2 Теория на изчислимостта

2.1 Функции изчислими интутивно и тезис на Чърч

Ефект

Най-сигурната рецепта да объркате един неинформатик: Ожесточен дебат: кой е най-добрият език за прогармиране

- Всички програмни езици и машинни модели са "'еднакво "' мощни
- Във всеки модел има едни и същи не изчислими проблеми

2.2 Интуитивно понятие за изчислимост

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ (частична) функция.

f е изчислима, ако

$\exists$ ефективна процедура (=алгоритъм), която изчислява f.

Ефективна процедура = Java-програма (, ..., “подходящ ” програмен език)

Вход: $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$

Изход: $f(x_1, \ldots, x_k)$

Програмата завършва за краен брой стъпки, ако $(x_1, \ldots, x_k) \in$ дефиниционната област на f

и не завършва иначе.

Пример

input n

repeat

until false

изчислява никъде недефинираната функция Ω

Пример

$$f_\pi(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } n \text{ е начален сегмент в десет. представяне на } \pi. \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

f_π е изчислима:

Някои апроксимации на π

Архимед: Апроксимации с правилни многоъгълници.

Древните индийци: 1682 преоткрито от Лайбниц

$$\pi = 4\sum_{i=0}^{\infty}\frac{-1^i}{2i+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$$

Baile-Borwein-Plouffe 1996:

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i-1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

Пример

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } n \times \text{‘7’ участват някъде в десет. предст. на } \pi. \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Дали f е изчислима ?

Пример

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } n \times \text{‘7’ участват някъде в десет. предст. на } \pi. \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

f е изчислима

Ако $\forall n : n \times$ ‘7’ се среща: $\forall n : f(n) = 1$

Ако 7 се среща максимум n_0 пъти:

$$\longrightarrow f(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако } n \leq n_0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Очевдно е изчислима, защото е константа, за всички n, с изключение на кр. брой!

Неизчислими функции

- Множеството от всички изчислими функции е изброимо
  (тъй като програмите, които ги изчисляват са изброимо много-крайни низове от краен брой символи).
- Всички функции са неизброимо много

Тезис на Чърч-Тюринг

Изчислимите функции с машини на Тюринг са точно изчислимите в интуитивен смисъл. Не е тероема (не можем да го докажем), но всички го приемат.

Обосновка

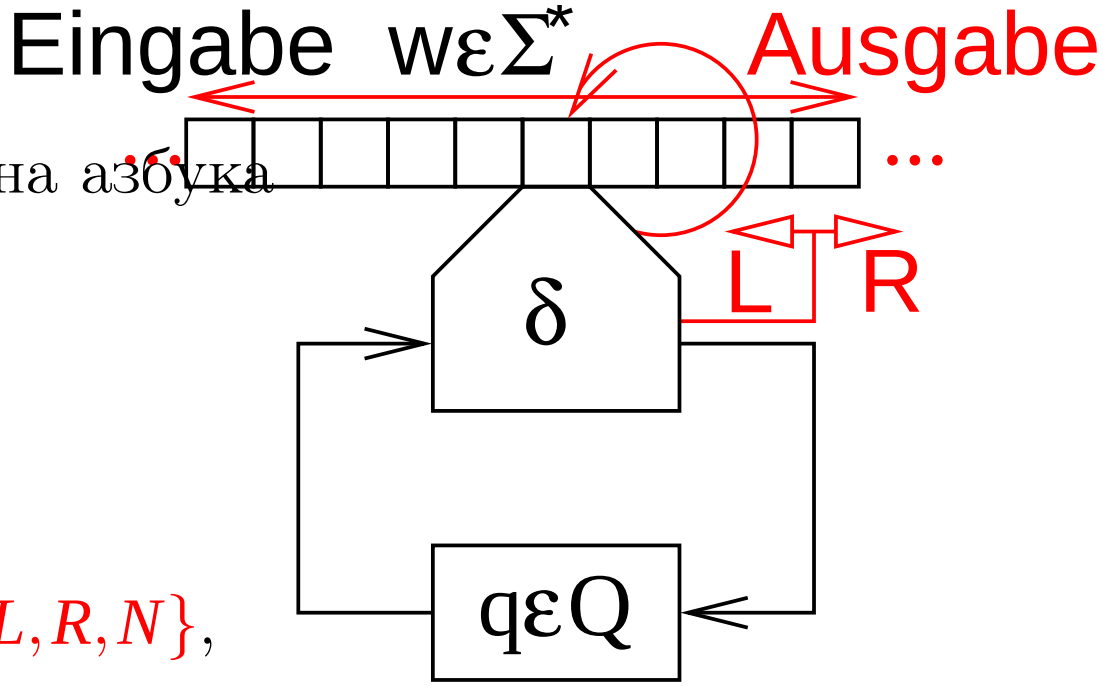
- Всички познати изчислителни модели са еквивалентни.

  това можем да го докажем

- Всички известни "‘интуитивно"’ изчислими функции са изчислими по Тюринг.

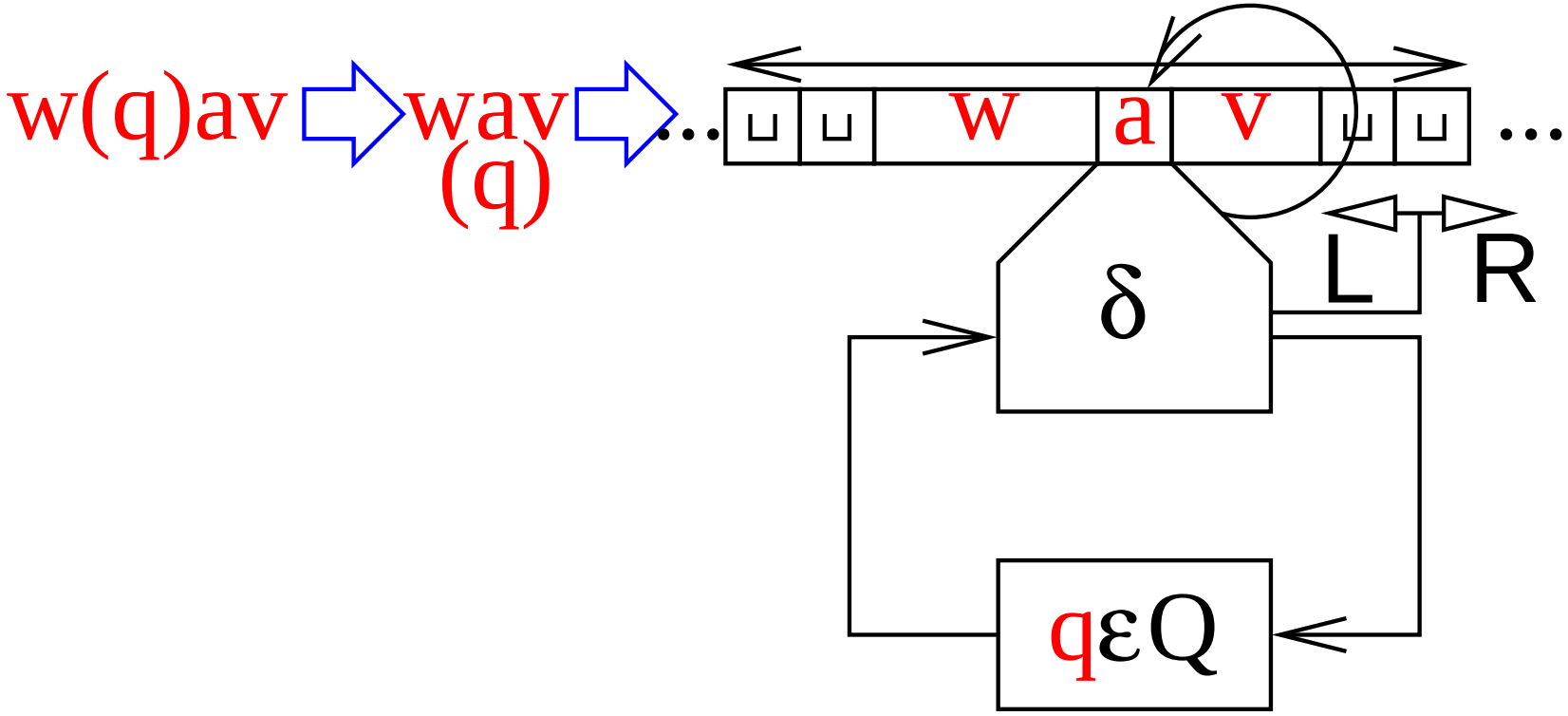
Детерминистични - машини на Тюринг (DMT)

