Примерни, непълни решения на задачите по Дискретни Структури от изпита на 25.08.2015 г.

Зад. 1 Дадено е множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Дадена е бинарната релация $R \subseteq 2^A \times 2^A$, дефинирана така:

$$\forall (x, y) \in 2^A \times 2^A : (x, y) \in R \leftrightarrow x \cap y \neq \emptyset$$

За всяко от шестте свойства на бинарни релации, което сме изучавали на лекции, определете дали R има това свойство или не. Аргументирайте отговорите си.

Решение: R не е рефлексивна, защото $\emptyset$ е елемент на 2^A, обаче $(\emptyset, \emptyset) \notin R$, понеже не е вярно, че $\emptyset \cap \emptyset \neq \emptyset$.

R не е антирефлексивна, понеже, примерно, $(\{1\}, \{1\}) \in R$.

R е симетрична поради комутативността на сечението.

R не е антисиметрична, понеже, примерно, $(\{1, 2\}, \{2, 3\}) \in R$ и $(\{2, 3\}, \{1, 2\}) \in R$.

R не е силно антисиметрична щом не е антисиметрична.

R не е транзитивна. Ако едно множество има непразно сечение с второ множество и второто има непразно сечение с трето множество, от това не следва, че първото и третото имат непразно сечение. Примерно, $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} \neq \emptyset$ и $\{2, 3\} \cap \{3, 4\} \neq \emptyset$, но $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$.

Зад. 2 Дадени са непразни крайни множества A и B. Нека $|A| = m$ и $|B| = n$.

1. *2 т.* Колко функции $f : A \to B$ са инекции?
2. *4 т.* Колко функции $f : A \to B$ не са сюрекции?
3. *4 т.* Колко функции $f : A \to B$ са инекции и не са сюрекции?

Аргументирайте отговорите си.

Решение: Инекциите са $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1)$. Няма нужда от специално разглеждане на случая $m > n$—тази формула дава нула, ако $m > n$.

Сюрекциите са $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$, което е извеждано в час. Функциите без ограничение с домейн A и кодомейн B са n^m. Тогава броят на не-сюрекциите е $n^m - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$.

Броят на инекциите, които не са сюрекции, е следният:

- Ако $m = n$, то 0, защото тогава всички инекции са и сюрекции.
- Ако $m < n$, то $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1)$, защото тогава няма сюрекции.
- Ако $m > n$, то 0, защото тогава няма инекции.

Зад. 3 Дадено е множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Дадена е бинарната релация $R \subseteq 2^A \times 2^A$, дефинирана така:

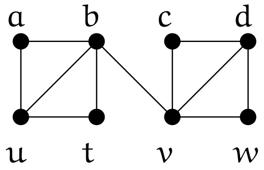
$$\forall (x, y) \in 2^A \times 2^A : (x, y) \in R \leftrightarrow x \subseteq y$$

Намерете $|R|$. В най-добрия случай, Вашият отговор трябва да е число.

Решение: Да решим задачата за по-общия случай на n-елементно множество. За всяко негово k-елементно подмножество X има точно 2^{n-k} на брой подмножества Y, такива че $X \subseteq Y$. Броят на k-елементните подмножества е $\binom{n}{k}$. Следователно, за всяко k, където $0 \leq k \leq n$, има $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ елемента (X, Y) на релацията R, такива че $|X| = k$. Общо, $|R| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}$. Съгласно теоремата на Нютон, това се опростява така: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$.

В частност, $3^8 = 6561$ е търсеното решение.

Зад. 4 Разгледайте следния граф:



1. *2 т.* Какво е хроматичното число на графа?

2. *10 т.* Колко покриващи дървета има графът?

Обосновете отговорите си.

Решение: Хроматичното число е 3.

За да решим колко покриващи дървета има, първо съобразяваме, че реброто (b, v) се съдържа във всяко покриващо дърво. Нека G_1 е подграфът, индуциран от $\{a, b, u, t\}$ и G_2 е подграфът, индуциран от $\{c, d, v, w\}$. Очевидно G_1 и G_2 са изоморфни и имат един и същи брой покриващи дървета. Нещо повече, ако G_1 (и G_2) има k покриващи дървета, то отговорът е k^2.

Ще докажем, че G_1 има 8 покриващи дървета. Разбиваме множеството от тях по това, дали съдържат (b, u), или не.

- Точно 4 покриващи G_1 дървета съдържат (b, u), защото от всички $\binom{4}{2} = 6$ начина да изберем останалите две ребра, два начина водят до цикъл, а другите четири начина, до покриващо дърво.

- Точно 4 покриващи G_1 дървета не съдържат (b, u), защото всеки избор на $\binom{4}{3} = 4$ други ребра задава едно покриващо дърво.

И така, G_1 има $4 + 4 = 8$ покриващи дървета, и отговорът е $8 \times 8 = 64$.

Зад. 5 Дадено е безкрайно множество S от коренови дървета чрез следната индуктивна дефиниция:

- **База:** T_0, дървото, състоящо се от един единствен връх u и нула ребра, е в S. То има корен u и височина 0.

- **Индуктивна стъпка:** Нека $T_{\ell-1}$, дърво с височина $\ell - 1$ и корен u, е в S.

  Правим две копия на $T_{\ell-1}$, което означава следното. Конструираме две нови дървета T' и T'', всяко от тях изоморфно на $T_{\ell-1}$. Нека T' има корен u', а T'' има корен u''. Очевидно и T', и T'' имат височина $\ell - 1$. Конструираме и един нов връх v. Използвайки $T_{\ell-1}$, T', T'' и v, конструираме ново дърво с височина ℓ, което наричаме T_ℓ, добавяйки три ребра (v, u), (v, u') и (v, u''). Коренът на T_ℓ е връх v. Добавяме T_ℓ в S.

- *8 т.* Съставете рекурентно отношение за броя на върховете на T_n и го решете.

- *2 т.* Определете броя на ребрата на T_n.

Решение: Нека D_n е броят на върховете на T_n. Търсеното рекурентно отношение е:

$$D_0 = 1$$
$$D_n = 3D_{n-1} + 1 \quad \text{за } n > 0$$

Обосновката е директно чрез дефиницията: според базата, дървото с височина нула има само един връх, а всяко дърво с височина $n > 0$ съдържа върхове на брой, три пъти колкото са върховете на дърво с височина $n - 1$, плюс още един връх v.

Решението е $D_n = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)$.

Броят на ребрата на всяко дърво е с единица по-малък от броя на върховете, така че броят на ребрата на T_n е $D_n - 1$.

Зад. 6 Каква е дължината на Съвършената Дизюнктивна Нормална Форма на булевата функция на n променливи

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$$

Под "дължина на СъвДНФ" разбираме броя на пълните елементарни конюнкции в нея.

Решение: Тривиално се доказва по индукция, че за всяко $n \geq 1$, колоната на функцията f съдържа 2^{n-1} единици (и съответно 2^{n-1} нули). Следователно, отговорът е 2^{n-1}.