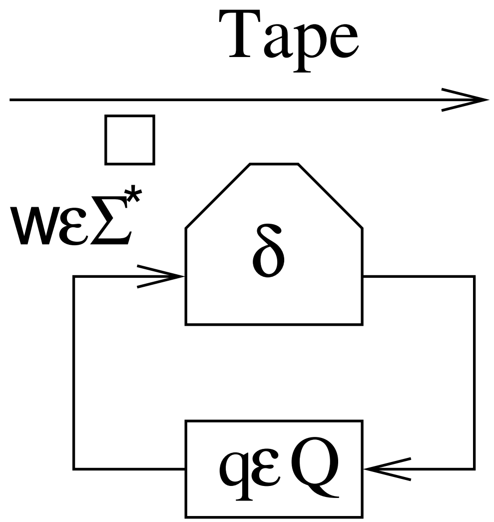
Регулярни езици

- ⇝ (Не)детерминистични крайни автомати
- ⇝ Регулярни изрази
- □ Нерегулярни езици
- □ Минимален автомат
- □ Разрешими проблеми

1.1.1 (Детерминистични) крайни автомати

Един детерминистичен краен автомат $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ се състои от:
(детерминистичен краен автомат=DFA)

- Q, крайно множество от състояния;
- Σ, крайно множество от (входни) символи, (азбука);
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, функция на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние;
- $F \subseteq Q$, множество от крайни състояния.



Как работи един краен автомат?

Разширяваме функцията δ върху думи:

$\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q$

$\hat{\delta}(q,aw) = \hat{\delta}(\delta(q,a),w)$

$A = (Q,\Sigma,\delta,s,F)$ разпознава езика

$L(A) := \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(s,w) \in F \right\}$

Еквивалентна дефиниция:

$\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q$

$\hat{\delta}(q,wa) = \delta(\hat{\delta}(q,w),a)$

Свойство: $\forall q, u, v : \hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v)$.

Д-во: индукция по u.

1. $u = \varepsilon$.

$\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(q, v)$.

$\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \varepsilon), v) = \hat{\delta}(q, v)$.

2. $u = au'$.

$\hat{\delta}(q, au'v) \overset{\text{деф}}{=} \hat{\delta}(\delta(q, a), u'v) \overset{\text{ип}}{=} \hat{\delta}(\hat{\delta}(\delta(q, a), u'), v) \overset{\text{деф}}{=}$
$\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, au'), v)$.

Интерпретация с ориентиран граф

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$G_A = (Q, E)$,

всяка дъга $e = (q, q') \in E$ има етикет $\ell(e) = a$ ако $q' = \delta(q, a)$

Мулти-граф!

Лема:

$\forall w \in \Sigma^* : w \in L(A) \Leftrightarrow$

$\exists$път $P = sq_1q_2 \cdots f = s \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_k} f$

, за някое $f \in F, w = a_1a_2 \cdots a_k$.

Терминология:

Под път в A разбираме път в G_A.

Означения за път

$P = sq_1q_2\cdots f$ редица от върхове(състояния)

$P = s \stackrel{a_1}{\to} q_1 \stackrel{a_2}{\to} \cdots \stackrel{a_k}{\to} f$ редица от (директни) преходи

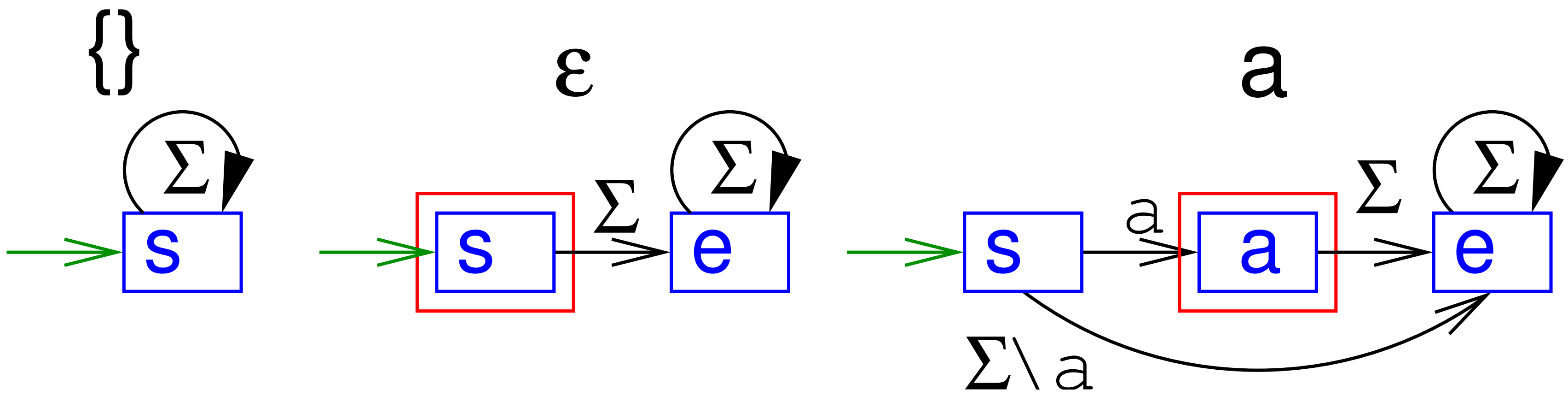
$P = s \stackrel{w}{\Rightarrow} f$, където $w = a_1\cdots a_k$, P е с етикет w

$q \stackrel{*}{\Rightarrow} r$ има път от q до r, т.е. r е достижим от q

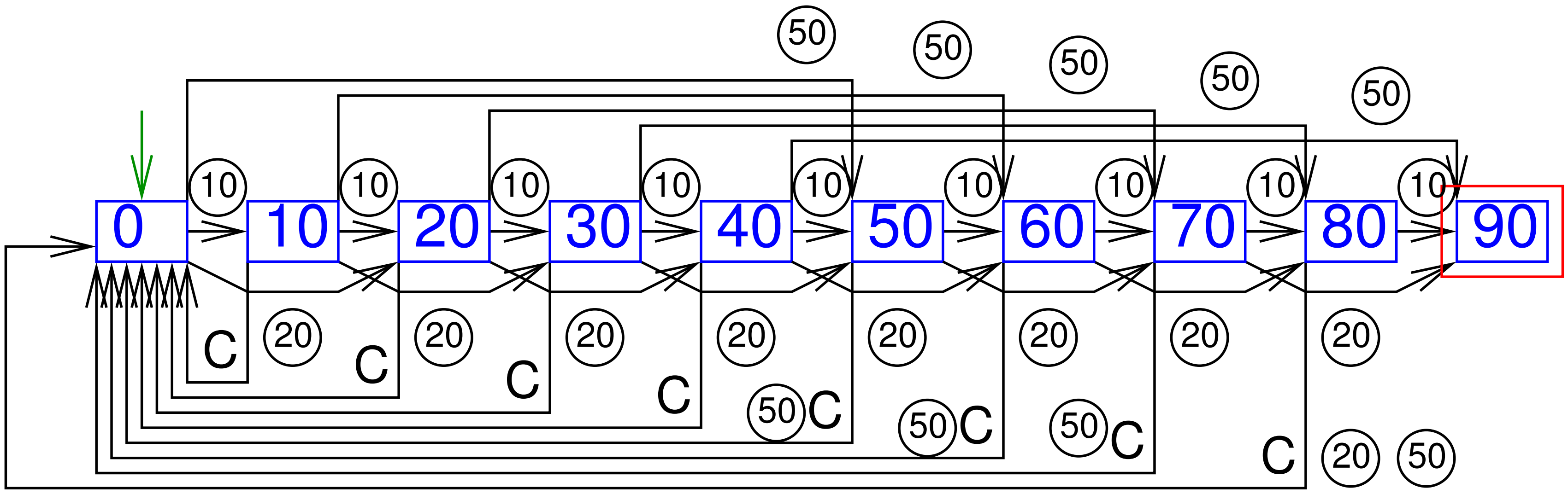
По дефиниция $s \stackrel{*}{\Rightarrow} s$ (рефлексивност)

Свойство: $\hat{\delta}(q,w) = r \iff q \stackrel{w}{\Rightarrow} r$.

Крайни автомати: Основни примери



Пример: Билетен автомат



Конфигурация $(q,w) \in \Sigma^* \times Q$.

Дефиниция: $(q,w) \vdash_A (p,u) \iff w = au \ \& \ \delta(q,a) = p$.

Дефиниция: $(q,w) \vdash_A^* (p,u)$

(рефлексивно и транзитивно затваряне на $\vdash_A$)

$(q,\varepsilon) \vdash_A^* (q,\varepsilon)$.

$(q,aw) \vdash_A^* (p,u) \iff (q,aw) \vdash_A (r,w) \ \& \ (r,w) \vdash_A^* (p,u)$.

Проверете, че: $(q,w) \vdash_A^* (p,u) \iff (\exists v \in \Sigma^*)(w = vu \ \& \ \hat{\delta}(q,v) = p) \iff \hat{\delta}(q,w) = \hat{\delta}(p,u)$.

Твърдение: $w \in L(A) \iff (\exists f \in F)(\hat{\delta}(s,w) = f \in F) \iff (\exists f \in F)(s \overset{w}{\Rightarrow} f) \iff (\exists f \in F)((s,w) \vdash_A^* (f,\varepsilon))$.

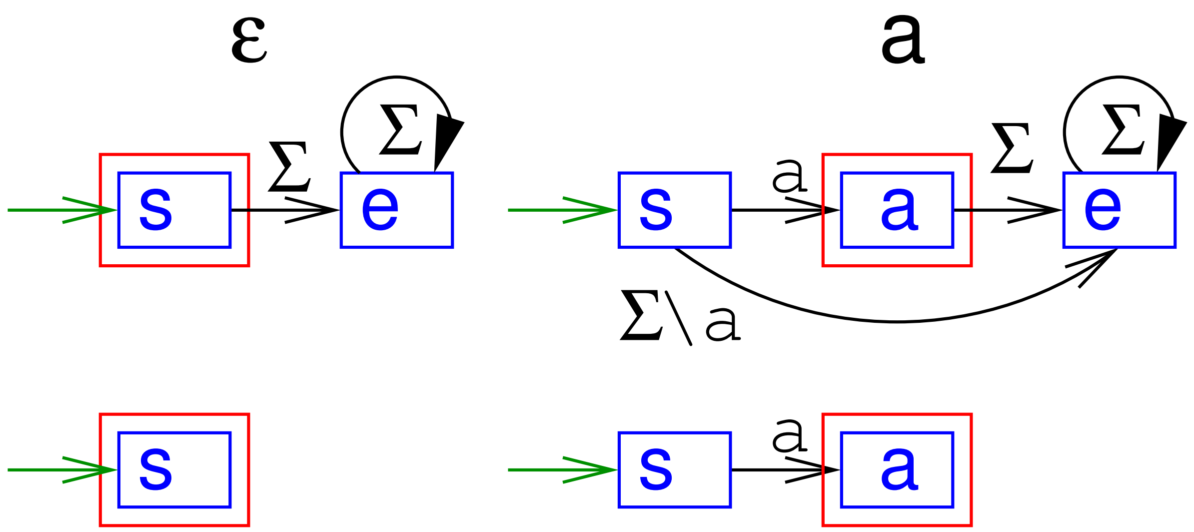
Тоталност

Един автомат е тотален, ако от всяко състояние има преход с всяка буква от Σ.

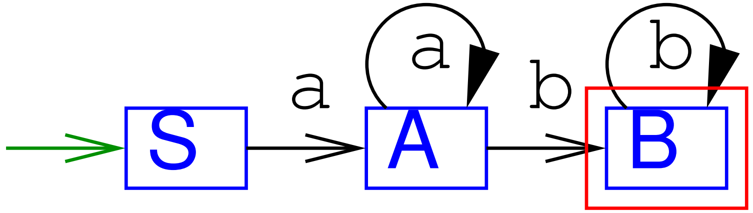
Често не даваме всички стойности на δ, т.е. автоматът може да не е тотален.

Конвенция: Има винаги error състояние e такова, че $\delta(q,c) = e$ когато не може да разпознаваме повече символи.

$\delta(e,c) = e \ (\forall c \in \Sigma)$


ε
a
Σ
Σ
s
e
a
Σ
Σ
s
a
e
Σ\a
s
s
a
a

Пример: $\{a^n b^m : n \geq 1, m \geq 1\}$



$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$

q	c	$\delta(q,c)$	
S	a	A	
A	a	A	
A	b	B	
B	b	B	

$\delta(S, b)$?

1.1.2 Недетерминистични крайни автомати NFA

- допускат се повече от един преход от дадено състояние с един символ

Недетерминистичен краен автомат $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

- Q, множество от състояния
- Σ, азбука
- $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$, функция на прехода
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния

Преходът от q до q' при вход a: $q' \in \delta(q, a)$

повече възможности!

Разширяване на δ

Подмножества от състояния: $\bar{\delta} : 2^Q \times \Sigma \to 2^Q$

$$\bar{\delta}(M,a) := \bigcup_{p \in M} \delta(p,a)$$

Подмножества от състояния и входна дума :
$\hat{\delta} : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

$\hat{\delta}(M,\varepsilon) := M$
$\hat{\delta}(M,aw) := \hat{\delta}(\bar{\delta}(M,a),w)$

$$L(A) := \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\{s\},w) \cap F \neq \emptyset \right\}$$

Интерпретация с (мулти) граф за $L(A)$

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$G_A = (Q, E)$

всяка $e = (q, q') \in E$ е с етикет $\ell(e) = a$ ако $q' \in \delta(q, a)$

"‘Мулти"’= паралени дъги са разрешени(различни етикети)

$w \in L(A) \Leftrightarrow \exists$ път $P = s \overset{a_1}{\Rightarrow} q_1 \overset{a_2}{\Rightarrow} \cdots \overset{a_k}{\Rightarrow} f$ in A (в G(A)) :

$$f \in F \wedge w = a_1 a_2 \cdots a_k$$

Пътят $P = s \overset{w}{\Rightarrow} f$ от s до крайно състояние f, с етикет w наричаме приемащ за w.

Лема: $\hat{\delta}(M,w) = \left\{ q \in Q : \exists p \in M : p \overset{w}{\Rightarrow} q \right\}$.

Д-во с индукция по $|w|$:

$\hat{\delta}(M,\varepsilon) = M$

$n \rightsquigarrow n+1$:

$\hat{\delta}(M,aw) = \hat{\delta}(\bar{\delta}(M,a),w)$

$= \left\{ r \in Q : (\exists q \in \bar{\delta}(M,a)) : q \overset{w}{\Rightarrow} r \right\}$ (ИП)

$= \left\{ r \in Q : (\exists p \in M)(\exists q \in \delta(p,a)) : q \overset{w}{\Rightarrow} r \right\}$ (Деф. $\bar{\delta}$)

$= \left\{ r \in Q : (\exists p \in M) : p \overset{aw}{\Rightarrow} r \right\}$ (Интерпретация с граф.)

$\square$

Следствие: $L(A) = \left\{ w \in \Sigma^* : \exists f \in F : s \overset{w}{\Rightarrow} f \right\}$

Свойство: $\hat{\delta}(M,uw) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(M,u),w)$.

Дефиниция: $(q,w) \vdash_A (p,u) \iff w = au \ \&\ p \in \delta(q,a)$.

Означение:

($\vdash_A^*$ е рефлексивното и транзитивно затваряне на $\vdash_A$)

$(q,\varepsilon) \vdash_A^* (q,\varepsilon)$.

$(q,aw) \vdash_A^* (p,u) \iff (q,aw) \vdash_A (r,w) \ \&\ (r,w) \vdash_A^* (p,u)$.

Свойства

1. Ако $r \in \delta(q,a)$ и $(r,w) \vdash_A^* (p,\varepsilon)$, то $(q,aw) \vdash_A^* (p,\varepsilon)$.

2. $\hat{\delta}(\{q\},w) = \left\{p \in Q : q \stackrel{w}{\Rightarrow} p\right\} = \{p \in Q : (q,w) \vdash_A^* (p,\varepsilon)\}$.

3. $\hat{\delta}(\{q\},uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(\{q\},u),v)$.

4. $w \in L(A) \iff \hat{\delta}(\{s\},w) \cap F \neq \emptyset \iff (\exists f \in F : s \stackrel{w}{\Rightarrow} f) \iff (\exists f \in F)(q,w) \vdash_A^* (f,\varepsilon)$.

NFA→DFA

Даден: NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

Теорема: (Детерминизация на NFA)[Рабин, Скот 1959]
DFA $A' := (2^Q, \Sigma, \bar{\delta}, \{s\}, \{M \subseteq Q : M \cap F \neq \emptyset\})$ разпознава $L(A)$.

Упражнение: Дайте алгоритъм, който по даден NFA A и дума w да изчислява $\hat{\delta}(\{s\}, w)$ за време $\mathcal{O}(|w| \cdot |\delta|)$. Тук $|\delta|$ е броят на преходите от вида $p \in \delta(q, a)$, достатъчни да дефинираме δ.

Детерминизация на NFA

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$A' := (2^Q, \Sigma, \bar{\delta}, \{s\}, F')$, $F' := \{M \subseteq Q : M \cap F \neq \emptyset\}$, където

$\bar{\delta}(M, a) := \bigcup_{p \in M} \delta(p, a)$

Твърдим: $L(A') = L(A)$

Д-во: Първо да отбележим, че $\hat{\bar{\delta}}(\{s\}, w) = \hat{\delta}(\{s\}, w)$.