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:



- Q състояния, Σ входна азбука
- Γ азбука на лентата,
  $\sqcup \notin \Sigma$: шпация,
  $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$,
  функция на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния

Конфигурации на МТ



$w, v \in \Gamma^*,\ a \in \Gamma,\ q \in Q$

Как работи DMT

$$wa(q)bcv \overset{\delta(q,b)=(q',b',N)}{\vdash} wa(q')b'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{\delta(q,b)=(q',b',L)}{\vdash} w(q')ab'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{\delta(q,b)=(q',b',R)}{\vdash} wab'(q')cv$$

Функцията на прехода δ дава:

- Ново състояние като КА
- Нов символ — замества текущия символ на лентата (който сочи главата)
- Посоки за придвижване на главата

Кога завършва една DMT?

T завършва при конфигурация $w(q)av$, ако $\delta(q,a) = (q,a,N)$.

Конвенция:

$\forall q \in F : \forall a \in \Gamma : \delta(q,a) = (q,a,N)$

Интерпретация с граф

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ дефинира

безкраен мулти граф

Възли: конфигурации на T.

Дъги: допустими от δ преходи между конфигурации.

$w \in L(A) \Leftrightarrow \exists$ път $P = (s)w \to \cdots \to u(f)v : f \in F$

Машините на Тюринг като разпознаватели

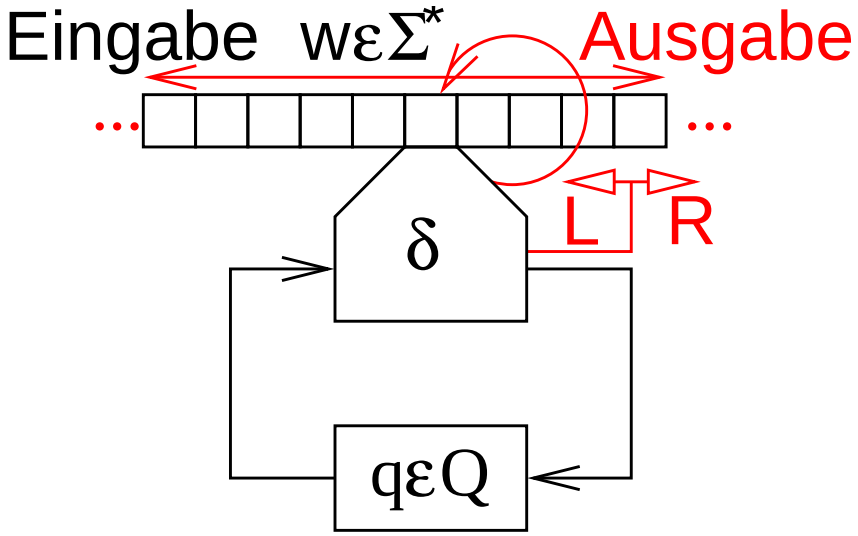
$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$.

$L(T)$?

T приема(разпознава) $w \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \Gamma^*, f \in F : (s)w \vdash^* \alpha(f)\beta$

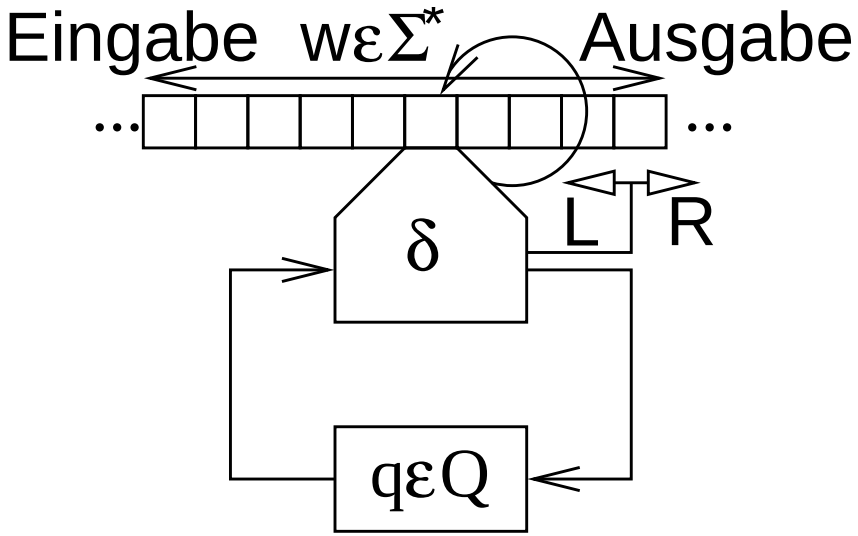
$L(T) := \{w \in \Sigma^* : T \text{ приема } w\}$.



Интерпретация с граф

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$.

$L(T)$?



Дефиниция:

T приема $w \in \Sigma^*$, ако

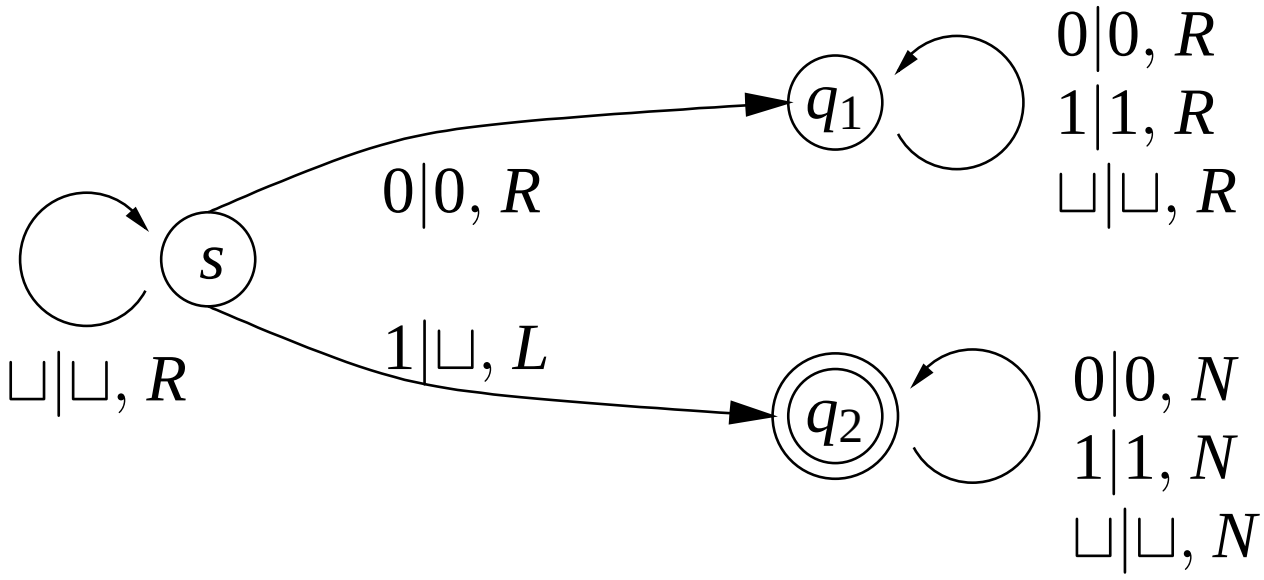
$\exists$ редица от (допустими от δ)

преходи между конфигурации

$(s)w \to \cdots \to x(f)y$ с $f \in F$.

