Тетраедър

***Дефиниция:***

**Тетраедър** наричаме всяка триъгълна пирамида.

Фигура 1: тетраедър

***Означения:***

1. точка *Н* - проекцията на върха върху основата (петата на височината);
2. околни ръбове – *AD = a, BD = b, CD = c*;
3. основни ръбове – *AB = c0, BC = a0, AC = b0*;
4. ръбни ъгли на тристенния ъгъл при върха *D – ∢BDC = α, ∢CDA =* β*, ∢ADB = γ*;
5. двустенните ъгли на тристенния ъгъл при върха *D – ∢(ABD, ACD) = α1; ∢(ABD, BCD) =* β*1; ∢(BCD, ACD) = γ1*;
6. двустенните ъгли при основата на тетраедъра *– ∢(ABC, BCD) = α0; ∢(ABC, ABD) =* β*0;* *∢(ABC, ABD) = γ0*;
7. лицата на околните стени и основата – $S\_{BCD}$ *= S1,* $S\_{ACD}$ *= S2,* $S\_{ABD}$ *= S3,* $S\_{ABC}$ *= B*.

***Дефиниция:***

Отсечката, която съединява връх на тетраедъра с медицентъра на срещуположната му стена, наричаме **медиана на тетраедъра**.

***Дефиниция:***

 Четирите медиани на тетраедъра се пресичат в една точка наречена **медицентър**, която ги дели в отношение 3 : 1, считано от съответния връх.

***Дефиниция:***

**Бимедиана** наричаме отсечка, съединяваща средите на два срещуположни ръба (кръстосани ръба) на тетраедъра.

Трите бимедиани се пресичат в една точка, която ги разполовява. Тази точка съвпада с медицентъра на тетраедъра.

***Дефиниция:***

**Височина** наричаме всяка отсечка, единият край, на която е негов връх, а другият и край е проекцията на този връх върху срещуположната му стена.

Тетраедърът има четири височини. Точката, в която се пресичат четирите му височини, се нарича **ортоцентър на тетраедъра**.

Ортоцентричен тетраедър

Тетраедър е ортоцентричен тогава и само тогава, когато е изпълнено едно от следните твърдения:

1. Две негови двойки срещуположни ръба (кръстосани ръба) са взаимно перпендикулярни.
2. Един от върховете му се проектира ортогонално върху равнината на срещуположното му стена.
3. Сборът от квадратите на два срещуположни ръба (кръстосани ръба) е постоянен.
4. Дължините на ръбовете му от един връх има следната пропорция: $\frac{a}{cosα}= \frac{b}{cosβ}= \frac{c}{cosγ}.$
5. Перпендикулярите към стените му, прекарани през медицентровете им, се пресичат.

Правоъгълен тетраедър

***Дефиниция:***

 Тетраедър, на който трите ръбни ъгли при един от върховете му са прави, се нарича **правоъгълен тетраедър**.

***Свойства:***

1. Ако *α =* β *= γ = 90*, то и *α1 =* β*1 = γ1 = 90* и обратно.
2. Основата е остроъгълен триъгълник.
3. Петата на височината на правоъгълния тетраедър съвпада с ортоцентъра на основата.
4. Всеки от околните ръбове е перпендикулярен на срещуположната стена.
5. Правоъгълния тетраедър е аналог на правоъгълния триъгълник в равнината, затова околните стени се наричат **катети**, а основата - **хипотенуза** на правоъгълния тетраедър.
6. За височина *h* на правоъгълен тетраедър е в сила равенството$\frac{1}{h^{2}}= \frac{1}{a^{2}}+ \frac{1}{b^{2}}+\frac{1}{c^{2}}.$
7. За двустенните ъгли $α\_{0}, β\_{0}, γ\_{0}$ е в сила равенството $cos^{2}α\_{0}+ cos^{2}β\_{0}+ cos^{2}γ\_{0}=1.$
8. Обем *V =* $\frac{1}{3}abc\sqrt{cosα.cosβ.cosγ}= \frac{1}{3}\sqrt{2.S1.S2.S3}= \frac{1}{6}abc.$

Правилен тетраедър

***Дефиниция:***

Тетраедър, всичките четири стени на който са еднакви равностранни триъгълници, наричаме **правилен тетраедър**.