Тогава

$$L(A) = \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset \right\} \qquad \text{Деф. L(A)}$$

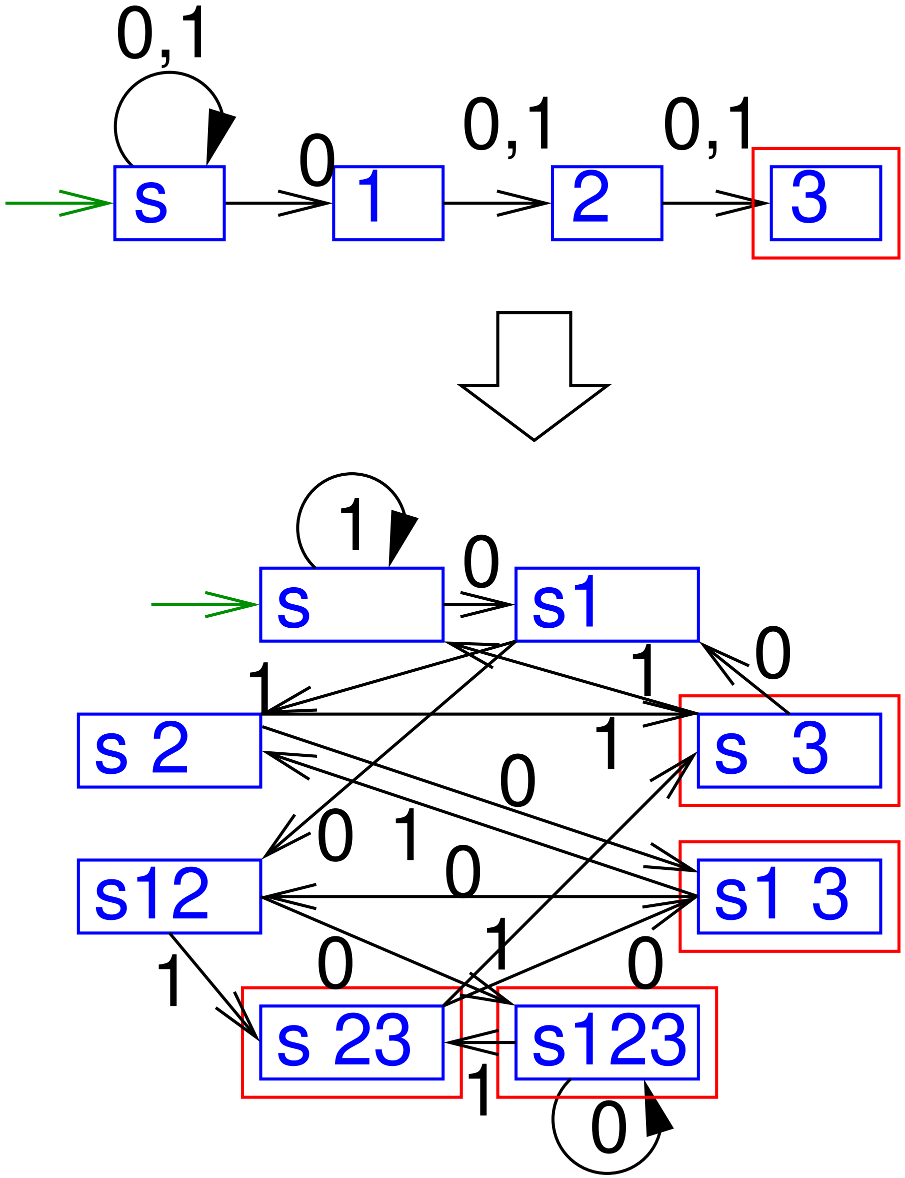
$$= \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(\{s\}, w) \in F' \right\} \qquad \text{Деф. F'}$$

$$= L(A') \qquad \text{Деф. L(A')}$$

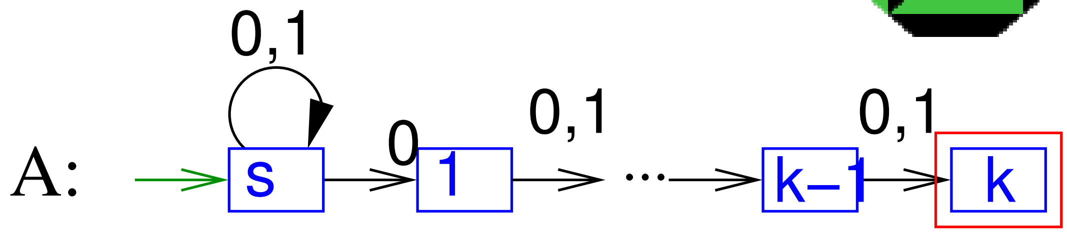
($\hat{\delta}$ играе двойна роля!) $\square$

Пример

q	$\bar{\delta}(q,0)$	$\bar{\delta}(q,1)$
s	$s,1$	s
$s,1$	$s,1,2$	$s,2$
$s,2$	$s,1,3$	$s,3$
$s,3$	$s,1$	s
$s,1,2$	$s,1,2,3$	$s,2,3$
$s,1,3$	$s,1,2$	$s,2$
$s,2,3$	$s,1,3$	$s,3$
$s,1,2,3$	$s,1,2,3$	$s,2,3$



По-общ пример



Твърдение:

$\nexists$DFA $A' = (Q, \Sigma, \delta, s, F) : L(A') = L(A) \wedge (|Q| < 2^k)$

Д-во: Да предположим, че: $\exists A'$ и $|Q| < 2^k$

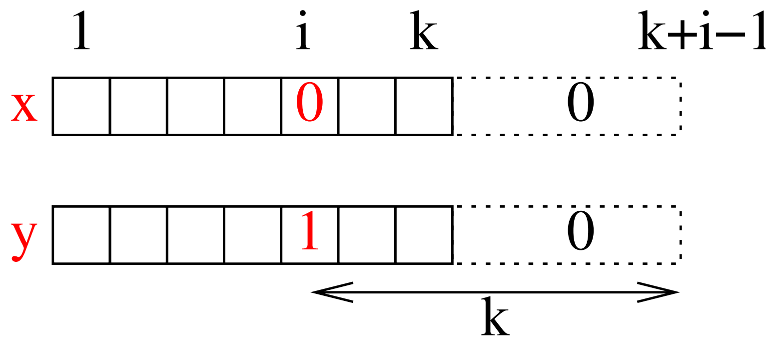
$\longrightarrow \exists x \neq y \in \{0,1\}^k : \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y)$(Принцип на Дирихле)

където i: $x[i] \neq y[i]$,

Нека $x[i] = 0$, $y[i] = 1$.

Тогава $x0^{i-1} \in L(A)$

и $y0^{i-1} \notin L(A)$.



Но, $\hat{\delta}(s, x0^{i-1}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(s,x), 0^{i-1})$

$= \hat{\delta}(\hat{\delta}(s,y), 0^{i-1}) = \hat{\delta}(s, y0^{i-1})$.

Така или и двете думи $x0^{i-1}$ и $y0^{i-1}$ се приемат, или и двете не се приемат. Противоречие. $\square$

Прилагане на алгоритъма за детерминизация

Разглеждаме само подмножествата достижими от $\{s\}$:

Q':= $\{\{s\}\}$ // състояния на A'

Queue todo:= Q'

while $\exists M$ ∈todo do

  todo:= todo$\setminus M$

  foreach $a \in \Sigma$ do

    if $M' = \bar{\delta}(M, a) \notin Q'$ then

      insert M' into Q'

      insert M' into todo

Често $|Q'| \ll 2^{|Q|}$!

Регулярни езици

- $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ и $\{a\}$ за всяко $a \in \Sigma$ са основни регулярни езици;
- Ако L_1 и L_2 са регулярни, то и $L_1 \cup L_2$ е регулярен;
- Ако L_1 и L_2 са регулярни , то и $L_1.L_2$ е регулярен;
- Ако L е регулярен, то и L^* е регулярен.

Един език е регулярен, ако се получава от основните с помощта на операциите обединение, конкатенация и звезда, приложени краен брой пъти.

1.1.3 Регулярни изрази

Всеки регулярен израз описва един регулярен език.

израз	описва	забележка
$\emptyset$	$\emptyset$	
ε	$\{\varepsilon\}$	
a	$\{a\}$	$a \in \Sigma$
$\alpha \cup \beta$	$L(\alpha) \cup L(\beta)$	α описва $L(\alpha)$ (синоним: $\alpha \vert \beta$)
$\alpha \cdot \beta$	$L(\alpha) \cdot L(\beta)$	β описва $L(\beta)$
(α)	$L(\alpha)$	
α^*	$L(\alpha)^*$	
α^+	$L(\alpha)^+$	

Конвенции: пропускаме '$\cdot$', пропускаме $L(\cdot)$

Синтаксис (рег. израз) versus

Семантика (рег. езици)

Компютърните програми боравят със синтактични обекти.

Програмна верификация

Ние доказваме от семантична гледна точка, че обектът ще се обаработи коректно.

Пример

- предпоследната цифра е 0: $(0 \cup 1)^* 0 (0 \cup 1)$
- съдържа 10: $(0 \cup 1)^* 10 (0 \cup 1)^*$
- не съдържа 10: $0^* 1^*$
- съдържа 101: $(0 \cup 1)^* 101 (0 \cup 1)^*$
- не съдържа 101: $0^* 1^* \cup (0^* 1^* 100)^* 0^* 1^* 10 (\varepsilon \cup 00^* 1^*)$
- всички цели числа: $(\varepsilon \cup + \cup -)(1 \cup \cdots \cup 9)(0 \cup \cdots \cup 9)^* \cup 0$

Затвореност относно регулярните операции

Един език L се нарича автоматен, ако има краен автомат A такъв, че $L(A) = L$.

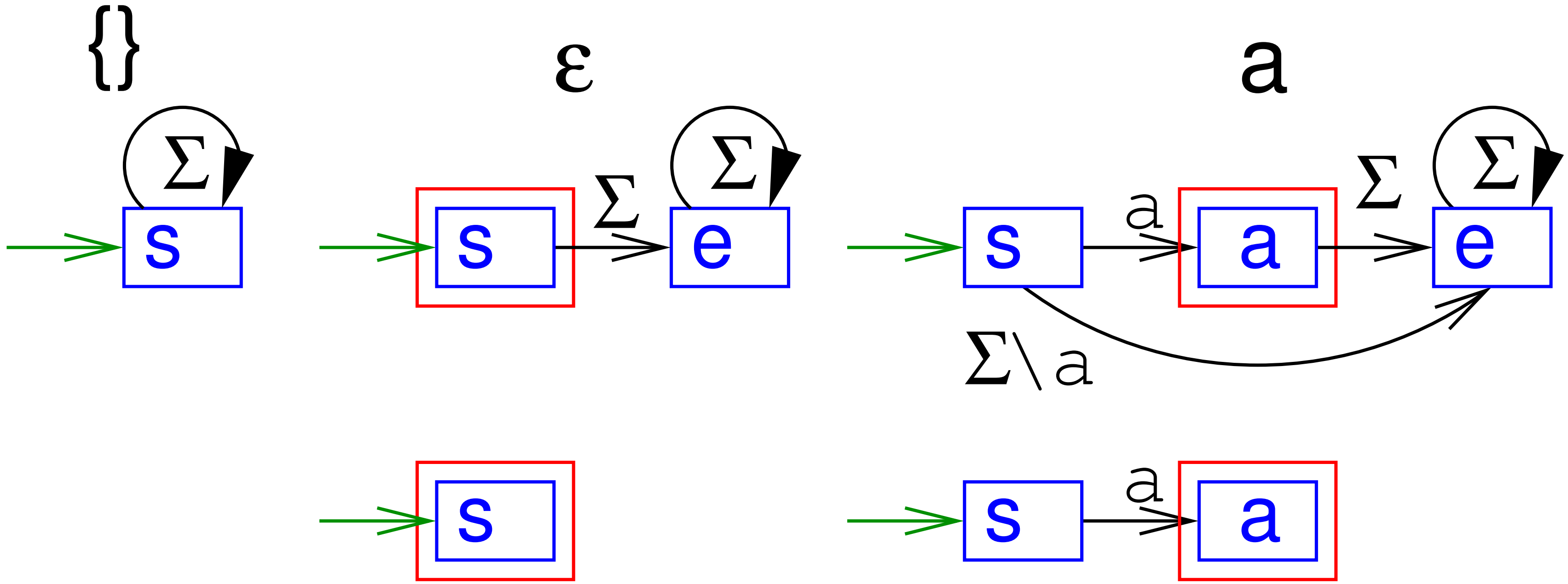
Теорема Всеки регулярен език е автоматен.

Д-во идея:

ще построим автомати, разпознаващи основните езици (основните езици са автоматни)

ще покажем, че регулярните операции запазват автоматността

Базов случай

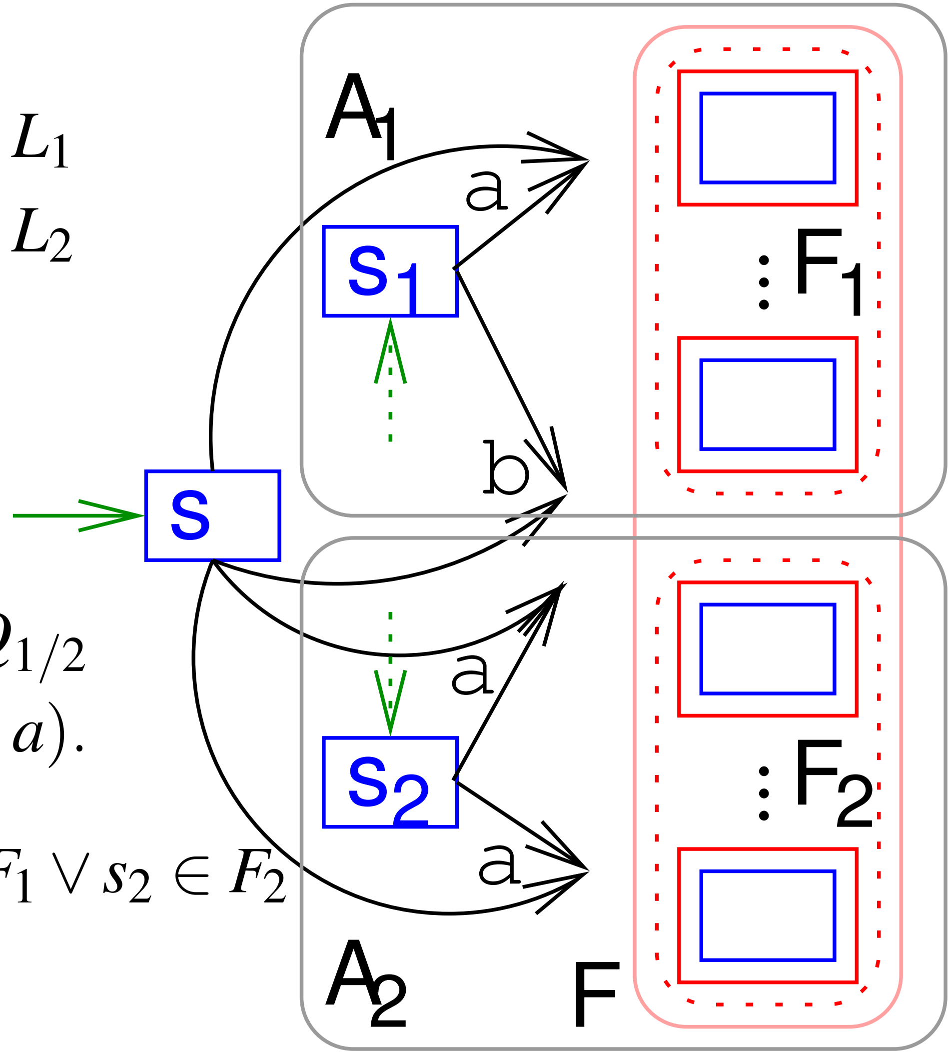


$L_1 \cup L_2$

$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ и $L(A_1) = L_1$
$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ и $L(A_2) = L_2$
и БОО $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$A := (\{s\} \cup Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, s, F)$
δ е дефинирана като $\delta_{1/2}$ за $Q_{1/2}$
$\forall a \in \Sigma : \delta(s,a) := \delta(s_1,a) \cup \delta(s_2,a)$.

$$F := \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{s\} & \text{ако } s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2 \\ F_1 \cup F_2 & \text{иначе} \end{cases}$$



Д-во на $L_1 \cup L_2 \subseteq L(A)$

Нека $w \in L_1 = L(A_1)$ (произволна).

Ако $w = \varepsilon$

$\longrightarrow s_1 \in F_1 \longrightarrow s \in F \longrightarrow w \in L(A)$.

