжност и нейният център съвпада с проекцията на върха на пирамидата върху равнината на основата.
7. В пирамидата може да се впише прав кръгов конус.

За сфера, вписана в пирамида, е вярно, че:

1. Сфера може да се впише във всяка
* триъгълна пирамида (тетраедър);
* правилна пирамида;
1. Центърът на вписаната в правилна пирамидата сфера лежи на пресечната точка на височината на пирамидата и ъглополовящата равнина на ъгъла между околна стена и основата.
2. Радиусът r на вписаната сфера в произволен многостен е равен на$\frac{3V}{S1}$, където S1 е пълната повърхнина, а V е обемът.

Описана сфера

Около пирамида може да се опише сфера, ако са изпълнени някои от твърденията:

1. Всичките ръбове (околни и основни) на пирамидата са хорди на сферата, т.е. сферата минава през всички върхове на пирамидата.
2. Симетралните равнини на околните ръбове се пресичат в една точка лежаща на права перпендикулярна на равнината на основата.
3. Около основата може да се опише окръжност.

Ако около пирамида може да се опише сфера, то са изпълнени някои от следните **твърдения**:

1. Всички околни ръбове са равни.
2. Всички околни ръбове сключват равни ъгли с равнината на основата.
3. Проекциите на всички околни ръбове върху равнината на основата са равни.
4. Симетралните равнини на всички околни ръбове минават през височината.
5. Околните ръбове сключват равни ъгли с височината.
6. Около основата на пирамидата може да се опише окръжност, центърът, на която съвпада с проекцията на върха на пирамидата върху равнината на основата (петата на височината).
7. Около пирамидата може да се опише прав кръгов конус.

За сфера, описана около пирамида, е вярно, че:

1. Сфера може да се опише около:
* Всяка триъгълна пирамида (тетраедър);
* Правилна пирамида;
1. Център *О* на описаната сфера около:
* Произволна пирамида:
* Равнината на всяка стена на пирамидата пресича описаната сфера в окръжност, описана около съответната стена. Перпендикулярите, издигнати от центровете на тези окръжности, се пресичат в центъра на описаната сфера.
* Центърът на сферата лежи на пресечната точка на перпендикуляра, издигнат от центъра на описаната около основата окръжност, и симетралната равнина на кой да е околен ръб.
* Правилна пирамида или неправилна пирамида на която петата на височината е център на описаната около основата окръжност:
* Центърът на описаната сфера лежи в точката на пресичане на височината на пирамидата (или нейното продължение) и симетралната равнина на околен ръб.
1. За радиуса *R* на описана сфера около правилна триъгълна пирамида е изпълнено: ***R =*** $\frac{l^{2}}{2H}$, където l е дължината на околния ръб, а *H* е височината на пирамидата.