***Свойства:***

1. Всичките основни и околни ръбове са равни.
2. Всеки ръбен ъгъл при кой да е от върховете е равен на 60.
3. Срещуположните ръбове (основен и околен) са перпендикулярни, т.е. правилна триъгълна пирамида е ортоцентричен тетраедър.
4. Сборът от разстоянията от произволна вътрешна точка на тетраедъра до четирите му стени е равен на височината на тетраедъра.
5. Четирите височини са равни.
6. Четирите медиани са равни.
7. Ортоцентърът, медицентърът, центровете на описаната и вписаната сфера съвпадат.
8. В сила са формулите $h= \frac{\sqrt{6}}{3}a, d= \frac{\sqrt{2}}{2}a, r= \frac{\sqrt{6}}{12}a, R= \frac{\sqrt{6}}{4}a, V= \frac{\sqrt{2}}{12}a^{3}$, където *a* е ръбът на правилния тетраедър, *h* – височината, *d* – най-късото разстояние между два срещуположни ръба (бимедиана), *r* – радиусът на вписаната сфера, *R* – радиусът на описаната сфера, V – обема.

Пресечена пирамида

***Свойства на успоредните сечения:***


Фигура 1: пресечена пирамида

1. Всяко успоредно сечение на пирамида е многоъгълник, подобен на основата.
2. $\frac{B\_{1}}{B}=(\frac{h\_{1}}{h})^{2}=(\frac{A\_{1}D}{AD})^{2}= (\frac{B\_{1}D}{BD})^{2}= (\frac{A\_{1B\_{1}}}{AB})^{2}=…$, където *B* и *B1* са лицата на основата и успоредното сечение, *h1 = DH1, h = DH*.
3. $\frac{V\_{1}}{V}= (\frac{B\_{1}}{B})^{\frac{3}{2}}=(\frac{h\_{1}}{h})^{3}=…$, където V е обемът на пирамидата *ABCD*, а $V\_{1}$– обемът на пирамидата$ A\_{1}B\_{1}C\_{1}D$.

***Дефиниция:***

Многостен, върховете на който са върхове на основата на пирамидата и на нейно успоредно сечение, наричаме **пресечена пирамида**.

***Свойства:***

1. Всяка околна стена е трапец.
2. Височина е всеки перпендикуляр от точка в равнината на едната основа към равнината на другата основа.
3. Околна повърхнина *S* – сборът от лицата на околните стени.
4. Пълна повърхнина $S\_{1}$ *= S + B +* $B\_{1}$, където *B* и $B\_{1}$ са лицата на долната и горната основа.
5. Обемът $V= \frac{H}{3}(B+ B\_{1}+ \sqrt{B.B\_{1}})$, където H е височината на пресечената пирамида.

***Дефиниция:***

Пресечена пирамида, получена от правилна пирамида наричаме **правилна пресечена пирамида**.

***Свойства:***

1. Равни ръбове на долната и горната основа;
2. Равни околни ръбове;
3. Всички околни стени и диагонални сечения са равнобедрени трапеци;
4. Апотема k – височината на всяка околна стена. За апотемата имаме
5. равенството $k^{2}= H^{2}+ (r- r\_{1})^{2}$, където *H* е височината на пресечената пирамида; *r* и *–*$r\_{1}$радиуса на вписаната окръжност в долната и горната основа.
6. Околна повърхнина $S= \frac{P+ P\_{1}}{2}k$, където P и $P\_{1}$ са периметрите на долната и горната основа, k – апотема.
7. Обем – същата формула, както обем на пресечена пирамида.
8. За дължината на околен ръб *l* имаме следните формули:

$l^{2}= H^{2}+ (R-R\_{1})^{2}; l^{2}= k^{2}+ (\frac{b- b\_{1}}{3})^{2}$, където *H* е височина, *k* – апотема, *b* и $b\_{1}$ – дължината на страните на долната и горната основа, *R* и $R\_{1}$ – радиусите на описаната окръжност около долната и горната основа.

1. В правилна пресечена триъгълна пирамида:
* Може да се впише сфера.
* Съществува сфера която се допира до всички ръбове на пирамидата.