Ако $w = ax$:

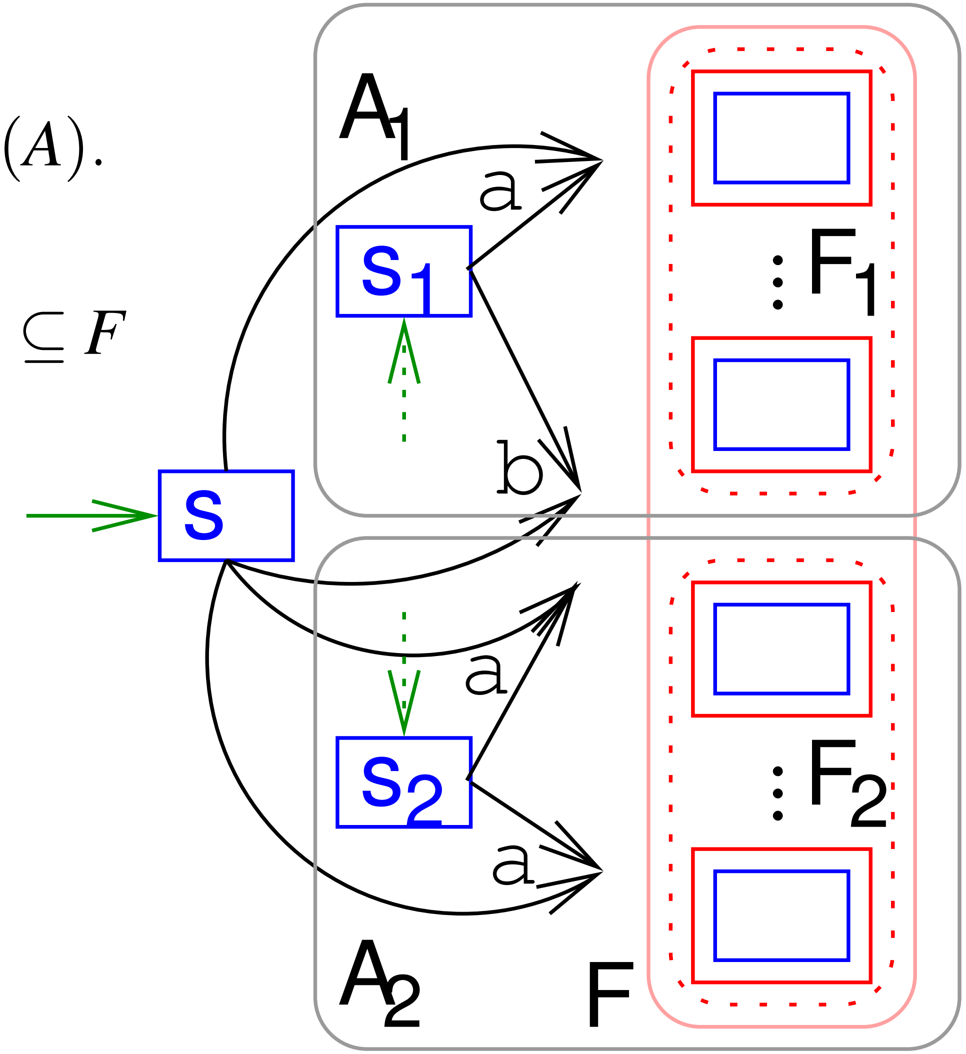
$\longrightarrow \exists$ път $P_1 = s_1 \overset{a}{\Rightarrow} q_1 \overset{x}{\Rightarrow} f_1 \in F_1 \subseteq F$

$\longrightarrow \exists$ път $P = s \overset{a}{\Rightarrow} q_1 \overset{x}{\Rightarrow} f_1 \in F$

$\longrightarrow w \in L(A)$.

$w \in L_2 = L(A_2)$

$\longrightarrow \cdots \to w \in L(A)$.



Д-во на $L(A) \subseteq L_1 \cup L_2$

Нека w е произволна дума $w \in L(A)$.

Ако $w = \varepsilon \longrightarrow s \in F \longrightarrow s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2$

$\longrightarrow \varepsilon \in L_1 \vee \varepsilon \in L_2 \longrightarrow \varepsilon \in L_1 \cup L_2$

Ако $w = ax$:

$\longrightarrow \exists$ път $P = s \overset{a}{\Rightarrow} q \overset{x}{\Rightarrow} f \in F$.

Ако $q = q_1 \in Q_1$:

$\longrightarrow \exists$ път $P_1 = s_1 \overset{a}{\Rightarrow} q_1 \overset{x}{\Rightarrow} f \in F_1$.

(само състояния,

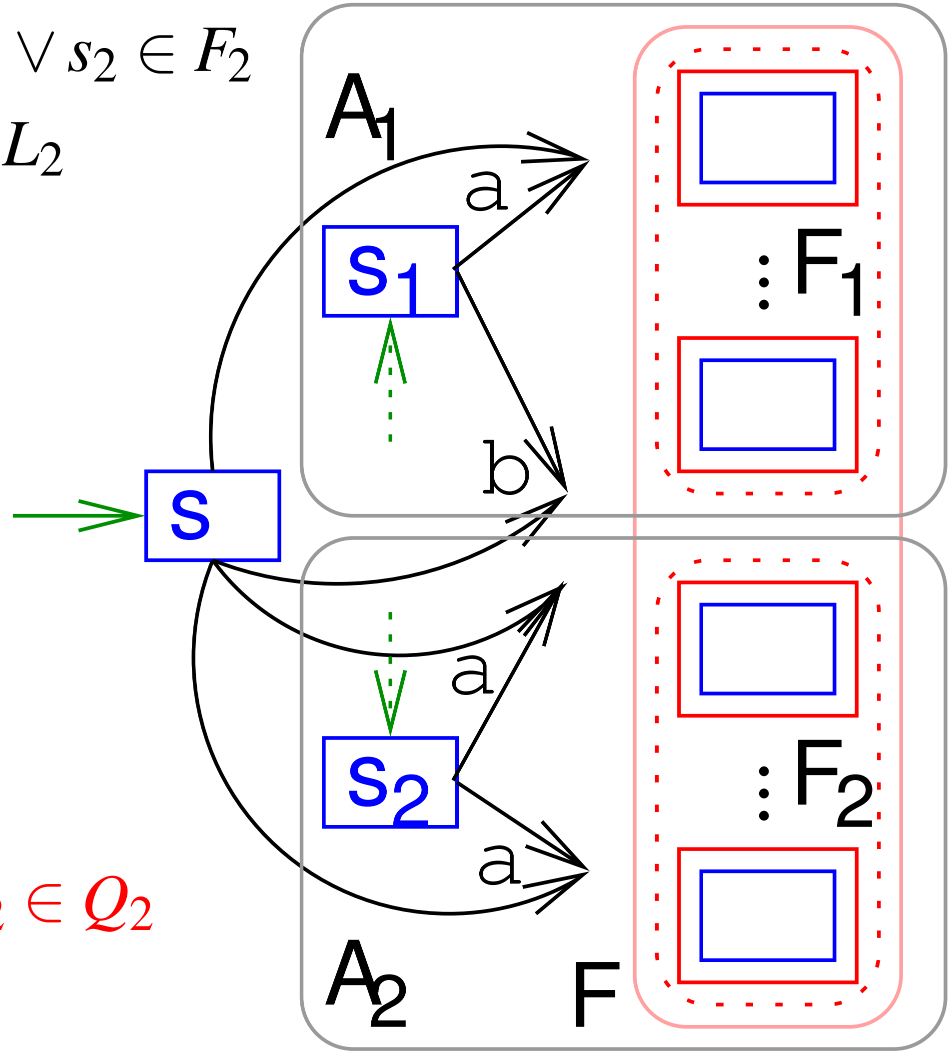
достижими от q_1 са в Q_1.)

$\longrightarrow ax = w \in L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$

В противен случай: $\longrightarrow q = q_2 \in Q_2$

$\longrightarrow \exists$ път $P_2 = s_2 \overset{a}{\Rightarrow} q_2 \overset{x}{\Rightarrow} f \in F_2$.

$\longrightarrow ax = w \in L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$



$\square$

$L_1 \cdot L_2$

$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ и $L(A_1) = L_1$

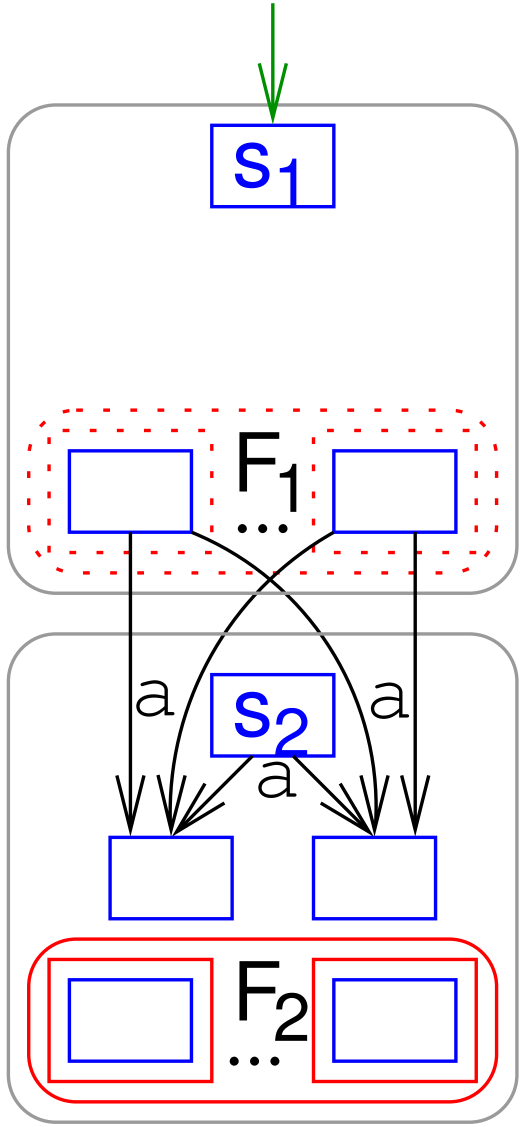
$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ и $L(A_2) = L_2$

и $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$A := (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, s_1, F), \forall a \in \Sigma :$

$$\delta(q,a) := \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{ако } q \in Q_1 \setminus F_1 \\ \delta_1(q,a) \cup \delta_2(s_2,a) & \text{ако } q \in F_1 \\ \delta_2(q,a) & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F := \begin{cases} F_1 \cup F_2 & \text{ако } s_2 \in F_2 \\ F_2 & \text{иначе} \end{cases}$$

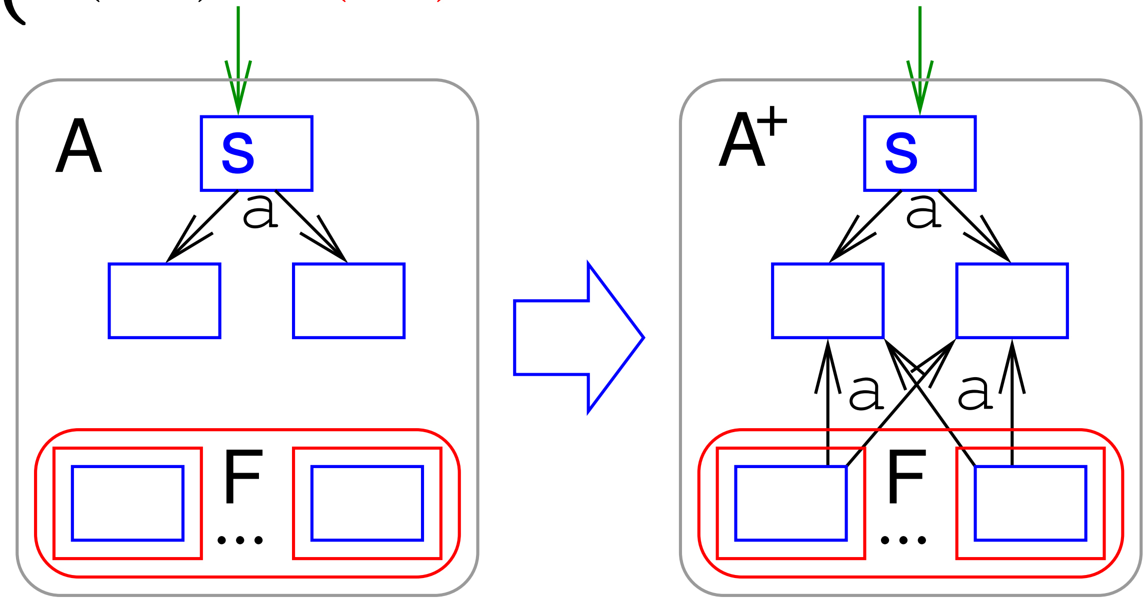


Позитивна обвивка $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$

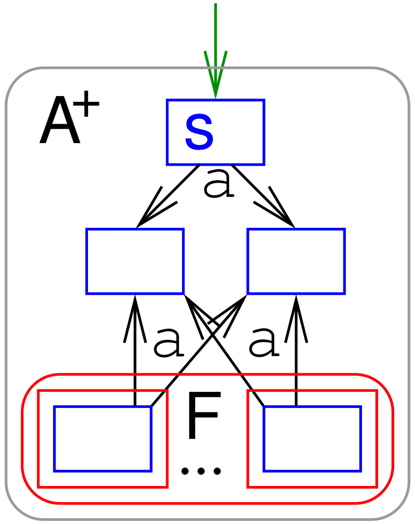
$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ и $L(A) = L$

$A^+ := (Q, \Sigma, \delta^+, s, F), \forall a \in \Sigma :$

$$\delta^+(q,a) := \begin{cases} \delta(q,a) & \text{ако } q \in Q \setminus F \\ \delta(q,a) \cup \delta(s,a) & \text{ако } q \in F \end{cases}$$



Д-во на $L(A^+) \subseteq L^+$



Нека $w \in L(A^+)$ е произволна и $w \neq \varepsilon$

Нека $P = s \overset{a_0}{\Rightarrow} q_0 \overset{*}{\Rightarrow} f$ е приемащ път за w.

Декомпозираме P на преходи от вида $f_j \overset{a_j}{\Rightarrow} q_j$

by $q_j \notin \delta(f_j, a_j)$, $j \in 1..i$, $i \geq 0$.

$\longrightarrow f_j \in F$, $q_j \in \delta(s, a_j)$.

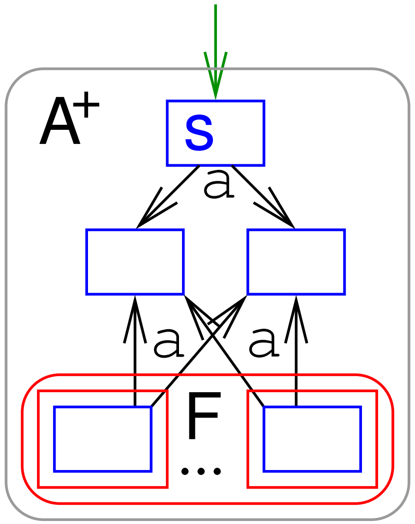
$$P = s \overbrace{\overset{a_0}{\Rightarrow} q_0 \overset{x_0}{\Rightarrow} f_1 \overset{a_1}{\Rightarrow} q_1 \overset{x_1}{\Rightarrow} f_2 \overset{*}{\Rightarrow} f_i \overset{a_i}{\Rightarrow} q_i \overset{x_i}{\Rightarrow}}^{a_0 x_0 a_1 x_1 \cdots a_i x_i = w} f$$

Дефинираме $P_j := s \overset{a_j}{\Rightarrow} q_j \overset{x_j}{\Rightarrow} f_{j+1}$ (с $f_{i+1} := f$).

$\longrightarrow \forall j \in 0..i : P_j$ е един приемащ път A.

$\longrightarrow w \in L^+$ $\square$

Д-во на $L^i \subseteq L(A^+)$ за $i \geq 1$



Нека $w = w_1 \cdots w_i \in L^i$ $(\varepsilon \neq w_i \in L)$.

Да разгледаме $P_j = s \overset{a_j}{\Rightarrow} q_j \overset{x_j}{\Rightarrow} f_j$, $j \in 1..i$, $f_j \in F$,

които свидетелстват за $w_1 \in L, \ldots, w_i \in L$.

$$\longrightarrow P = \overbrace{s \overset{a_1}{\Rightarrow} q_1 \overset{x_1}{\Rightarrow} f_1 \overset{a_2}{\Rightarrow} q_2 \overset{x_2}{\Rightarrow} f_2 \overset{*}{\Rightarrow} f_{i-1} \overset{a_i}{\Rightarrow} q_i \overset{x_i}{\Rightarrow} f_i}^{w}$$

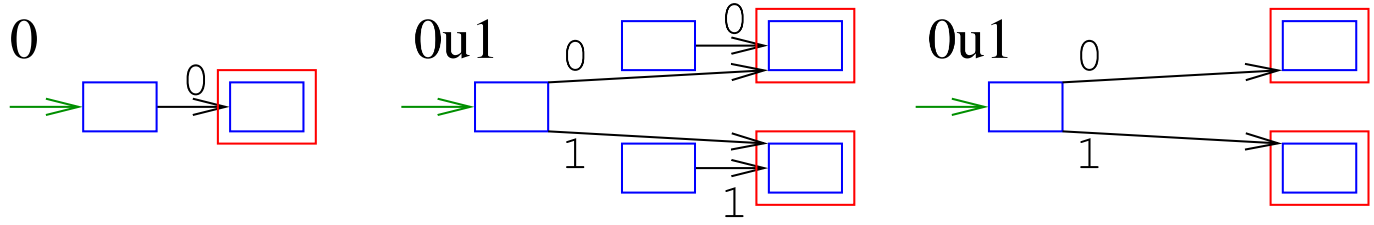
е път в A^+, свидетелстващ за $w \in L(A^+)$.