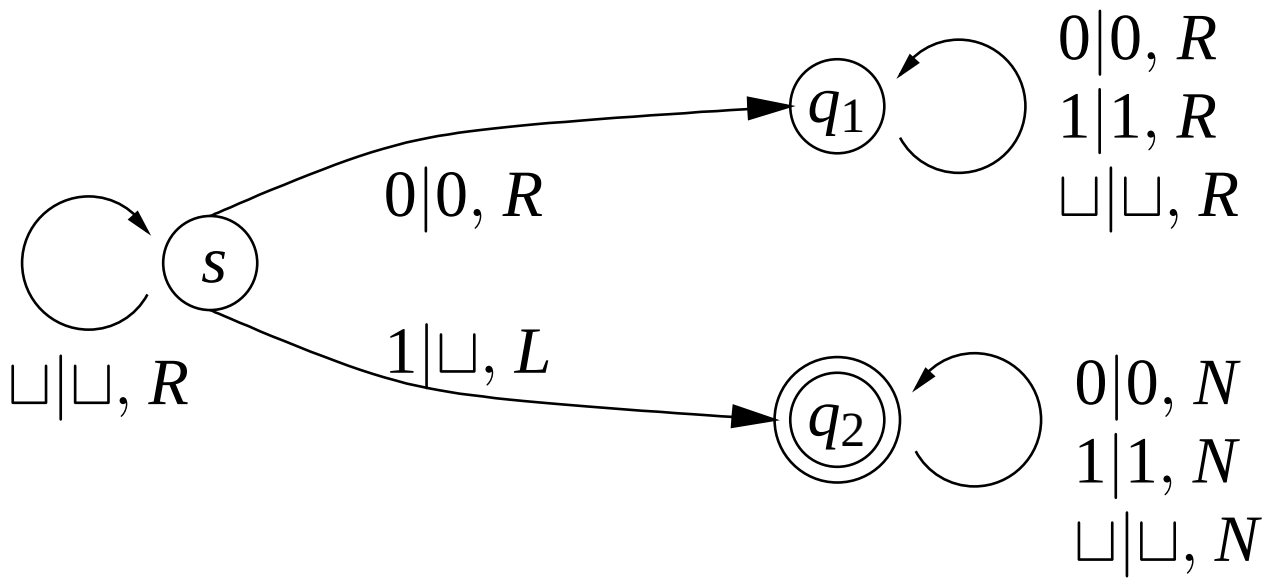
$L(T) := \{w \in \Sigma^* : T$ приема $w\}$.

Пример: разпознавател за $L = 1(0,1)^*$

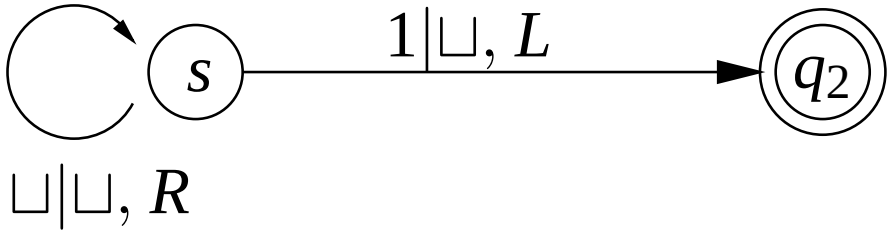


Графични означения:

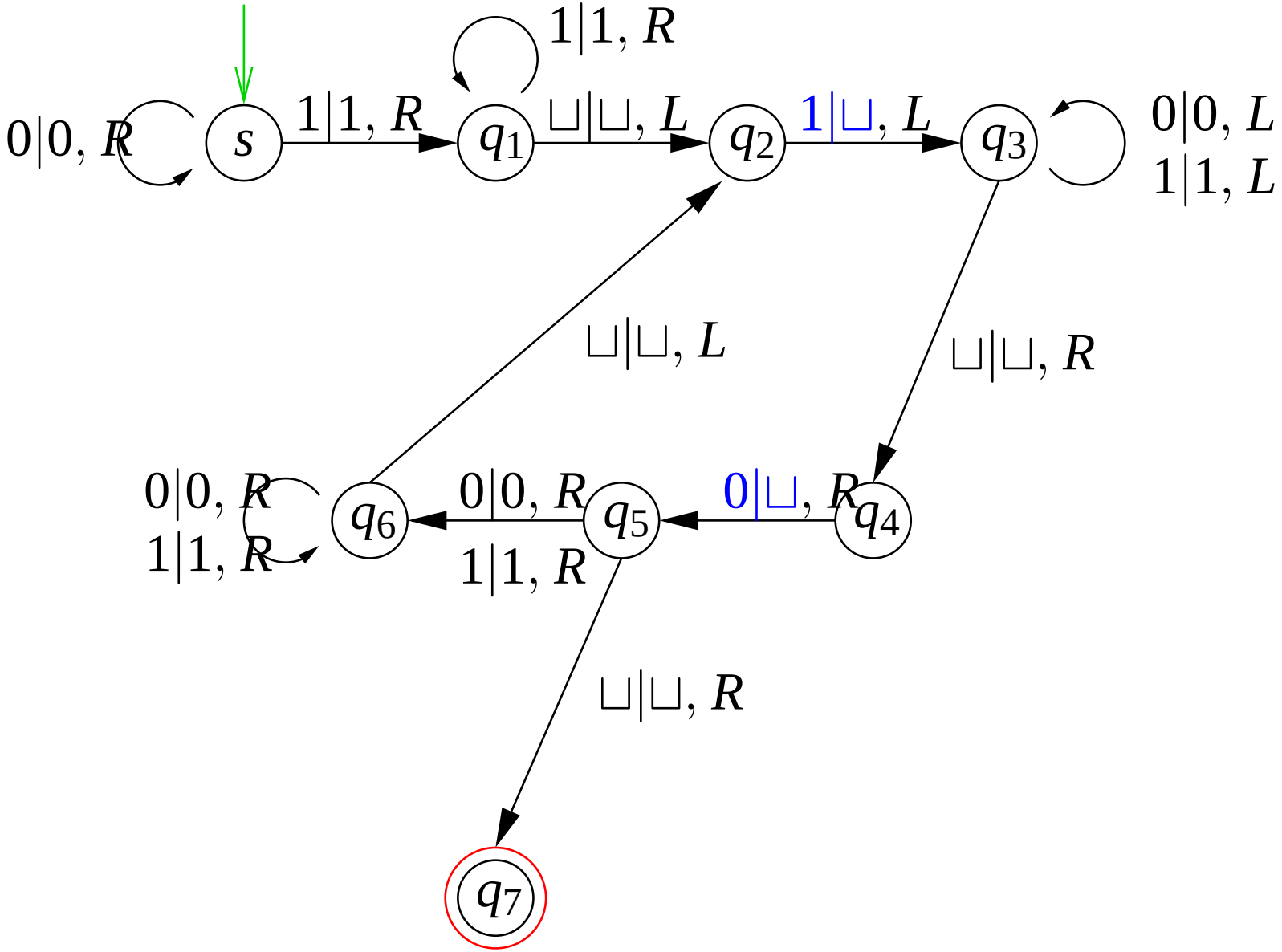
Разширение на КА. Разширено маркиране на дъгите:
входни символи|изходни символи,L,N,R



