

Име: _____, ФН: _____, Спец./курс: _____

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1 В курса "Операционни системи" учат $n \geq 2$ студенти. Те трябва да подготвят презентации на избрани от тях теми, разпределени в малки групи. Докажете, че независимо от числеността на курса:

(а – 10т.) студентите могат да се разделят в групи от двама или трима души;

(б – 10т.) студентите могат да се разделят в групи от двама или трима души, като има най-много две групи от по двама студенти.

Задача 2 Дадено е крайно множество A и тотална функция $f : A \rightarrow A$, която е инекция. Докажете, че f е биекция.

Задача 3 Нека $G(V, E)$ е свързан неориентиран граф, а с $d(v), v \in V$, означаваме степента на връх v (броя ребра, излизящи от v). Нека G има l върха с нечетна степен.

(а – 10т.) Докажете, че l е четно.

(б – 10т.) Намерете минималния брой ребра, които при добавяне към E ще превърнат G в ойлеров граф.

Задача 4 Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната 10. Докажете, че както и да се изберат пет точки от вътрешността на триъгълника, то между тях ще има поне две на разстояние, по-малко от 5.

Упътване: Използвайте наготово следното твърдение: всяка отсечка между две точки в произволен триъгълник е не по-дълга от най-голямата му страна; равенство се достига само когато точките са краищата на тази страна.

Задача 5 Да се намери броят на булевите функции на n променливи, за чиято съвършена дизюнктивна нормална форма е вярно следното:

(а – 10т.) буквата x_1 се среща само с отрицание;

(б – 10т.) има три събирами и във всяко от тях има точно две букви с отрицания.

Задача 6 Напишете съвършената ДНФ и полинома на Жегалкин на булевата функция $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee z) \wedge (x \oplus y)$.

Примерни решения

Задача 2 Нека $B = \{y : \exists x \in A, y = f(x)\}$ е множеството от значенията на f .

Ако $A = B$, то f е биекция.

Ако B е същинско подмножество на A , то има по-малко елементи и тогава, съгласно с принципа на Дирихле, поне два елемента на A ще бъдат изобразени от f в един елемент на B , което противоречи на условието, че f е инекция.

Задача 4 Нека триъгълникът е ABC . Да означим с A_1, B_1 и C_1 средите на страните BC, AC и AB съответно и да ги свържем с отсечки.

Получаваме разрязване на $\triangle ABC$ на четири еднакви равностранни триъгълника – $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_1BC_1$ и $\triangle A_1B_1C$.

Както и да избираме пет точки в $\triangle ABC$, поне две от тях ще попаднат в един от четирите малки триъгълника (следствие от принципа на Дирихле).

Ползваме упътването за такава двойка точки. Дълбината на свързващата ги отсечка ще е най-много 5 – дълбината на страната на съдържащия ги малък триъгълник. Равенство ще се достига само когато са върхове на този триъгълник, но това е невъзможно, защото са вътрешни за $\triangle ABC$, следователно разстоянието между тях е по-малко от 5.

Задача 5 При броенето ще правим разсъждения за таблицата, представяща възможна функция f и вида на пълните елементарни конюнкции (за краткост ще ги наричам импликанти), за които f приема стойност 1:

(А) Функция от този вид е 0, когато $x_1 = 1$, т. е. за всички редове от втората половина на таблицата. В първата половина има 2^{n-1} реда и там f може да приема произволни стойности. За всеки от тези 2^{n-1} реда стойността на f е 0 или 1, следователно за f има $2^{2^{n-1}}$ възможности.

Един от случаите е специален – когато колоната от стойности на f съдържа само нули, тя не може да се представи като СДНФ, защото има 0 импликанти. Като махнем този специален случай, броят на функциите, удовлетворяващи условието, е $2^{2^{n-1}} - 1$.

(Б) Функция от този вид има точно 3 импликанти. Съответният ред за всяка от тези импликанти в таблицата на f съдържа точно 2 нули и $n - 2$ единици в низа, описващ стойностите на булевите променливи. Броят на всички такива редове е $\binom{n}{2}$.

Можем да изберем 3 от тези $\binom{n}{2}$ реда по $\binom{\binom{n}{2}}{3}$ начина, това е и броят на функциите, удовлетворяващи условието.