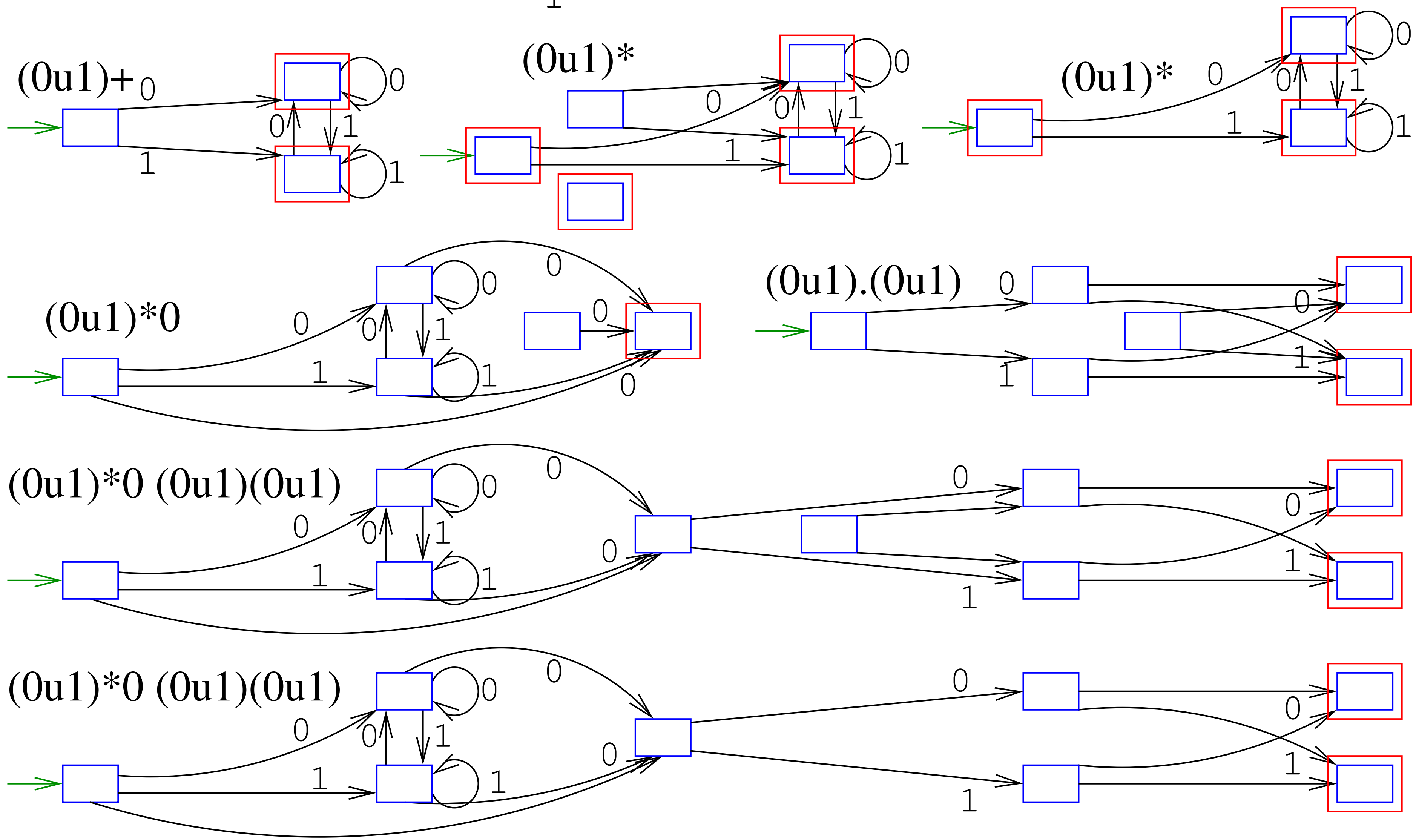
$\longrightarrow w \in L(A^+)$ $\square$

L^* -звезда на Клини

Построяваме автомат за $\varepsilon \cup L^+ = L^*$.

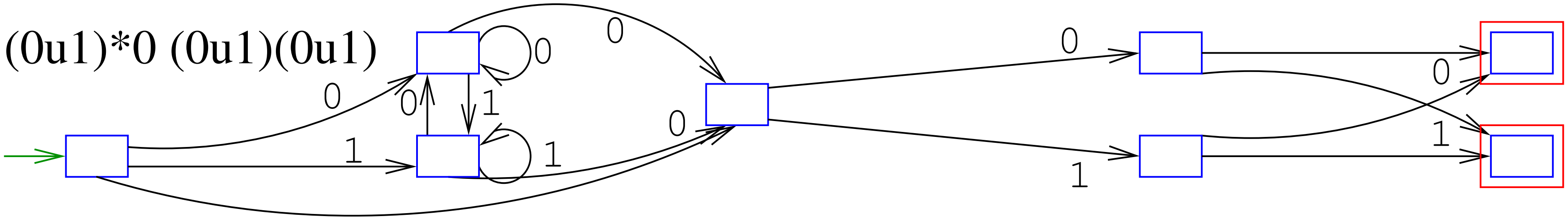
Beispiele



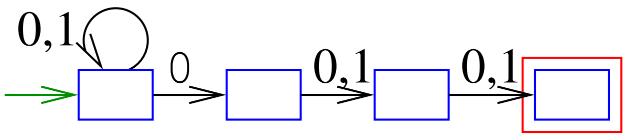


Пример

(0u1)*0 (0u1)(0u1)



(0u1)*0 (0u1)(0u1)



Приложение за търсене в текст

Unix-Tool grep:grep REGULAR-EXPRESSION FILE

- Търсим във всички стрингове във FILE, които са в L(REGULAR-EXPRESSION)
- Много синтаксис: a-g, :alnum:,...
- По-лесно е, ако го транслираме в регулярен израз.
- Бързо приложение - превръщаме в детерминистичен автомат.

Приложение при scanner-(generator), lex, flex

Input: регулярен израз

Output: краен автомат (C code),

Runtime-input: програмата като стрингове

Runtime-output: Програма за token (Пакети) като числа, идентификатори, ключови думи.

- time-critical всеки символ ще се сканира, коментарите се изпускат, десетичните числа се превръщат в двоични ,...
- прави представянето стандартно- премахва шпациите ,...
- опростява по-нататък синтактичния анализ

Други приложения

- Редактори, например emacs
- Script-езици като Perl
- java.util.regex Library
- C++ Boost.Regex Library
- .net framework
- Parsing за xml документи

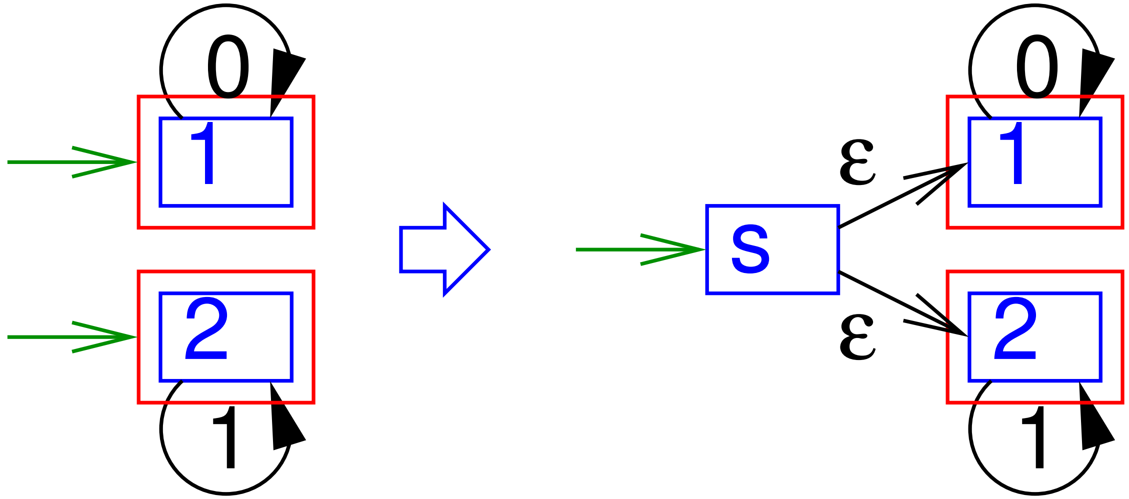
ε-преходи

Разрешени са директни (ε преходи) без да се чете символ.

εNFA

- Q, множество от състояния
- Σ, азбука
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \varepsilon) \rightarrow 2^Q$, функция на прехода
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния

Примери: $0^* \cup 1^*$



RegExp$\rightarrow$ εNEA: $L_1 \cup L_2$

$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$и $L(A_1) = L_1$

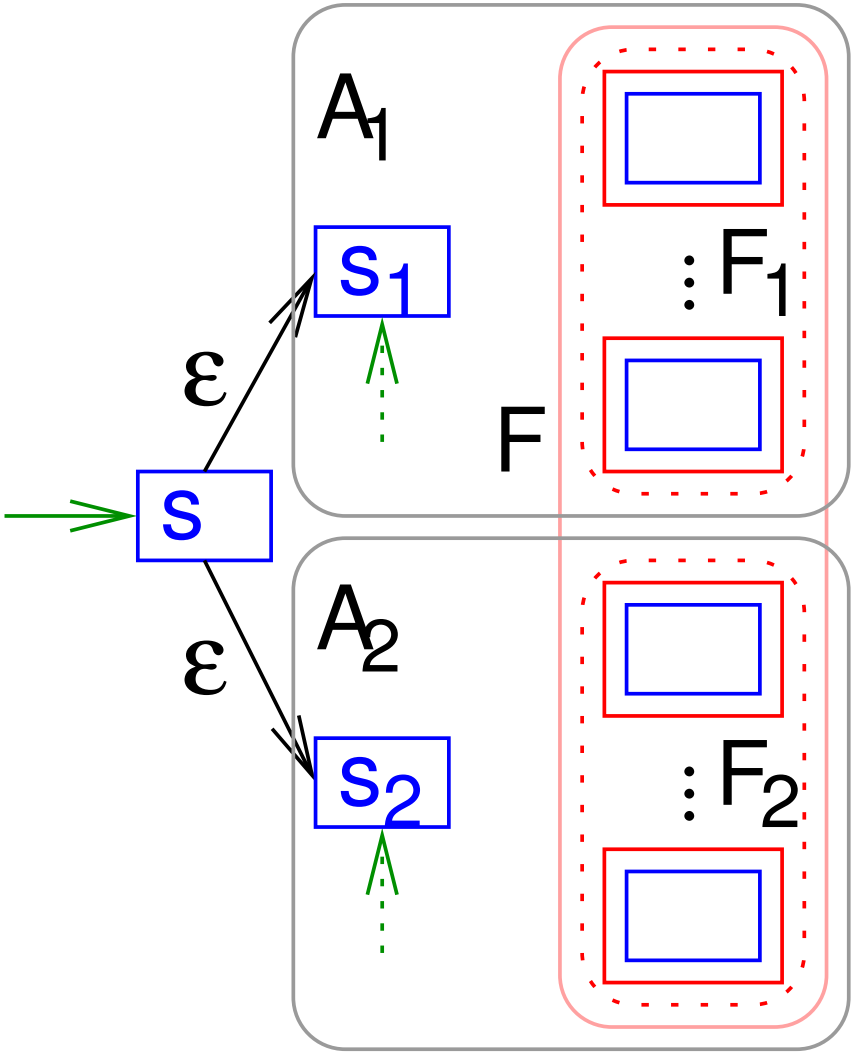
$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$и $L(A_2) = L_2$

и $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$A := (\{s\} \cup Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, s, F_1 \cup F_2)$

δ е дефинирана като $\delta_{1/2}$ on $Q_{1/2}$

ε преходи от s до s_1 и s_2.



$L_1 \cdot L_2$

$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$, където $L(A_1) = L_1$

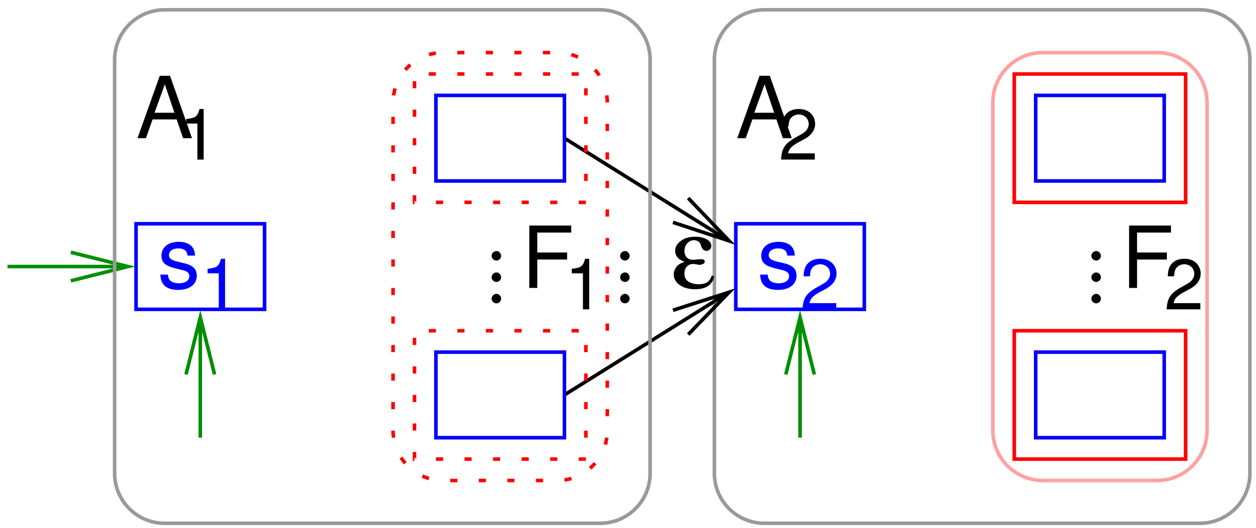
$A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$, където $L(A_2) = L_2$

и $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

$A := (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, s_1, F_2)$

δ е дефинирена като $\delta_{1/2}$ on $Q_{1/2}$

ε преходи от F_1 до s_2.



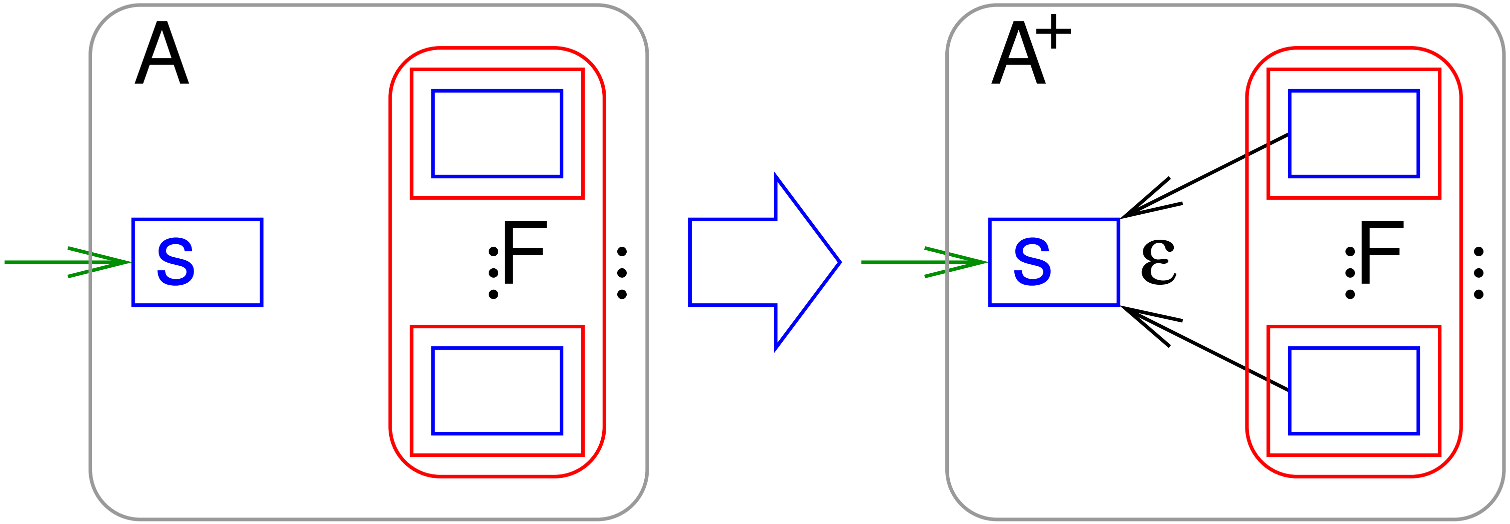
$$L^{+} = \bigcup_{i \geq 1} L^{i}$$

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$и $L(A) = L$

$A^{+} := (Q, \Sigma, \delta^{+}, s, F)$

δ^{+} е дефинирана като δ

ε преходи $f \to s \forall f \in F$.



εNFA $A \rightsquigarrow$NFA $\bar{A}$

Д-во (идея):

Заместваме всеки ε преход и преход към следващ символ в A с директен преход към следващия символ в $\bar{A}$.

Трябва да внимаваме с крайните състояния.

εNFA $A \rightsquigarrow$ NFA $\bar{A}$

Нека $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ е с ε преходи.

$E(M) = \{p \mid \exists (q \in M)((q, \varepsilon) \vdash_A^* (p, \varepsilon))\}$
$\hat{\delta}(M, \varepsilon) = E(M)$
$\hat{\delta}(M, aw) = E(\hat{\delta}(E(\delta(M, a)), w))$

$w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(\{s\}, w) \cap F \neq \emptyset$

Еквивалентен автомат без ε преходи:

$A' = (Q, \Sigma, \delta', s, F')$,
$\delta'(q, a) = \hat{\delta}(\{q\}, a) = \bigcup_{p \in E(\{q\})} E(\delta(p, a))$,

$$F' := \begin{cases} F \cup \{s\} & \text{ако } F \cap E(\{s\}) \neq \emptyset \\ F & \text{иначе} \end{cases}.$$

Теорема на Клини

Теорема Всеки автоматен език е регулярен.

Д-во: Даден: DFA $A = (\{1,\dots,n\}, \Sigma, \delta, s, F)$

Резултат: регулярен израз α такъв, че $L(A) = L(\alpha)$.

За всяко $f \in F$ нека $L_f = \left\{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(s,w) = f \right\}$.

Ще намерим RegExp за L_f. Тъй като $L(A) = \bigcup_{f \in F} L_f$,

теоремата ще е доказана, защото F е крайно.

Даден: DFA $A_f = (\{1,\ldots,n\},\Sigma,\delta,s,\{f\})$

Резултат: регулярен израз α и $L_f = L(A_f) = L(\alpha)$.

Нека $L_{ij} := L((\{1,\ldots,n\},\Sigma,\delta,i,\{j\}))$

В частност $L_{sf} = L_f$.

Ако $i \neq j$: $L^0_{ij} := \{a \in \Sigma : j \in \delta(i,a)\}$

Ако $i = j$: $L^0_{ij} := \{a \in \Sigma : j \in \delta(i,a)\} \cup \{\varepsilon\}$

$L^m_{ij} := \left\{w \in \Sigma^* : \exists \text{работен път } i \stackrel{w}{\Rightarrow} j = iPj \text{ и } P \in \{1,\ldots,m\}^*\right\}$

Тук преход iPj озаначава преход от i до j, с междинни състояния с номера $\leq m$.

Забележете, че $L_{ij} = L^n_{ij}$.

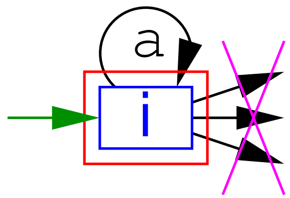
Ще построим реулярен израз за L^m_{ij} индуктивно, използвайки регулярните изрази за по-малките m.