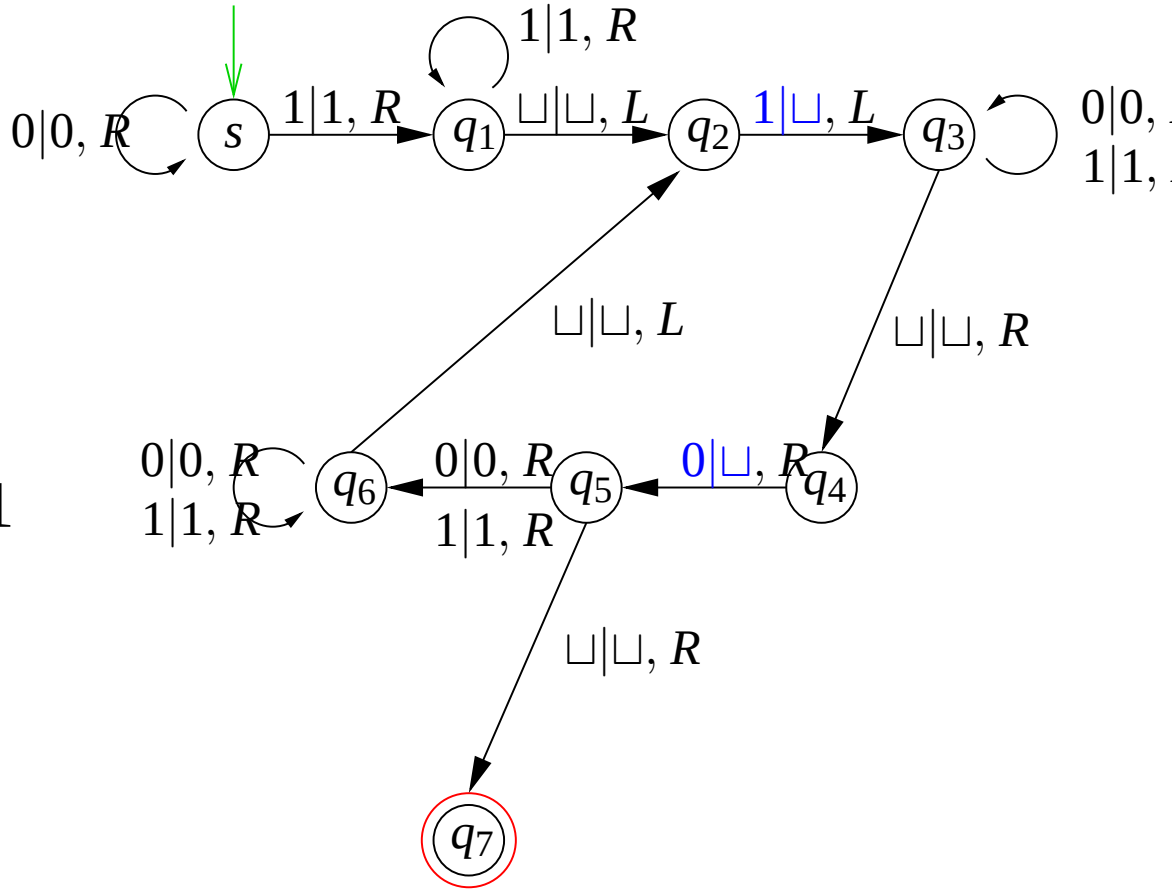
Конвенция: Завършващите с Error преходи $\rightsquigarrow$ МТ завършва.



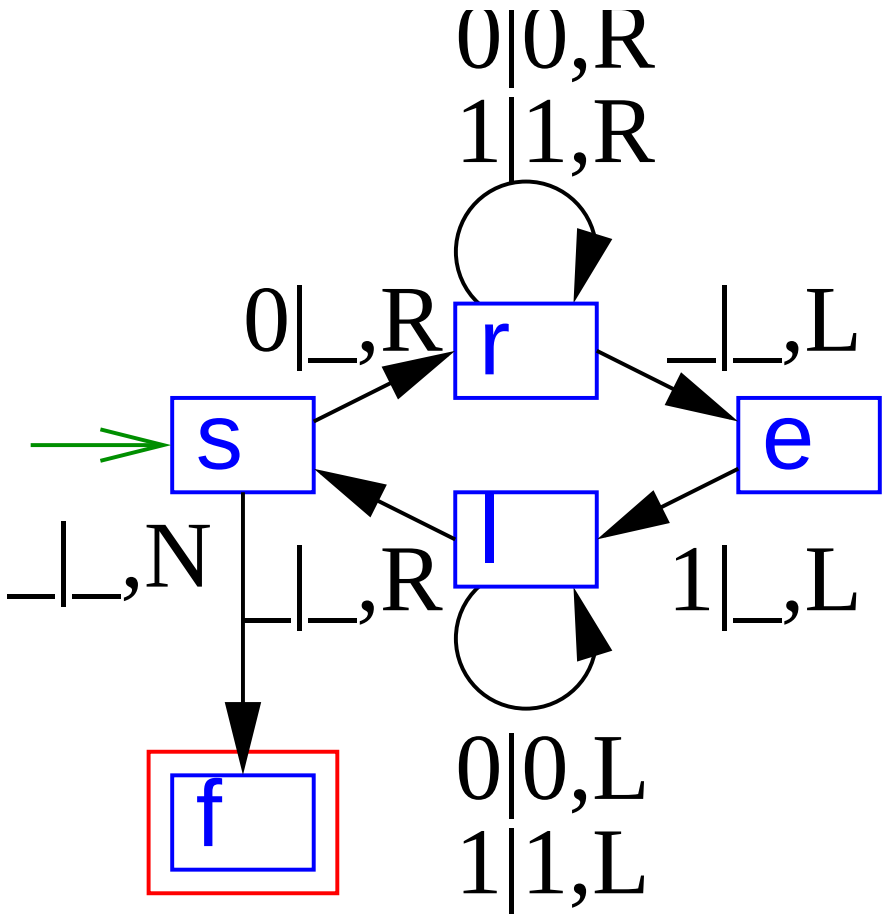
Пример: разпознаватели за $\{0^n1^n : n \geq 1\}$



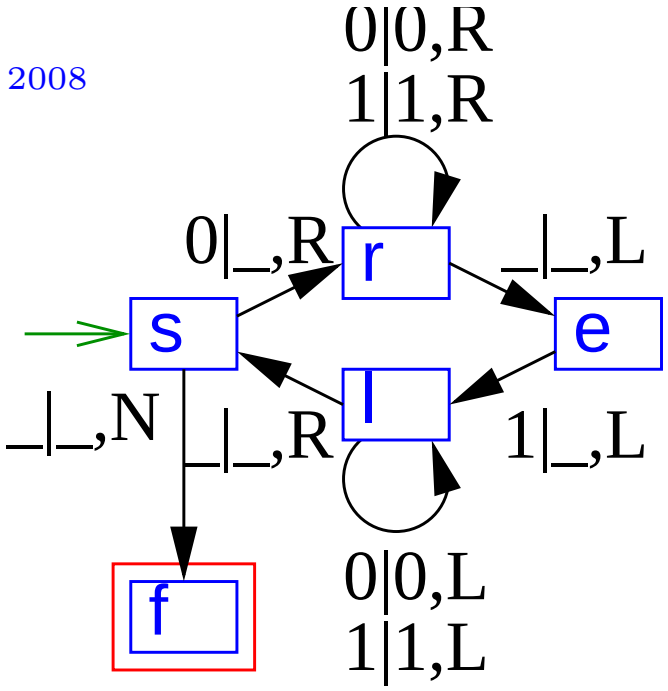
$(s)000111$	$(q_4)00011$	$0(q_2)1$	(q_7)
$0(s)00111$	$\sqcup(q_5)0011$	$(q_3)0\sqcup$	
$00(s)0111$	$0(q_6)011$	$(q_3)\sqcup 0$	
$000(s)111$	$00(q_6)11$	$(q_4)0$	
$0001(q_1)11$	$001(q_6)1$	$\sqcup(q_5)$	
$00011(q_1)1$	$0011(q_6)$		
$000111(q_1)$	$001(q_2)1$		
$00011(q_2)1$	$00(q_3)1\sqcup$		
$0001(q_3)1\sqcup$	$0(q_3)01$		
$0001(q_3)1$	$(q_3)001$		
$000(q_3)11$	$(q_3)\sqcup 001$		
$00(q_3)011$	$(q_4)001$		
$0(q_3)0011$	$\sqcup(q_5)01$		
$(q_3)00011$	$0(q_6)1$		
$(q_3)\sqcup 00011$	$01(q_6)$		



Пример: $\{0^n 1^n : n \geq 0\}$.