$L_{ij}^{m} := \left\{ w \in \Sigma^* : \exists \text{работен път } i \overset{w}{\Rightarrow} j = iPj \text{ и } P \in \{1,\ldots,m\}^* \right\}$

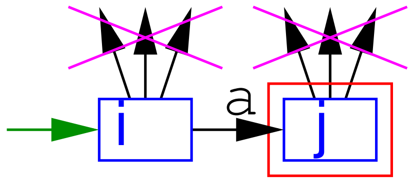
Даден: регулярен израз α_{ij}^{k}, $k < m$ и $L(\alpha_{ij}^{k}) = L_{ij}^{k}$

Резултат: α_{ij}^{m} и $L(\alpha_{ij}^{m}) = L_{ij}^{m}$

Ако $m = 0, i = j$: $\alpha_{ii}^{0} = \bigcup_{a \in \Sigma : \delta(i,a) = i} a \cup \varepsilon$

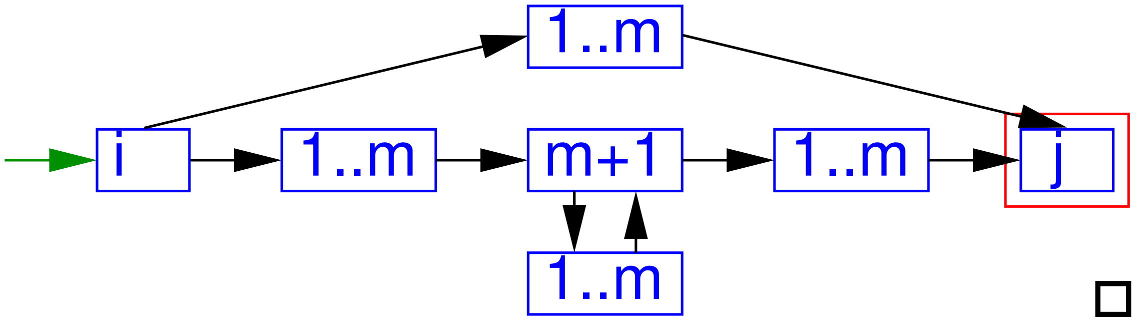


Ако $m = 0, i \neq j$: $\alpha_{ij}^{0} = \bigcup_{a \in \Sigma : \delta(i,a) = j} a$



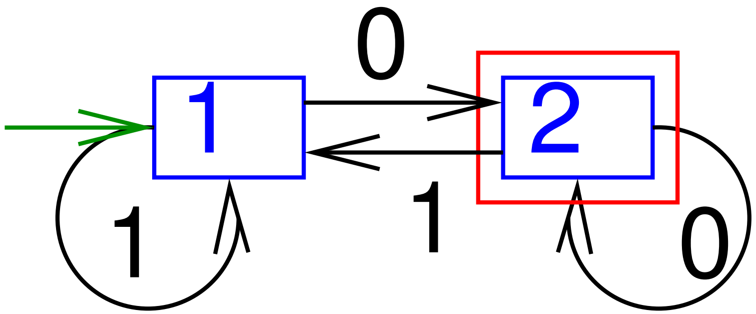
Ако $m \rightsquigarrow m+1$:

$\alpha_{ij}^{m+1} = \alpha_{ij}^{m} \cup \alpha_{i,m+1}^{m} \cdot (\alpha_{m+1,m+1}^{m})^* \cdot \alpha_{m+1,j}^{m}$



□

Пример



$$\alpha^0_{11} = 1 \cup \varepsilon \qquad \alpha^0_{22} = 0 \cup \varepsilon \qquad \alpha^0_{12} = 0 \qquad \alpha^0_{21} = 1$$

$$\begin{aligned} \alpha^1_{12} &= \alpha^0_{12} \cup \alpha^0_{11} \cdot (\alpha^0_{11})^* \cdot \alpha^0_{12} \\ &= 0 \cup (1 \cup \varepsilon) \cdot (1 \cup \varepsilon)^* \cdot 0 \\ &= 1^*0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^1_{22} &= \alpha^0_{22} \cup \alpha^0_{21} \cdot (\alpha^0_{11})^* \cdot \alpha^0_{12} \\ &= 0 \cup \varepsilon \cup 1 \cdot (1 \cup \varepsilon)^* \cdot 0 \\ &= 1^*0 \cup \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2_{12} &= \alpha^1_{12} \cup \alpha^1_{12} \cdot (\alpha^1_{22})^* \cdot \alpha^1_{22} \\ &= 1^*0 \cup 1^*0 \cdot (1^*0 \cup \varepsilon)^* \cdot (1^*0 \cup \varepsilon) \\ &= 1^*0(1^*0)^* \end{aligned}$$

$L(\alpha^2_{12}) = L^2_{12} = L_{12} = L_2$, където $F = \{2\}$.

1.1.4 Pumping лема (лема за покачването)

Ако L регулярен език

$$\longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L : |w| > n$$

$$\longrightarrow \exists u, v, x : w = uvx \wedge$$

1. $|v| \geq 1 \wedge$
2. $|uv| \leq n \wedge$
3. $\forall k \in \mathbb{N}_0 : uv^k x \in L$

С думи:

Достатъчно дългите думи на един регулярен език имат непразна поддума която можем да "pump"ваме (итерираме) без да напускаме езика.

Д-во на Pumping лемата

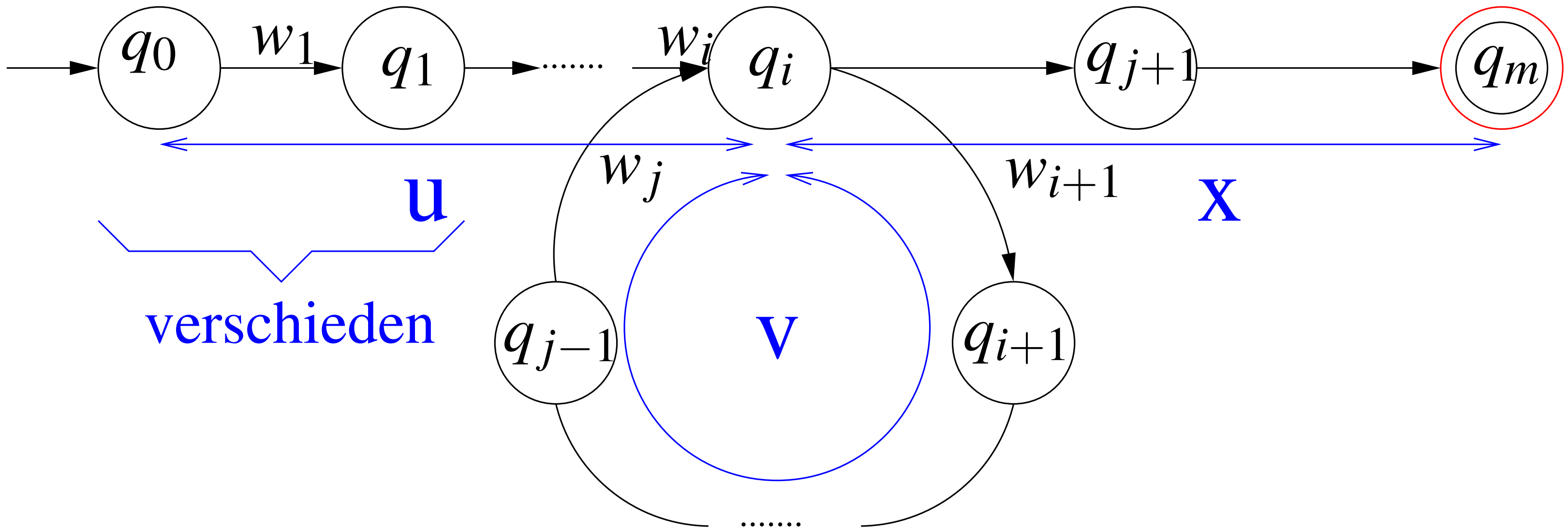
L регулярен $\longrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L : |w| > n \longrightarrow \exists u, v, x :$

$w = uvx \wedge |v| \geq 1 \wedge |uv| \leq n \wedge \forall k \in \mathbb{N}_0 : uv^k x \in L$

Д-во: Нека $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA и $L(A) = L$.

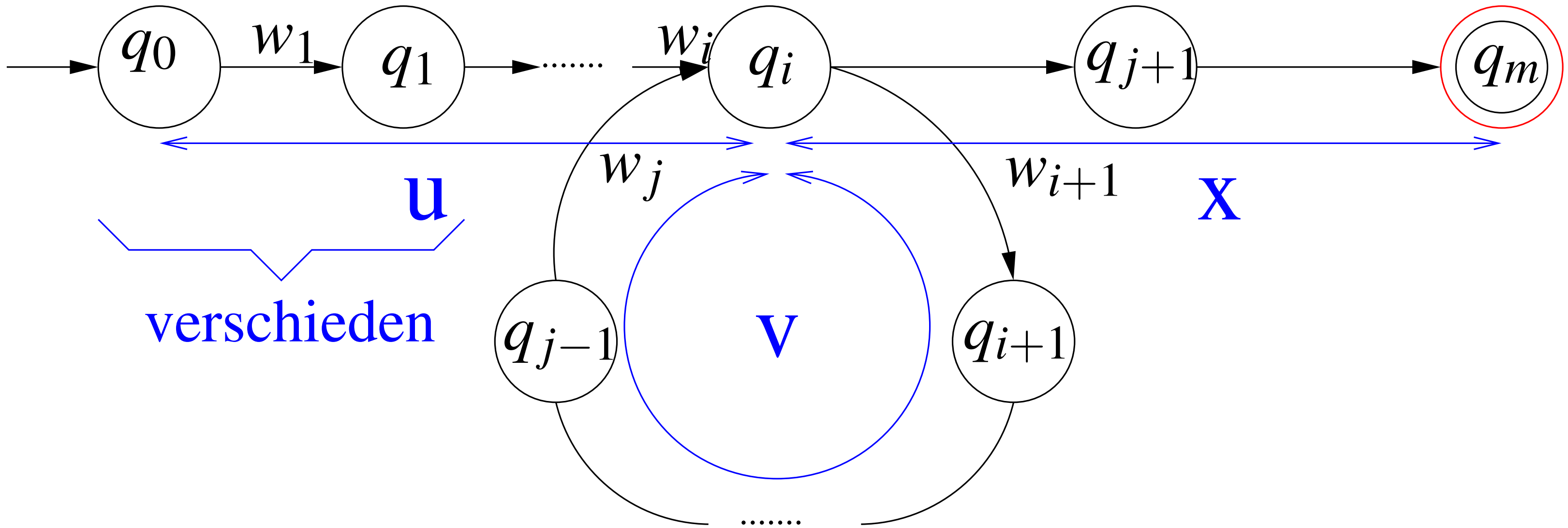
Нека $n = |Q|$ и $w \in L$ с $|w| = m \geq n$ (произволна).

Нека $q_0, \ldots, q_m$ състояния.



$(\exists i < j \leq n : q_i = q_j) \longrightarrow |v| \geq 1,\ |uv| \leq n,\ uv^k x$ са също в езика

Д-во на Pumping лемата



$w = w_1 \dots w_m$; $u = w_1 \dots w_i$; $v = w_{i+1} \dots w_j$; $x = w_{j+1} \dots w_m$

$(q_0, w) \vdash^* (q_i, w_{i+1} \dots w_j \dots w_m) \vdash^* (q_j, w_{j+1} \dots w_m) \Rightarrow$
$(q_0, w_1 \dots w_i) \vdash^* (q_i, \varepsilon)$ & $(q_i, w_{i+1} \dots w_j) \vdash^* (q_j, \varepsilon)$ & $q_i = q_j$
$\Rightarrow (q_0, w_1 \dots w_i w_{j+1} \dots w_m) \vdash^* (q_m, \varepsilon) \Rightarrow (q_0, ux) \vdash^* (q_m, \varepsilon)$
& $(q_0, uv^k x) \vdash^* (q_i, v^k x) \vdash^* (q_j, v^{k-1} x) \vdash^* \dots \vdash^* (q_j, vx) \vdash^*$
$(q_j, x) \vdash^* (q_m, \varepsilon)$.

Пример: $L = \{a^k b^k : k \in \mathbb{N}\}$

Да допуснем, че L е регулярен.

Нека n е числото от Pumping лемата и нека

$w = a^n b^n = uvx$ в съответствие с Pumping лемата, тогава

$ux \in L$.

$|uv| \leq n, |v| \geq 1 \longrightarrow v = a^\ell$ за $\ell \geq 1$.

$ux = a^{n-\ell} b^n \in L$.

Противоречие. $\blacksquare$

Пример: Балансирани скоби $L_{()}$

Да допуснем, че L е регулярен.

Нека n е числото от Pumping лемата за L и да разгледаме $w = (^n)^n = uvx$ съгласно Pumping лемата $ux \in L_{()}$ и $|v| > 1$ и $|uv| \leq n$.

Тогава $v = (^i$, $i \neq 0$

и $ux = (^{n-i})^n \notin L_{()}$ Противоречие.

$L = \{0^p : p \text{ is a prime number}\}$

Да допуснем, че L е регулярен.

Нека n е числото от Pumping лемата за L.

Нека $p \geq n+2$ е просто число.($\exists$ безкрайно много прости числа) $\longrightarrow 0^p \in L = uvw$, $|v| \geq 1$, $|uw| \geq 2$.

Pumping-лема: $uv^{|uw|}w \in L$.

$\longrightarrow |uw| + |uw| \cdot |v| = |uw|(1+|v|)$ е просто число.

Два нетривиални делителя $|uw| \geq 2$ и $(1+|v|) \geq 2$.

Противоречие. $\blacksquare$

$$L = \left\{0^{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Да допуснем, че L е регулярен.

Нека n е числото от Pumping лемата за L.

Нека $\longrightarrow 0^{n^2} \in L = uvw$, $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$.

Pumping-лема: $uv^2w \in L$.

$\longrightarrow n^2 < |uv^2w| \leq n^2 + n < (n+1)^2$.

Противоречие. $\blacksquare$

Pumping-лемата

не е достатъчно условие за регулярност

Пример: $L = \left\{c^m a^\ell b^\ell : m, \ell \geq 0\right\} \cup \{a,b\}^*$ не е регулярен,

но

ако $n \geq 1$ е произволно и $x \in L$ с $|x| \geq n$.

1. $x \in a^* b^*$:

$$x = \underbrace{\varepsilon}_{u} \underbrace{a}_{v} \underbrace{a^m b^{n-m-1}}_{w}$$

1. $|v| = 1 \geq 1$
2. $|uv| = 1 \leq n$
3. $uv^i w = a^i a^m b^{n-m-1} \in a^* b^* \subseteq L$

Pumping-лемата

не е достатъчно условие за регулярност

Пример: $L = \{c^m a^\ell b^\ell : m, \ell \geq 0\} \cup \{a, b\}^*$ не е регулярен,

Нека n е произволно, $w \in L$ произволно с $|w| \geq n$.

1. Ако $w \in a^* b^*$: го видяхме.
2. Ако $w = c^m a^\ell b^\ell$, $m \geq 1$:

Разгледайте $w = \underbrace{\varepsilon}_{u}\underbrace{c}_{v}\underbrace{c^{m-1}a^\ell b^\ell}_{x}$

1. $|v| = 1 \geq 1$
2. $|uv| = 1 \leq n$
3. $uv^i x = c^{m-1+i} a^\ell b^\ell \in L$

1.1.5 Релации на еквивалентност и минимален автомат

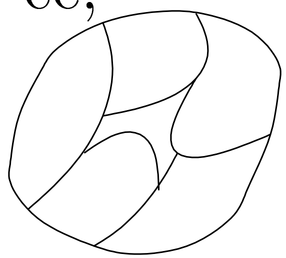
Идея: работим директно с L, без да разглеждаме конкретен автомат.

Припомняне: Релация на еквивалентност

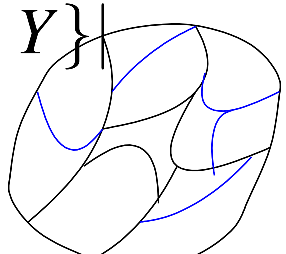
Една релация $R \subseteq Y \times Y$ се нарича релация на еквивалентност, ако R е:

- рефлексивна $\forall x : xRx$
- транзитивна $\forall xyz : xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz$
- симетрична. $\forall xy : xRy \longrightarrow yRx$

Клас на еквивалентност: $[x] = \{y : xRy\}$. Класовете на еквивалентност са непразни и непресичащи се, т.е. всеки елемент на Y принадлежи точно на един клас на еквививалентност



Индекс: индекс$|R| := |$Клас на еквив.$| = |\{[x] : x \in Y\}|$

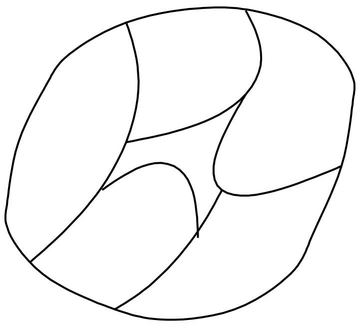


Прецизиране: R прецизира R' ($R \subseteq R'$)

Лема: R прецизира $R' \longrightarrow \forall$ класове на еквивалентност $[x]_R : [x]_R \subseteq [x]_{R'}$

Д-во:

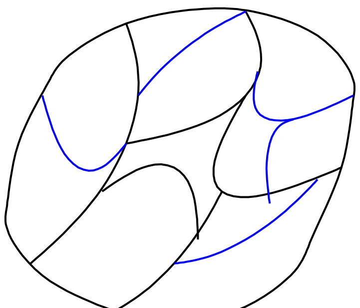
$$y \in [x]_R \Leftrightarrow (y,x) \in R$$
$$\xrightarrow{R \subseteq R'} (y,x) \in R'$$
$$\Leftrightarrow y \in [x]_{R'}$$



Следствие: R прецизира $R' \longrightarrow |R| \geq |R'|$

Д-во: Разгледайте $\rho([x]_R) = [x]_{R'}$.

Проверете, че е добре дефинирана функция, която е върху (сюрективна).



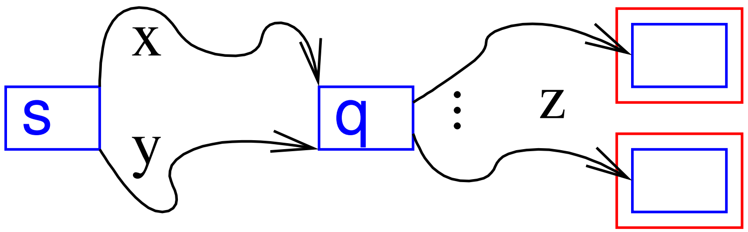
Релация на Нероуд

За езика L релацията на Нероуд е дефинирана като

$$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$$

Идея: класовете на еквивалентност съответстват на състоянията.

Защо?



DFA пораждат релация на еквивалентност

Нека $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ е DFA и $L(M) = L$.

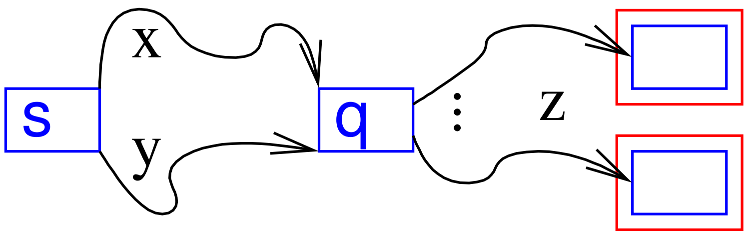
$R_M := \left\{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y)\right\}$.

релация на еквивалентност! по един клас на еквивалентност (за достижимо от s) състояние.

Лема 1: R_M прецизира релацията на Нероуд $R_L =$

$$\{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$$

Д-во : $\forall (x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \hat{\delta}(s,x) = \hat{\delta}(s,y) \longrightarrow$
$\forall z : \hat{\delta}(s,xz) = \hat{\delta}(s,yz) \longrightarrow \forall z : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$



Безкраен индекс на релацията на Нероуд

Наблюдение: индексът $|R_L| = \infty \longrightarrow L$ не е регулярен.

Д-во: Да допуснем, че L е регулярен.
$\longrightarrow \exists$ DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F) : L(M) = L$.
$\longrightarrow R_M$ прецизира R_L.
$\longrightarrow |Q| \geq |R_M| \geq |R_L| = \infty$.
Противоречие.

Следователно: Ако L е регулярен, то индексът $|R_L| < \infty$.

Автомат от класовете на еквивалентност

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

Идея: когато класовете на еквивалентност $[w_1], \ldots, [w_k]$ на R_L съответстват на състоянията на един DFA $M_\equiv$, тогава по лемата по-долу минималният автомат за L е:

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$ с
$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и
$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $\delta_\equiv$ е добре дефинирана
Лема: $\hat{\delta}_\equiv([\varepsilon], w) = [w]$
Лема: $L(M_\equiv) = L$

Минимален автомат

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$, където

$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и

$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $\delta_\equiv$ е добре дефинирана

$xR_Ly \longrightarrow \forall a \in \Sigma : xaR_Lya$ дясно инвариантна

$xR_Ly \longrightarrow \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$

$\longrightarrow \forall az \in \Sigma^* : x(az) \in L \Leftrightarrow y(az) \in L$

$\Leftrightarrow \forall a \in \Sigma : \forall z \in \Sigma^* : (xa)z \in L \Leftrightarrow (ya)z \in L$

$\longrightarrow \forall a \in \Sigma : xaR_Lya$ $\square$

Минимален автомат

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$, където

$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и

$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $\hat{\delta}_\equiv([x], y) = [xy]$

Индукция по $|y|$:

$\hat{\delta}_\equiv([x], \varepsilon) = [x]$.

$\hat{\delta}_\equiv([x], aw) \overset{\text{деф.}\hat{\delta}_\equiv}{=} \hat{\delta}_\equiv(\delta_\equiv([x], a), w) \overset{\text{деф.}\delta_\equiv}{=} \hat{\delta}_\equiv([xa], w) =$
$[xaw]$. $\square$

Минималният автомат: разпознава L

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$ с

$F_\equiv := \{[w] : w \in L\}$ и

$\delta_\equiv([w], a) := [wa]$.

Лема: $L(M_\equiv) = L$.

$w \in L(M_\equiv)$

$\Leftrightarrow \hat{\delta}_\equiv([\varepsilon], w) \in \{[w] : w \in L\}$ деф. $M_\equiv$

$\Leftrightarrow [w] \in \{[w] : w \in L\}$ предишната лема

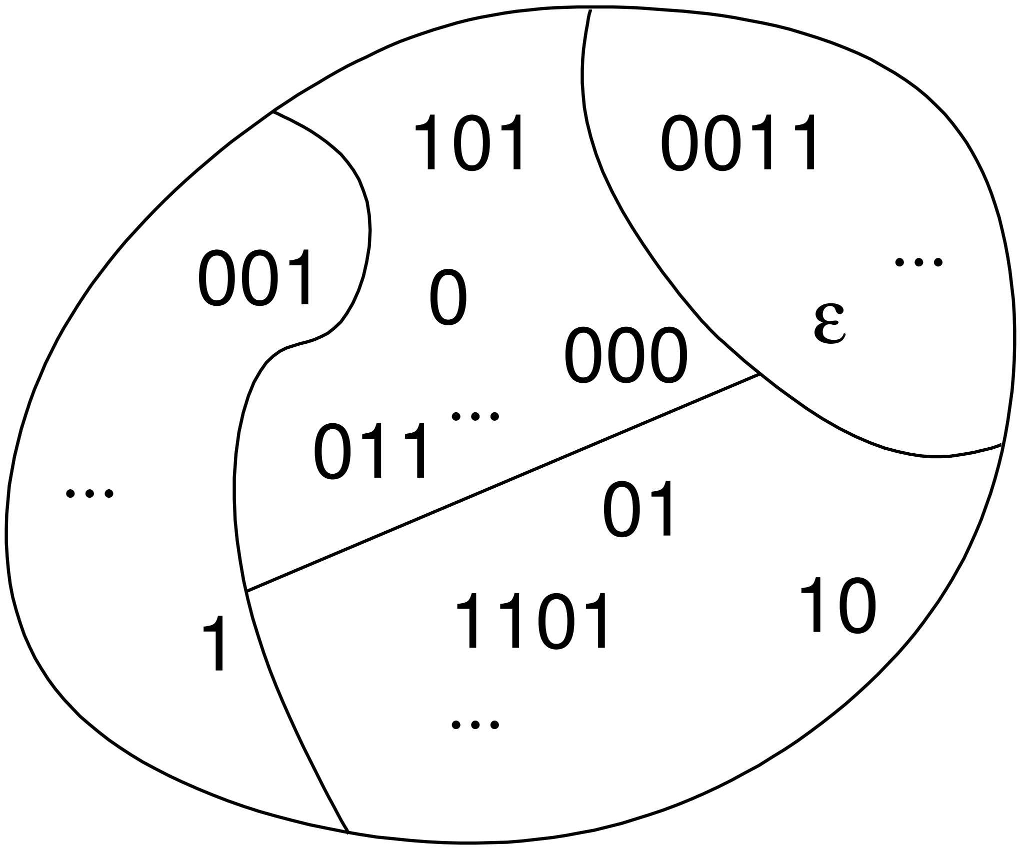
$\Leftrightarrow w \in L$ кл. на еквив. са или изцяло в, или извън L

$([w] \in \{[w] : w \in L\} \longrightarrow \exists x \in L : [x] = [w] \longrightarrow xR_Ly \longrightarrow$

$\forall z : xz \in L \Leftrightarrow wz \in L \longrightarrow x\varepsilon \in L \Leftrightarrow w\varepsilon \in L)$

Пример

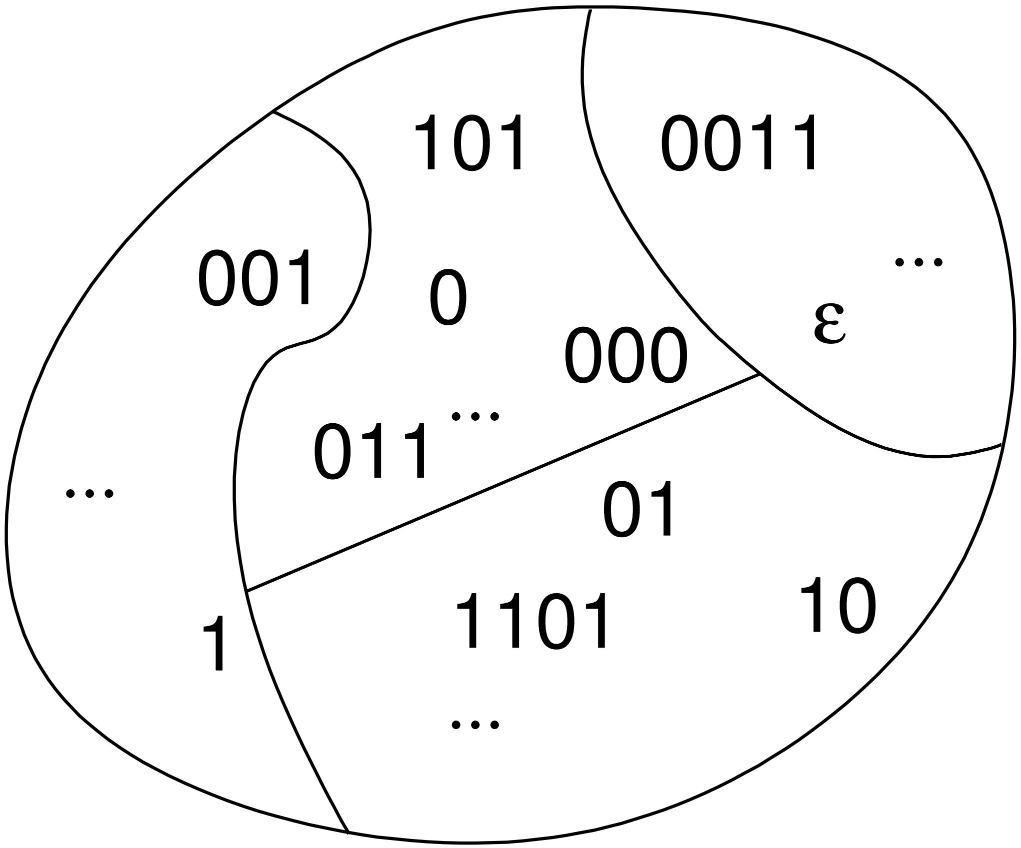
$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с четен брой единици и четен брой нули



Класовете на еквивалентност?

Пример

$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с четен брой единици и четен брой нули

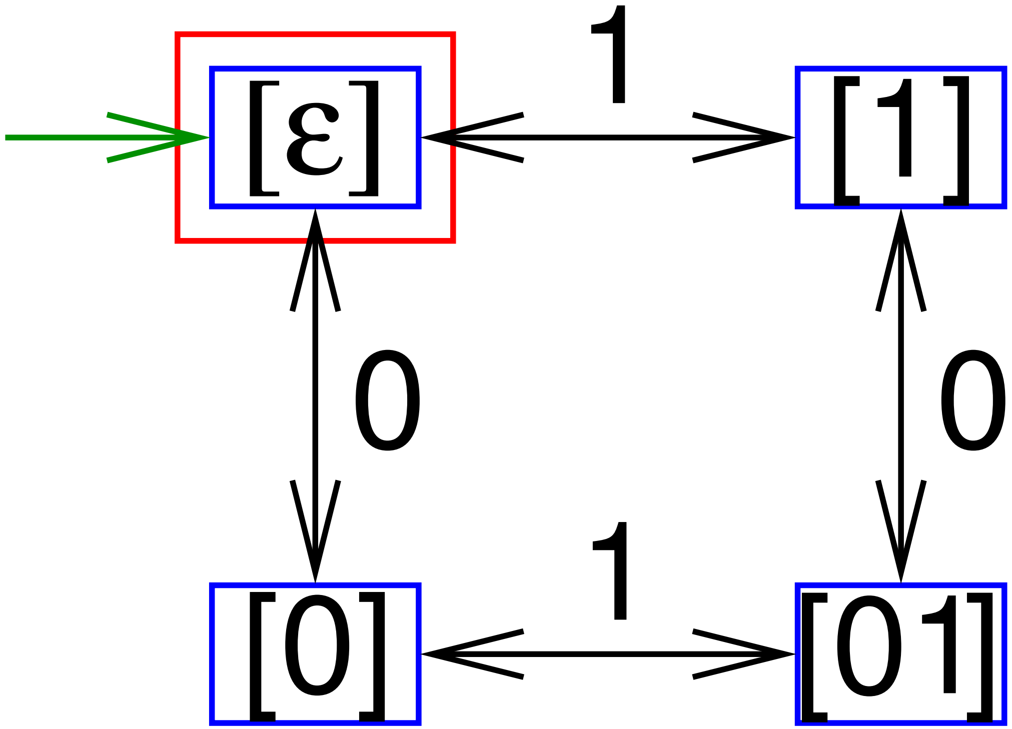


Класовете на еквивалентност:

$[\varepsilon], [0], [1], [01]$

Пример

$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с четен брой единици и четен брой нули



Теорема на Майхил-Нероуд

Нека

$R_L := \{(x,y) \in \Sigma^* \times \Sigma^* : \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\}$.

L не е регулярен $\longrightarrow |R_L| = \infty$

Теорема на Майхил-Нероуд: L регулярен $\iff |R_L| < \infty$.

Нека $|R_L| = k < \infty$

$M_\equiv := (\{[w_1], \ldots, [w_k]\}, \Sigma, \delta_\equiv, [\varepsilon], F_\equiv)$

Тогава $L(M_\equiv) = L$

Ако L е реулярен и $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ произволен DFA с $L(M) = L$, то R_M прецизира R_L. Следователно $|R_L| \leq |Q|$, т.е. $M_\equiv$ е минимален автомат (с най-малък брой състояния), разпознаващ L.

Един автомат се нарича свързан, ако всяко състояние е достижимо от началното.

Следствие: Всички минимални автомати за L са изоморфни на $M_{\equiv}$.

Д-во: Нека $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ е свързан DFA, $L(M) = L$ и $|Q| = |R_L|$. Ще покажем, че $M \cong M_{\equiv}$, т.е. M е изоморфен на $M_{\equiv}$.

За всяко $q \in Q$ има дума w, такава че $\hat{\delta}(s, w) = q$.

Дефинираме $\kappa(q) = [w]$.

- деф на κ е коректна
  т.е. $\hat{\delta}(s, w_1) = \hat{\delta}(s, w) \longrightarrow w_1 R_L w \longrightarrow [w_1] = [w]$.
  $w_1 z \in L \iff \hat{\delta}(s, w_1 z) \in F \iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w_1), z) \in F \iff \hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w), z) \in F \iff \hat{\delta}(s, wz) \in F \iff wz \in L$

- κ е биекция

  (еднозначна) Нека $q \neq q_1$ и $\hat{\delta}(s, w_1) = q_1$.

  Допускаме, че

  $\kappa(q) = \kappa(q_1) \longrightarrow [w] = [w_1]$ & $w \neg R_M w_1 \longrightarrow |R_M| > |R_L|$.

  Противоречие.

  (върху) $\forall w(q = \hat{\delta}(s, w) \longrightarrow \kappa(q) = [w])$.

- $\kappa(s) = [\varepsilon]$ $(\hat{\delta}(s, \varepsilon) = s)$

- $\kappa(\delta(q, a)) = \delta_{\equiv}(\kappa(q), a)$

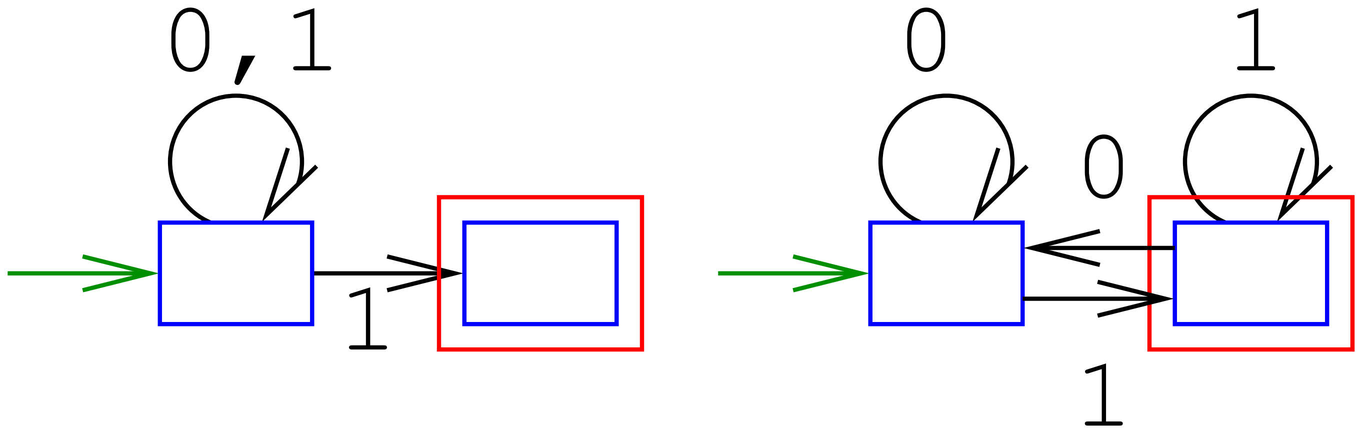
  $q = \hat{\delta}(s, w) \longrightarrow \delta(q, a) = \hat{\delta}(s, wa) \longrightarrow \kappa(\delta(q, a)) =$

  $[wa] = \delta_{\equiv}([w], a) = \delta_{\equiv}(\kappa(q), a)$

- $f \in F \iff \kappa(f) \in F_{\equiv}$.