Пример: $\{0^n1^n : n \geq 0\}$.



Нека $k \geq 1$, $w \in \{0,1\}^*$

ε: $(s) \vdash (f)$.

0: $(s)0 \vdash (r) \vdash (e)$ завършва.

1w: $(s)1w$ завършва.

0w0: $(s)0w0 \vdash (r)w0 \overset{|w|+1}{\vdash} w0(r) \vdash w(e)0$ завършва.

0w1: $(s)0w1 \vdash (r)w1 \overset{|w|+1}{\vdash} w1(r) \vdash w(e)1 \overset{|w|+1}{\vdash} (\ell) \sqcup w \vdash (s)w$

0^n1^n: $(s)0^n1^n \vdash^* (s)0^{n-1}1^{n-1} \vdash^* \cdots \vdash^* (s) \vdash (f)$

0u1, $u \notin \{0^n1^n : n \geq 0\}$: $(s)0u1 \vdash^* (s)u$. Не завършва в f.

(Индукция)

Изчислими функции с машини на Тюринг

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ изчислява частичната функция
$f_T : \Sigma^* \to \Gamma^* \Leftrightarrow$

$$f_T(w) := \begin{cases} v & \text{ако } T \text{ завършва при вход } w \\ & \text{с изход } v \\ & ((s)w \Rightarrow u(q)v), q \in F \\ \perp = (\text{не е дефинирана }) & \text{иначе} \end{cases}$$

g е изчислима по Тюринг $\Leftrightarrow \exists T : f_T = g$

Забележка: ако $g(x) = \perp$, T не завършва.

Разрешими езици

Един език $L \subseteq \Sigma^*$ е разрешим $\iff$ ако характеристичната функция χ_L е изчислима Тюринг.

$$\chi_L : \Sigma^* \to \{0,1\} \quad \text{където} \quad \chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{ако } w \in L \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Например: $\{0^n 1^n : n \geq 0\}$ е разрешим.

Лема: Един език $L \subseteq \Sigma^*$ е разрешим, ако има машина на Тюринг T, която завършва винаги, и:

- $\forall w(w \in L \Rightarrow (s)w \vdash^* x(f)y)$ за някое $f \in F$
- $\forall w(w \notin L \Rightarrow (s)w \vdash^* x(q)y)$ за някое $q \notin F$ (Error)

Полуразрешими езици

Един език $L \subseteq \Sigma^*$ е полуразрешим $\iff$ ако полухарактеристичната му функция χ'_L е изчислима Тюринг, където

$$\chi'_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{ако } w \in L \\ \perp & \text{иначе} \end{cases}$$

Лема: Всеки разрешим език е полуразрешим.

Изчислими с машини на Тюринг

функции в естествените числа

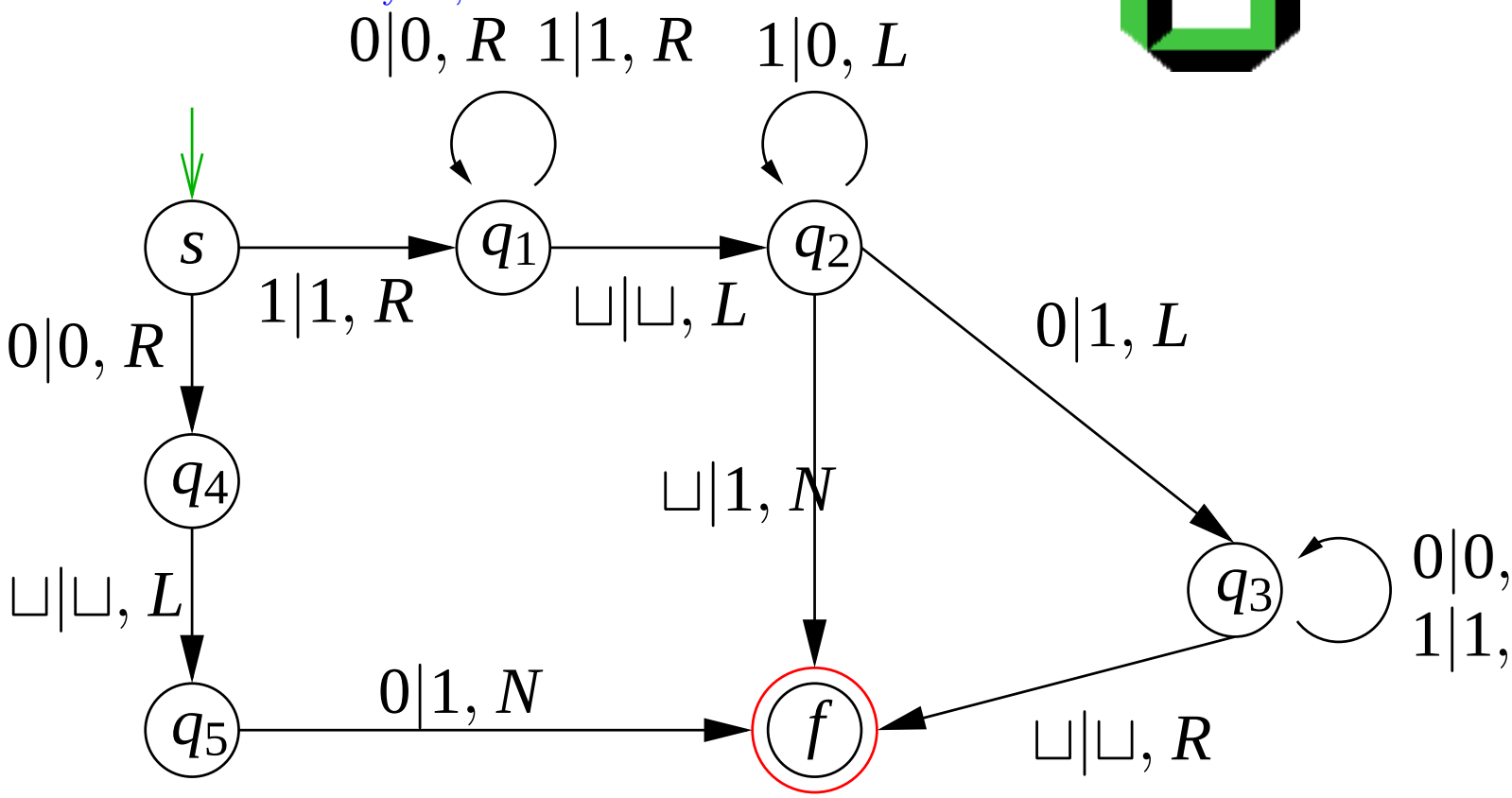
$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ е изчислима по Тюринг $\Leftrightarrow$

$\exists T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F) : \forall n_1, \ldots, n_k, m \in \mathbb{N} :$

$f(n_1, \ldots, n_k) = m \Leftrightarrow$

$(s)\text{bin}(n_1)\#\cdots\#\text{bin}(n_k) \vdash^* u(q)\text{bin}(m), q \in F$