Един контрапример NFA

Има структурно различни минимални NFAs за $(0 \cup 1)^*1$.



Упражнение: Напишете функцията на прехода.

Конструкция

на минималния автомат

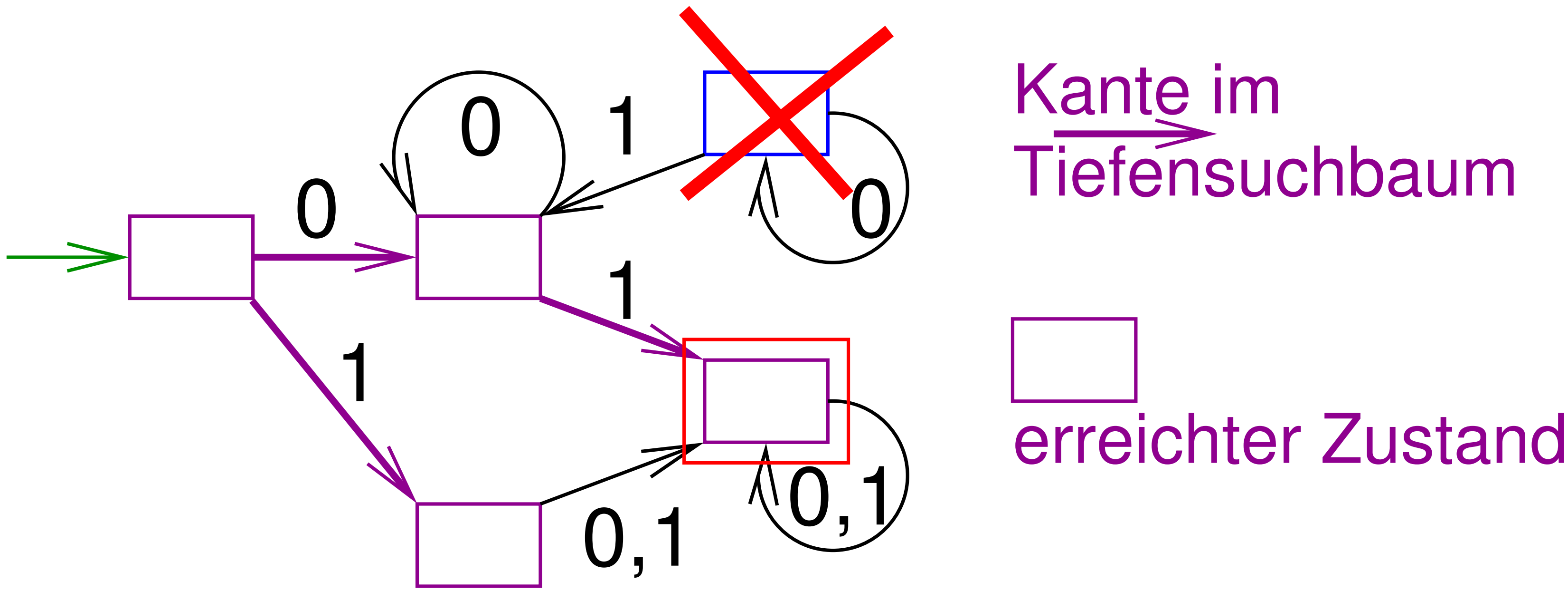
Махаме състоянията, недостижими от s.

Алгоритъм: Търсене в дълбочина в графа G_A за s.

Маркираме всички достижими състояния.

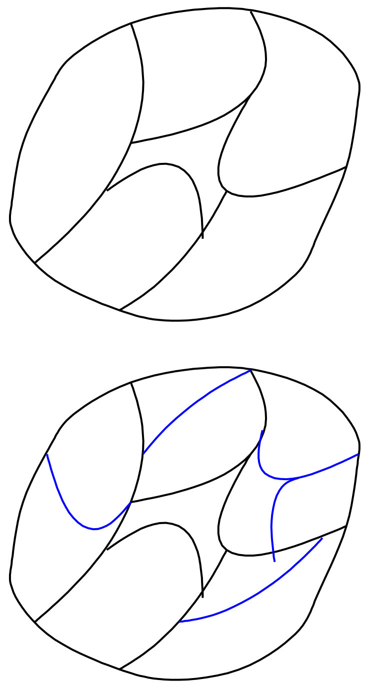
Махаме недостижимите състояния.

Изпълнение — Примери



Еквивалентни състояния

Идея: разгледайте DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$
(без недостижими състояния)
M не е минимален $\longrightarrow$
R_M прецизира $R_L \longrightarrow \exists q \neq r \in Q$:
$[w]_M \dot{\cup} [w']_M \subseteq K$, $\hat{\delta}(s, w) = q$, $\hat{\delta}(s, w') = r$
за някой клас на екв. K за R_L
q, r се наричат еквивалентни ($q \equiv r$),
т.е.:
$q \equiv r \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r, w) \in F$



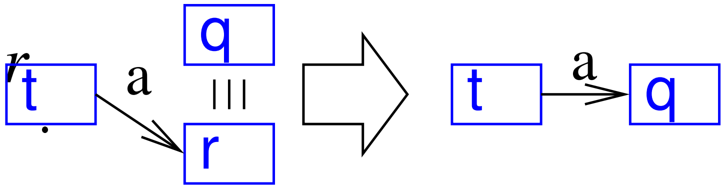
Махане на еквивалентните състояния

Да разгледаме $q \neq r \in Q : q \equiv r$ и $r \not\equiv s$

Махаме r:

$M' := (Q \setminus \{r\}, \Sigma, \delta', s, F \setminus \{r\})$ където

$$\delta'(t,a) := \begin{cases} q & \text{ако } \delta(t,a) = r. \\ \delta(t,a) & \text{иначе} \end{cases}$$



Лема: $L(M') = L$

Д-во:Упражнение

Минимизация на състоянията

Първа стъпка:

Function minDFA(M)

    махаме състоянията недостижими от s

    while $\exists q, r \in Q : q \equiv r \land q \neq r \land r \neq s$ do

        махаме r от M

    return M

Проблем: Как да намерим еквиваленнните състояния?

$q \equiv r$ iff $\forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q, z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r, z) \in F$

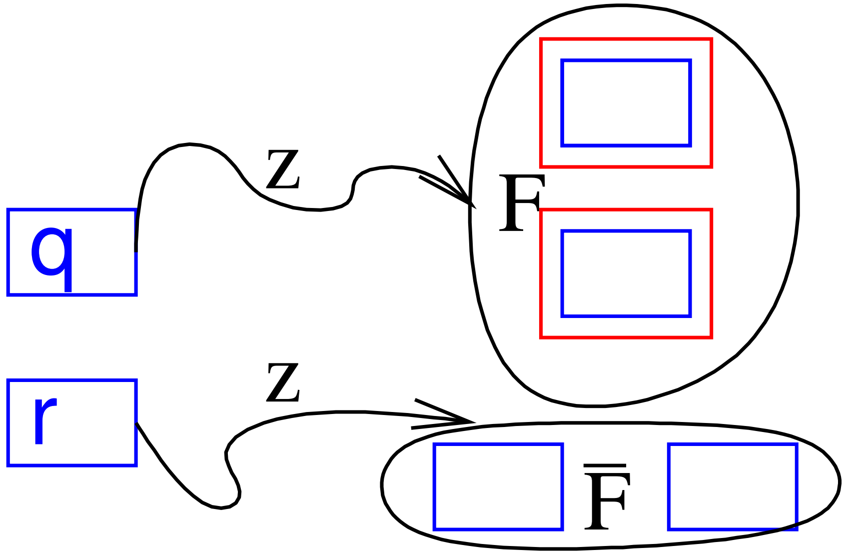
Кванторът е по не крайно множество!

Нееквивалентни състояния

$q \equiv r$ iff $\forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

$q \not\equiv r$ iff $\exists z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \not\Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

z е свидетел за нееквивалентност.



Проблем: да се намерят свидетели за нееквивалентност

Най-къси свидетели за нееквивалентност

$\forall q \in F, r \notin F : \varepsilon$ е свидетел за $q \not\equiv r$.

Нека $w = aw'$ е най-къс свидетел за $q \not\equiv r$.

Наблюдение: w' е свидетел за $q' := \delta(q,a) \not\equiv \delta(r,a) =: r'$

Лема: w' е най-къс свидетел за $q' \not\equiv r'$

Доказателство с допускане на противното: Да допуснем:

w'' е по-къс свидетел за $q' \not\equiv r'$

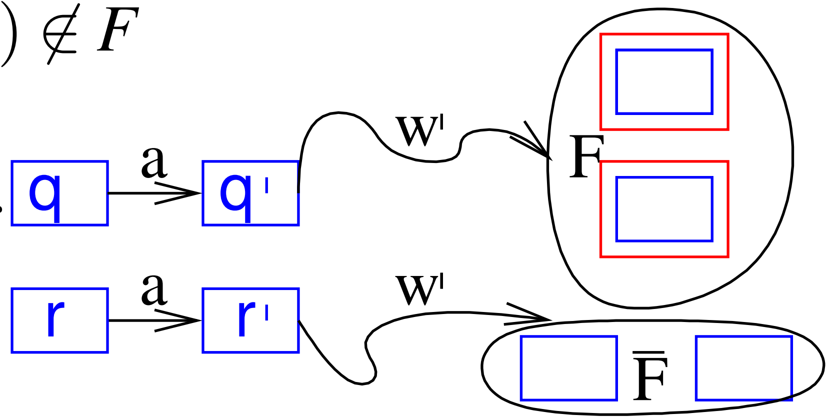
$\longrightarrow \hat{\delta}(q', w'') \in F \wedge \hat{\delta}(r', w'') \notin F$ БОО

$\longrightarrow \hat{\delta}(\delta(q,a), w'') \in F \wedge \hat{\delta}(\delta(r,a), w'') \notin F$

$\longrightarrow \hat{\delta}(q, aw'') \in F \wedge \hat{\delta}(r, aw'') \notin F$

$\longrightarrow aw''$ е по-къс свидетел за $q \not\equiv r$

Противоречие.



Най-къси свидетели за нееквивалентност

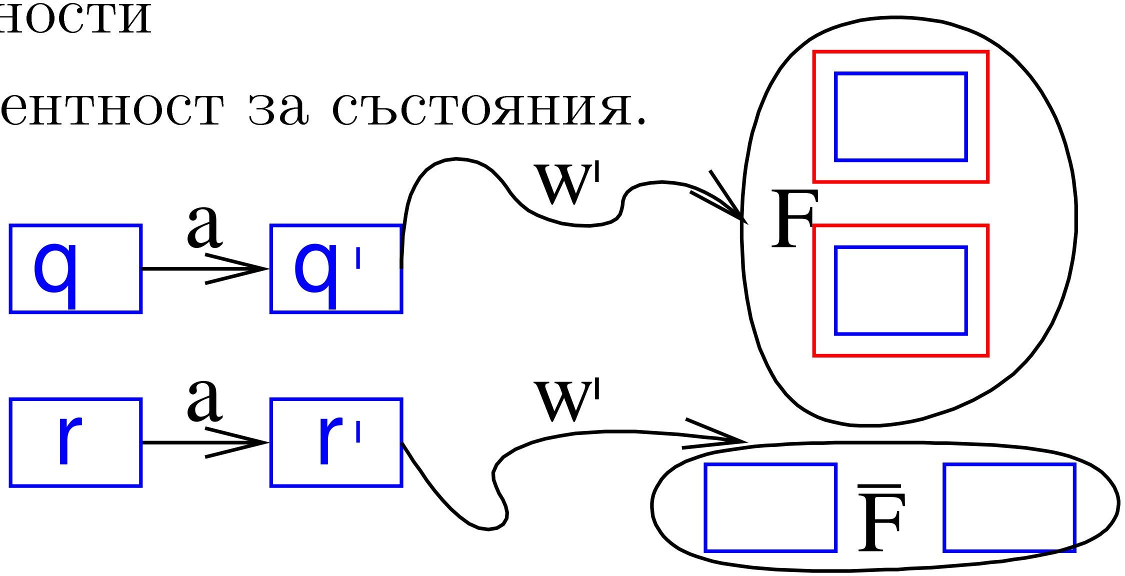
ε свидетелства $q \not\equiv r$, ако $q \in F, r \notin F$ или $r \in F, q \notin F$.

Ако $w = aw'$ е най-къс свидетел за $q \not\equiv r$, то
w' е най-къс свидетел за $q' := \delta(q,a) \not\equiv \delta(r,a) =: r'$

Обратно: ако $q' \not\equiv r'$ и
$\exists a \in \Sigma(q' := \delta(q,a)$ & $\delta(r,a) = r')$, то $q \not\equiv r$

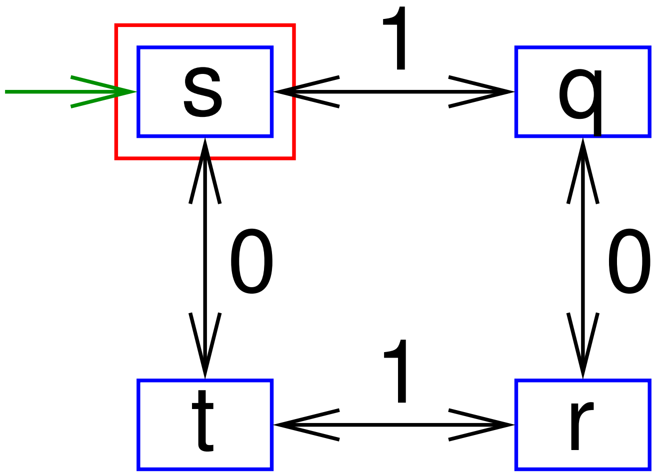
$\rightsquigarrow$ всички нееквивалентности

$\rightsquigarrow$ класовете на еквивалентност за състояния.



Пример

$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с четен брой нули и
четен брой нули



$0 = 0\varepsilon$ е най-къс свидетел
за $t \not\equiv r$.

$\rightsquigarrow \varepsilon$ е най-късият свидетел
за $s = \delta(t,0) \not\equiv \delta(r,0) = q$.

Тест с една буква

Нека N_k е множеството от всички нееквивалентни двойки от състояния със свидетелите с дължина $\leq k$.

$N_0 = \{\{q,r\} : q \in F \not\Leftrightarrow r \in F\}$

$N_{k+1} = \{\{q,r\} : \exists a \in \Sigma(\{\delta(q,a),\delta(r,a)\} \in N_k)\} \cup N_k$

Нека r е първото, за което $N_r = N_{r+1}$. Тогава:

Лема: $\{q,r\} \in N_r \Longleftrightarrow q \not\equiv r$.

$\Longrightarrow$ $\{q,r\} \in N_k$ за първи път. Индукция по k:
$k = 0$. $q \not\equiv r$.
$k > 0$. $\{\delta(q,a),\delta(r,a)\} \in N_{k-1} \longrightarrow \delta(q,a) \not\equiv \delta(r,a) \longrightarrow q \not\equiv r$
$\Longleftarrow$ Предишната лема и индукционната хипотеза.

Нека $E = Q \times Q \setminus N_r$ - всички двойки еквив. състояния.

Един лесен алгоритъм

$N := \emptyset$ // маркирани двойки

$N' := \{\{q, r\} \subseteq Q : q \in F \not\Leftrightarrow r \in F\}$ // следващите маркирани двойки

while $N' \neq \emptyset$ do

$\quad N := N \cup N'$

$\quad N' := \{\{q, r\} \subseteq Q : \exists a \in \Sigma : \{\delta(q, a), \delta(r, a)\} \in N\} \setminus N$

Общо време: $\mathcal{O}\left(|\Sigma| \cdot |Q|^3\right)$

Инициализация: $\mathcal{O}\left(|Q|^2\right)$

Време за цикъла: $\mathcal{O}\left(|\Sigma| \cdot |Q|^2\right)$

Колко цикъла? Сигурно $\leq |Q|^2$.

По-точно наблюдение: $\leq |Q|$ цикли

Минимален автомат

$q \equiv r \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

релация на еививалентност

Нека $[q]$ е класът на еквивалентност съдържащ q.

$M' := (Q', \Sigma, \delta', [s], F')$, където

$Q' =: \{[q] : q \in Q\}$

$F' := \{[q] : [q] \cap F \neq \emptyset\}$ и

$\delta'([q], a) := [\delta(q,a)]$.

Лема 1: δ' е добре дефинирана

Лема 2: $\hat{\delta}'([s], w) = [\hat{\delta}(s,w)]$, следователно $L(M') = L(M)$

Лема 3: M' е с минимален брой състояния.

Минимален автомат

$q \equiv r \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q,z) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(r,z) \in F$

Лема 1: δ' е добре дефинирана т.е.

ако $q \equiv p \longrightarrow \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \equiv \delta(p,a)$

Ако $\exists a \in \Sigma : \delta(q,a) \not\equiv \delta(p,a)$, то $q \not\equiv p$. $\square$

Лема 2.: $\hat{\delta}'([q],w) = [\hat{\delta}(q,w)]$, $q \in Q, w \in \Sigma^*$.

Индукция по $|w|$:

$\hat{\delta}'([q],\varepsilon) = [q] = [\hat{\delta}(q,\varepsilon)]$.

$\hat{\delta}'([q],aw) \overset{\text{деф.}\hat{\delta}'}{=} \hat{\delta}'(\delta'([q],a),w) \overset{\text{деф.}\delta'}{=} \hat{\delta}'([\delta(q,a)],w) \overset{\text{ИП}}{=}$
$[\hat{\delta}(\delta(q,a),w)] = [\hat{\delta}(q,aw)]$. $\square$

Следствие: $w \in L(M') \Leftrightarrow w \in L(M)$

$w \in L(M') \longrightarrow \hat{\delta}'([s], w) \in F' \longrightarrow$

$[\hat{\delta}(s, w)] \in F' \longrightarrow$ Лема 2

$\hat{\delta}(s, w) \equiv f \;\&\; f \in F \longrightarrow$ деф на F'

$\hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w), \varepsilon) \in F \longrightarrow$ деф на $\equiv$

$\hat{\delta}(s, w) \in F \longrightarrow w \in L(M)$.