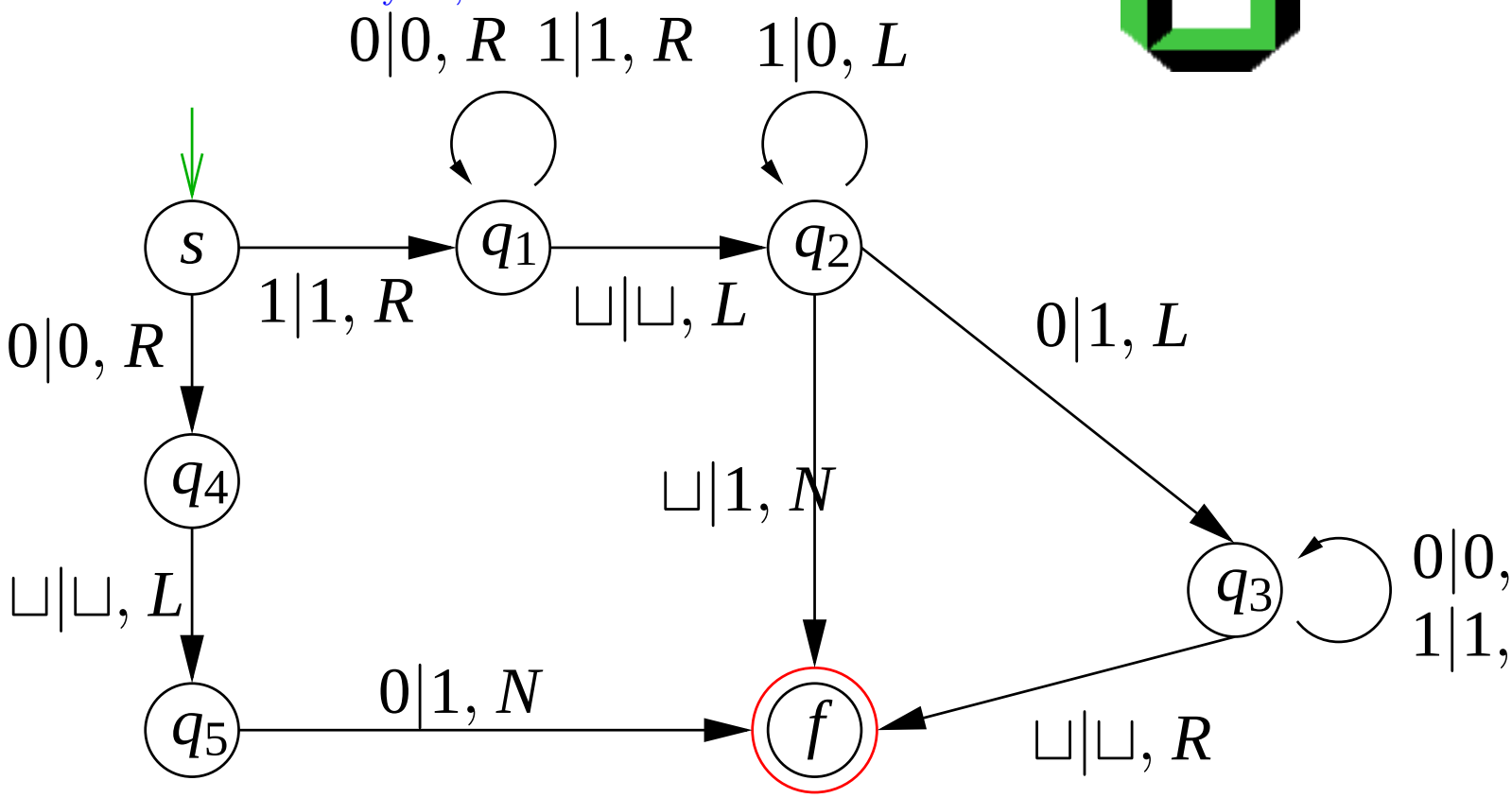
Пример



$$f(w) = \begin{cases} w+1 & \text{ако } w \in 0 \cup 1(0 \cup 1)^*, \\ & w \text{ като двоично число} \\ \text{недефинирана} & \text{иначе} \end{cases}$$

Забележка: Непоказаните дъги са безкрайни цикли.

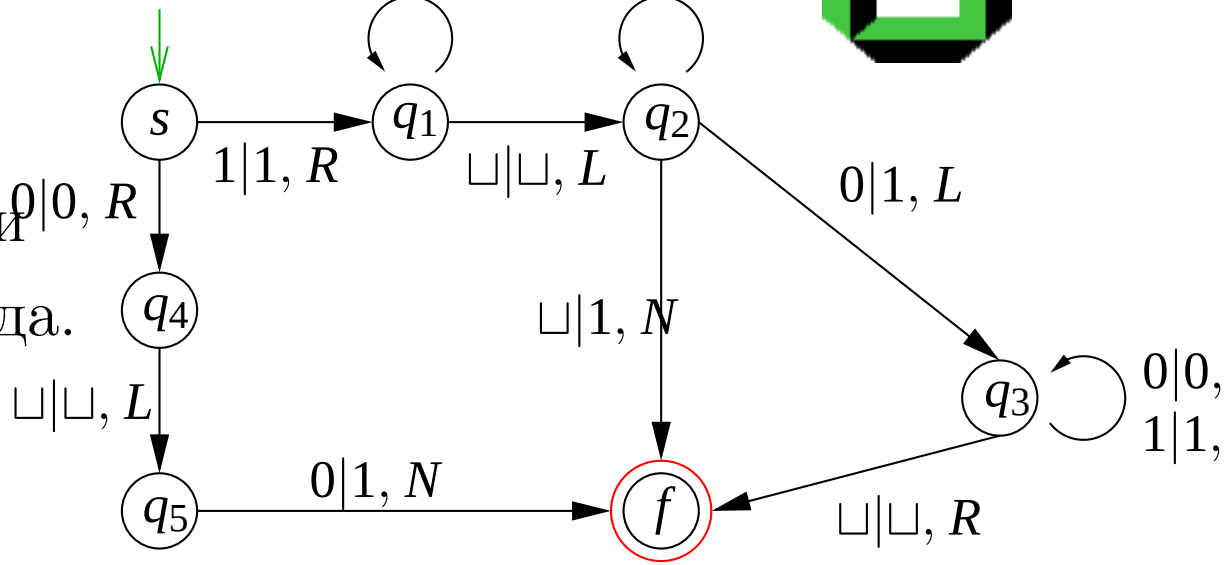
Пример



$(s)11 \vdash 1(q_1)1 \vdash 11(q_1) \vdash 1(q_2)1 \vdash (q_2)10 \vdash (q_2)\sqcup 00 \vdash (f)100$

Разглеждане на случаи по структурата на входа.

Нека $w \in \{0,1\}^*$, $a \in \{0,1\}$,$n \geq 1$.



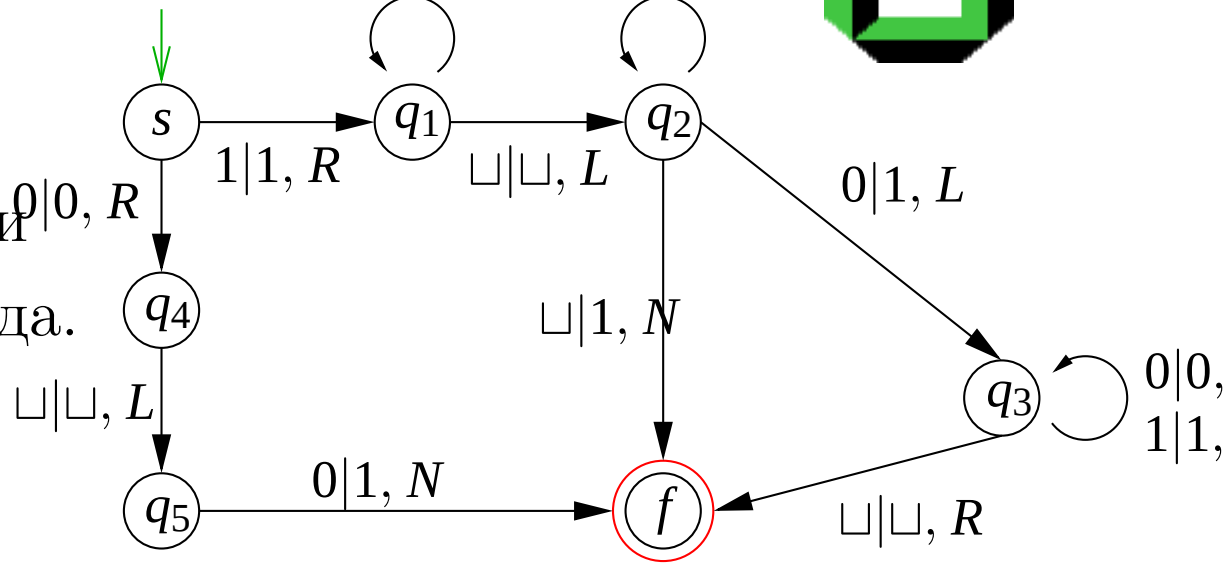
0: $(s)0 \vdash 0(q_4) \vdash (q_5)0 \vdash (f)1$

0aw: $(s)0aw \vdash 0(q_4)aw$ не е дефинирана

Разглеждане на случаи по структурата на входа.

Нека $w \in \{0,1\}^*$

$a \in \{0,1\}, n \geq 1$.



1^n: $(s)1^n \vdash 1(q_1)1^{n-1} \overset{n-1}{\vdash} 1^n(q_1) \vdash 1^{n-1}(q_2)1 \overset{n}{\vdash} (q_2)\sqcup 0^n \vdash (f)10^n$

$1w0$: $(s)1w0 \vdash 1(q_1)w0 \overset{|w|+1}{\vdash} 1w0(q_1) \vdash 1w(q_2)0 \vdash 1w(q_3)1 \overset{|w|+1}{\vdash}$
$(q_3)\sqcup 1w1 \vdash (f)1w1$

$1w01^n$:

$(s)1w01^n \vdash 1(q_1)w01^n \overset{|w|+1+n}{\vdash} 1w01^n(q_1) \vdash 1w01^{n-1}(q_2)1 \overset{n}{\vdash}$
$1w(q_2)00^n \vdash 1w(q_3)10^n \overset{|w|+1}{\vdash} (q_3)\sqcup 1w10^n \vdash (f)1w10^n$

Пример:Никъде недефинираната функция

$$T = (\{s\}, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \{\})$$

$$\forall a \in \Gamma : \delta(s, a) = (s, a, R)$$

Програмни техники и конструкции на машини на Тюринг

- Запомняне на символ
- Основни машини
- Комбиниране на машини - композиция и разклонение
- While-loops

Запомняне на символ

Нека $x \in A \subseteq \Gamma$, ($|A| < \infty$!):
$Q \rightsquigarrow Q \times A$.

Пример M е МТ, която запаметява първия символ на входната дума и завършва успешно, ако той не се среща на друго място в думата.

$$\delta([s,\sqcup],0) = ([q,0],0,R) \qquad \delta([s,\sqcup],1) = ([q,1],1,R)$$

$$\delta([q,0],1) = ([q,0],1,R) \qquad \delta([q,1],0) = ([q,1],0,R)$$

$$\delta([q,0],\sqcup) = (f,\sqcup,N) \qquad \delta([q,1],\sqcup) = (f,\sqcup,N)$$

Композиция и разклонение

Основни машини (за 1 стъпка): за всяко $b \in \Gamma$:

$$a : \delta(s,b) = (f,a,N)$$

$$L : \delta(s,b) = (f,b,L)$$

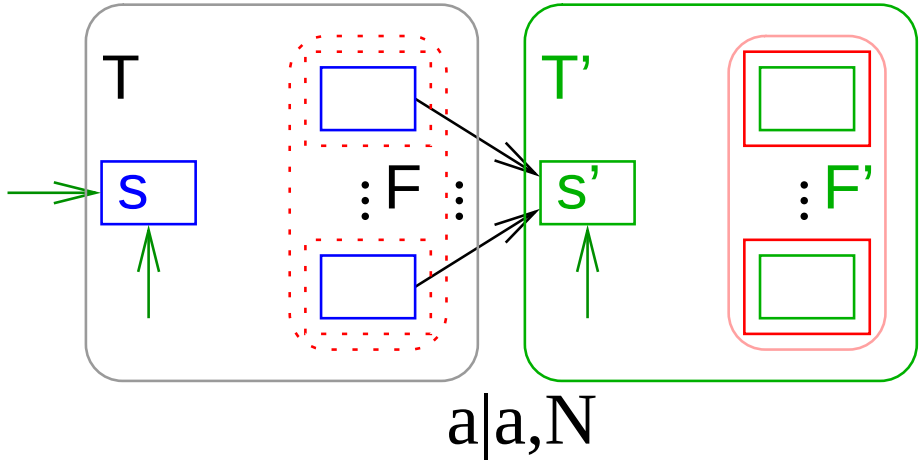
$$R : \delta(s,b) = (f,b,R)$$

Композиция

Дадено: $T = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,s,F)$ и $T' = (Q',\Sigma,\Gamma',\delta',s',F')$.

Изход: Машина на Тюринг $T^\circ = (Q^\circ,\Sigma,\Gamma^\circ,\delta^\circ,s,F')$ за $f_{T'}(f_T(x))$: $Q^\circ = Q \dot\cup Q'$ $\Gamma^\circ = \Gamma \cup \Gamma'$

$$\delta^\circ(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{ако } q \in Q \setminus F \\ (s',a,N) & \text{ако } q \in F \\ \delta'(q,a) & \text{ако } q \in Q' \end{cases}$$



Разклонение

Дадено: $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$, $T' = (Q', \Sigma, \Gamma', \delta', s', F')$ и $T'' = (Q'', \Sigma, \Gamma'', \delta'', s'', F'')$.

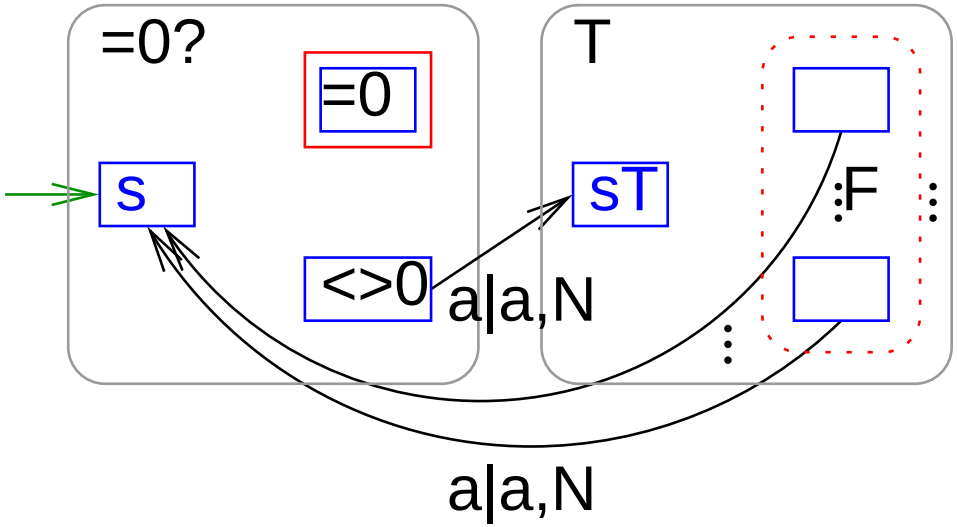
Изход: Машина на Тюринг $T^\circ = (Q^\circ, \Sigma, \Gamma^\circ, \delta^\circ, s, F' \cup F'')$

$Q^\circ = Q \dot\cup Q' \dot\cup Q''$, $\Gamma^\circ = \Gamma \cup \Gamma' \cup \Gamma''$

$$f_{T^\circ}(x) = \begin{cases} f_{T'}(f_T(x)) & \text{ако } f_T(x) = a \\ f_{T''}(f_T(x)) & \text{ако } \downarrow f_T(x) \neq a \end{cases}.$$

$$\delta^\circ(q,b) = \begin{cases} \delta(q,b) & \text{ако } q \in Q \setminus F \\ (s', b, N) & \text{ако } q \in F \ \& \ b = a \\ (s'', b, N) & \text{ако } q \in F \ \& \ b \neq a \\ \delta'(q,b) & \text{ако } q \in Q' \\ \delta''(q,b) & \text{ако } q \in Q'' \end{cases}$$

While-loops: While $i \neq 0$ Do tape:= f_T(tape)



Примери: $R_{\sqcup}$ - сканира надясно докато намери $\sqcup$

(аналогично $L_{\sqcup}$)

Copy: $(q)w\sqcup \vdash (f)w\sqcup w$ - копира думата

Shift R: $(q)\sqcup w\sqcup \vdash (f)w\sqcup w$ - премества думата надясно

Многолентови машини на Тюринг

k- лентова машина на Тюринг (k- глави):

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$, където

$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrowtail Q \times \Gamma^k, \{L, R, N\}^k$.