$w \in L(M) \longrightarrow \hat{\delta}(s, w) \in F \longrightarrow$

$[\hat{\delta}(s, w)] \in F' \longrightarrow$ деф на F'

$\hat{\delta}'([s], w) \in F' \longrightarrow w \in L(M')$. Лема 2

$\square$

Така $L(M') = L(M)$.

Лема 3: M' е с минимален брой състояния.

M' е свързан (без недостижими състояния от s) и детерминиран автомат:
$\forall q \in Q \exists w \in \Sigma^*(\hat{\delta}(s,w) = q \longrightarrow \hat{\delta}'([s],w) = [q])$ по Лема 2.

Нека $L = L(M)$. Знаем, че $R_{M'}$ прецизира R_L.
Следовтелно $|R_{M'}| \geq |R_L|$.
Ще покажем, че R_L прецизира $R_{M'}$ т.е. $|R_{M'}| \leq |R_L|$.

Нека uR_Lv, $u,v \in \Sigma^*$. Да допуснем, че $u \neg R_{M'} v$.
$\hat{\delta}'([s],u) \neq \hat{\delta}'([s],v) \longrightarrow [\hat{\delta}(s,u)] \neq [\hat{\delta}(s,v)]$ (по Лема 2) $\longrightarrow$
$\hat{\delta}(s,u) \not\equiv \hat{\delta}(s,v)$
Тогава съществува дума w, такава че:
$\hat{\delta}(s,uw) \in F \not\Leftrightarrow \hat{\delta}(s,vw) \in F \longrightarrow$
$uw \in L \not\Leftrightarrow vw \in L$. Противоречие. $\square$

Минимизация на състоянията за време $\mathscr{O}(|\Sigma| \cdot |Q| \log |Q|)$

[Hopcroft 1971]. Data structures.

Леко опростяване :

[Blum, Minimization of finite automata in $O(n \log n)$ time, Inf. Proc. Hекaters, 1996.]

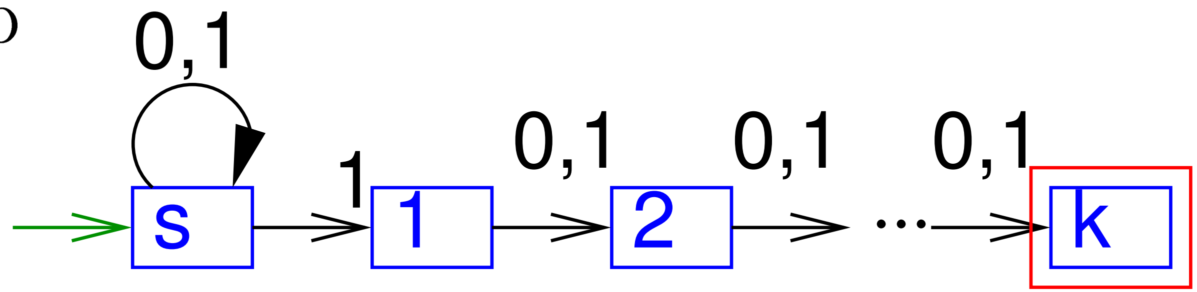
Защо минимизация на състоянията

- минимално място за таблицата на преходите между състояния
- минимален автомат очевидно $\rightsquigarrow$ ние научаваме нещо за самия език.

Но, когато δ е представена като списък от преходи или програма, искаме да оптимизираме дължината ѝ и времето за изпълнение.

Изобщо $\rightsquigarrow$ активна научна област.

Пример

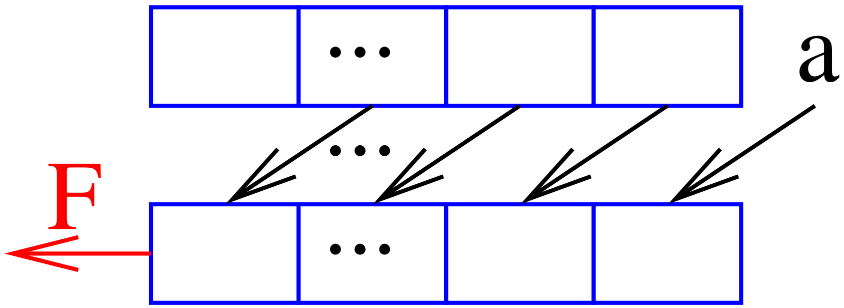


$L = \{0,1\}^* 1 \{0,1\}^{k-1}$

Минималният автомат има 2^k състояния.

$(\{0,\ldots,2^k-1\},\{0,1\},\delta,0,F)$

$\delta(q,a) = 2q + a,\ q \in F \Leftrightarrow q[k-1] = 1$



Верификация за нерегулярност

- Pumping Лема:

  +: Лесно се прилага

  −: Само необходимо условие

- Релацията на Нероуд

  +: Необходимо и достатъчно условие $(R_L) = \infty$

  −: Малко трудно се проверява

Релация на Нероуд

Пример: $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$

Твърдение: $\forall k > 1, j \neq k > 1 : [a^k b] \neq [a^j b]$

$[a^k b] = \{a^k b, a^{k+1} bb, \ldots\} = \{a^{k+i} b^{i+1}\}$

така винаги $k-1$ повече a-та от b-та.

Следователно $[a^k b]$ и $[a^j b]$ са непресичащи. $\square$

Релация на Нероуд

Пример: $L = \{c^m a^\ell b^\ell : m, \ell \geq 0\} \cup \{a,b\}^*$

Твърдение: $\forall k > 1, j \neq k > 1 : [ca^k b] \neq [ca^j b]$

$[ca^k b] = \{c^m a^{k+i} b^{1+i} : m \geq 0, i \geq 1\}$

така винаги $k-1$ повече a-та от b-та.

Следователно $[ca^k b]$ и $[ca^j b]$ са непресичащи се. $\square$

1.1.6 Свойства на затвореност

Нека L, L' са регулярни езици.

Тогава и следните езици са регулярни:

$L \cup L'$, L^*, $L \cdot L'$: по дефиниция на рег. израз.

$\bar{L} := \Sigma^* \setminus L$: Да разгледаме DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ с

$L(A) = L$.

Нека $\bar{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, Q \setminus F)$. Тогава $L(\bar{A}) = \bar{L}$.

$L \cap L' = \overline{\bar{L} \cup \bar{L}'}$ (Де Морган)

$L \setminus L' = L \cap \bar{L}'$

L^R: Упражнение. Упътване: Индукция по регулярен израз.

(Product автомат)

Конструкции на DFA за теоретико-мнжествените операции

L и L' са регулярни езици, дефинирани с DFAs
$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$,
$A' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$.
Идея: Автоматът $A_\times$ симулира поведението на A и A'.
Product автомат: $A_\times := (Q \times Q', \Sigma, \delta_\times, (s, s'), F_\times)$ с
$\delta_\times((q, q'), a) = (\delta(q, a), \delta(q', a))$
Дефинираме F в съответствие с операциите:

$L \cup L'$: $F_\times := Q \times F' \cup F \times Q'$

$L \cap L'$ $F_\times := F \times F'$

1.1.7 Разрешимост на прости свойства на един краен автомат

Word problem

$w \in L$?

Изброждаме DFA A.

Симулираме A с вход w.

Дали има крайно състояние, което е достижимо?

Линейно време, ако DFA ако е даден автоматът!

Проблемът за празнотата на езика

$L = \emptyset$?

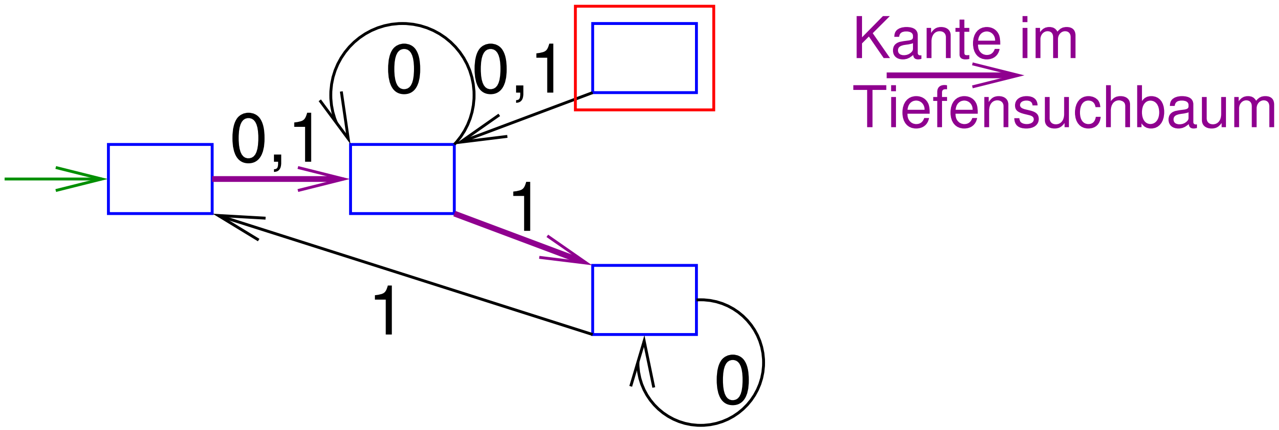
Представяне на DFA или NFA A:

$L = \emptyset \Leftrightarrow \neg\exists f \in F : f$ е от s достижимо

$\rightsquigarrow$ търсене в дълбочина, линейно време, както и за NFA.

Пример

$L(A) = \emptyset$



Проблемът за крайност на езика I — с Pumping Лемата

Нека n е числото от Pumping-Лемата за L - регулярен

Твърдение: $|L(G)| = \infty \Leftrightarrow \exists z \in L(G) : n \leq |z| < 2n$

Д-во:

$z \in L(G), n \leq |z| < 2n \longrightarrow$ Pumping лемата осигурява

$|L| = \infty$.

Ако $|L(G)| = \infty$ да разгледаме $z \in L(G)$ с минимална дължина $|z| \geq n$.

Да допуснем, че $|z| \geq 2n$.

$\xrightarrow{\text{Pumping Лема}} z = uvw$,

$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n, uw \in L(G) \longrightarrow |uw| \geq n$.

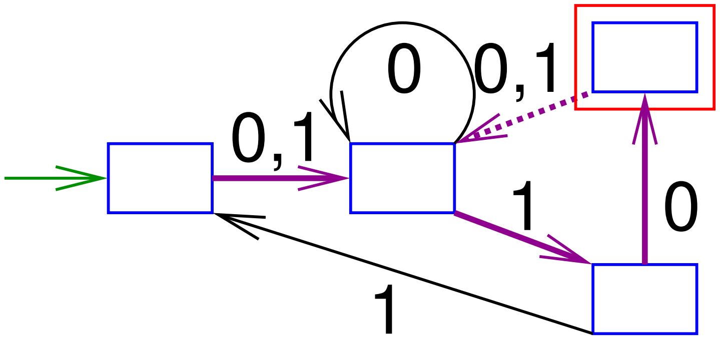
Противоречие с минималността на $|z|$.

Проблемът за крайност на езика II — намиране на цикли

$|L(A)| = \infty$? $\Leftrightarrow \exists$ приемащ път, съдържащ цикъл.
Нека NFA има $F = \{f\}$. Нека $G_A = (Q, E)$,
$E = \{(q,r) : \exists a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} : r \in \delta(q,a)\}$

1. Махаме състоянията, от които f не е достижимо.
   Търсене в дълбочина в $\bar{G_A} = (Q, \{(q,r) : (r,q) \in E\})$ за f.

2. Можем ли да достигнем цикъл от s? $\Leftrightarrow$
   Дали търсенето в дълбочина от s в G_A среща вече посетен възел?



Kante im Tiefensuchbaum

Rückwärtskante im Tiefensuchbaum

Проблемът за пълнота

$L(A) = \Sigma^*$?

$\Leftrightarrow \neg \exists q \in Q \setminus F : q$ е достижимо от s?

$\rightsquigarrow$ търсене в дълбочина, линейно време, само за DFA!

(Еквивалентно: празнота на $\bar{L}$)

Пълнота на NFA:

Трансформираме в DFA. Не е известен по-добър алгоритъм.

Проблемът за еквивалентност

L и L' са регулярни езици разпознавани от DFAs A, A'.

Въпрос $L = L'$?

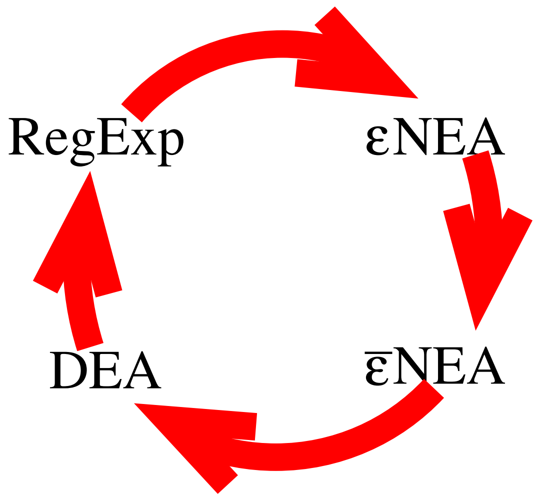
$\Leftrightarrow \neg\exists w : (w \in L \wedge w \notin L') \vee (w \notin L \wedge w \in L')$

$\Leftrightarrow \neg\exists w : (w \in L \wedge w \in \bar{L}') \vee (w \in \bar{L} \wedge w \in L')$

$\Leftrightarrow (L \cap \bar{L}') \cup (\bar{L} \cap L') = \emptyset$

за пример с product автомат

Проблем: бавно



Еквивалентност на DFA

L и L' са регулярни езици дефинирани от DFAs
$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, $A' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$.

Идея: Минималният автомат е "‘единствен"’.
$\rightsquigarrow$ минимизирайте двата автомата и дикажете, че са "‘равни"’.

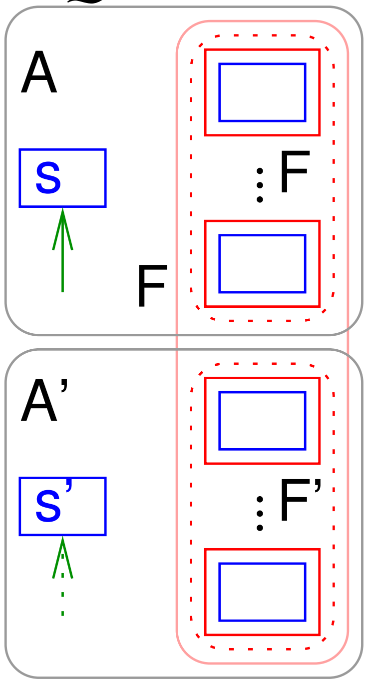
Проблем: Възможно е да са преименувани състоянията.
Сложността на изоморфизъм между по-общи графи е отрит въпрос.

Еквиванетност на DFA

L и L' са регулярни езици дефинирани с DFA

$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, $A' = (Q', \Sigma, \delta', s', F')$. Нека $Q \cap Q' = \emptyset$.

Въпрос: $L = L'$?



Да разгледаме $A_\cup := (Q \cup Q', \Sigma, \delta_\cup, s, F \cup F')$,

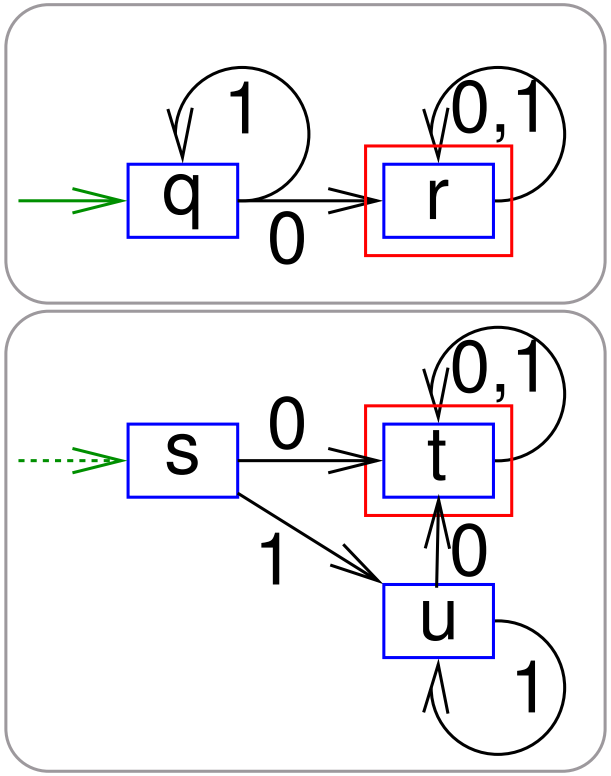
$$\delta_\cup(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{ако } q \in Q \\ \delta'(q,a) & \text{ако } q \in Q' \end{cases}$$

Намерете класовете на еквивалентност

от състояния за $A_\cup$. $L = L' \Leftrightarrow s \equiv s'$.

Пример

$L \subseteq \{0,1\}^*$ език, всички думи с поне една нула



Алгоритъмът за маркиране на нееквивалентните двойки състояния ни дава: $\{q,r\},\{q,t\},\{s,r\},\{s,t\},\{u,r\},\{u,t\}$

$\rightsquigarrow q \equiv s$

$\rightsquigarrow$ Двата автомата са еквивалентни.

Обобщение на крайни автомати и регулярни езици

- Най-простият машинен модел
- Алгоритмични правила (минимизация на състоянията, трансформиране в регулярен израз,. . .)
- Разпознаваният език е напълно разбираем
- Полезни приложения: обработка на текст, компилатори, . . .
- Концепцията за недетерминизъм