$\delta(q, (a_1, \ldots, a_k)) = (p, (b_1, \ldots, b_k), (C_1, \ldots, C_k))$,

$C_1, \ldots, C_k \in \{L, R, N\}$.

Теорема За всяка k-лентова машина на Тюринг M съществува еднолентова машина на Тюринг M', такава че за всяка дума x на първата лента $M(x)$ завършва с резултат y на първата лента $\Longleftrightarrow$ M' завършва над x с резултат y.

Идея

$\Sigma' = \Sigma \cup (\Sigma \times \{0,1\})^k$.

На i-та позиция единица показва главата на i-тата лента.

- Фаза 1. Замества всеки символ a_i с $(a_i, 0, \sqcup, 0, \cdots \sqcup, 0)$. Отпред $(\sqcup, 1, \sqcup, 1, \cdots \sqcup, 1)$.
- Фаза 2. Симулира изчислението на M върху M' докато M завърши
  (а) сканиране надясно : запомня къде са главите
  (б) сканиране наляво и надясно за симулиране на M
- Фаза 3. Преобразува всеки k-местен символ в унарен символ: $(b_1, 0, \ldots b_k, 0) \rightsquigarrow b_1$. Игнорира другите ленти без първата.

Варианти на машини на Тюринг

k глави: $\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$

k ленти: т.е. по една глава за лента

d-размерна лента: например $d = 2$,

$$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, U, D, N\}$$

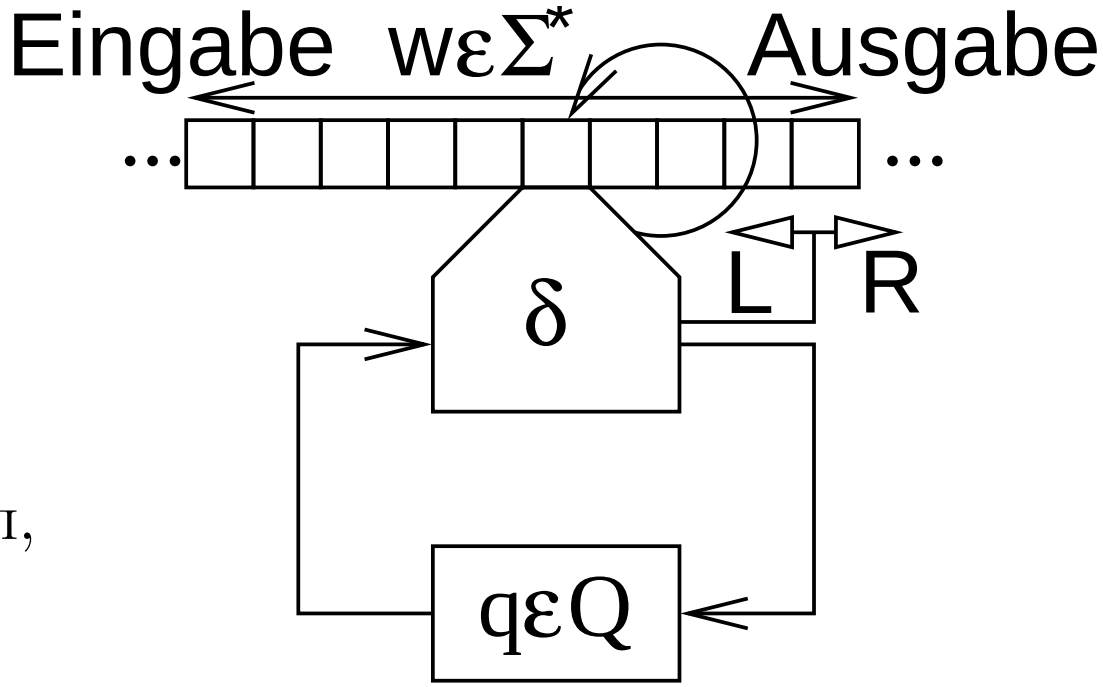
вероятностни: допълнително инструкции за движение на главата с рандом бит

Времето T за k-лентова-МТ $\to \mathcal{O}\left(T^2\right)$ за едно-лентова-МТ

Недетерминистични машини на Тюринг (НМТ)

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:

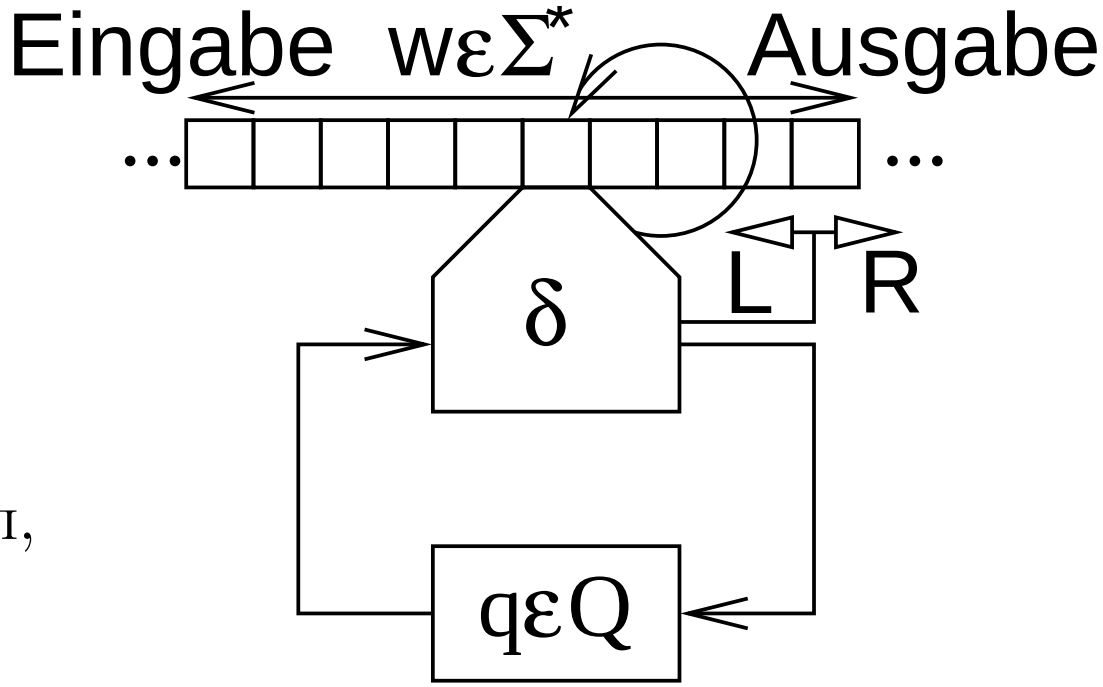
- Q, състояния
- Σ, входна азбука
- Γ азбука на лентата,
  $\sqcup \notin \Sigma$: празен символ,
  $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,R,N\}}$,
  функция на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния



Недетерминистични машини на Тюринг (НМТ)

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:

- Q, състояния
- Σ, входна азбука
- Γ азбука на лентата,
  $\sqcup \notin \Sigma$: празен символ,
  $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$
- $\delta \subseteq Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$,
  релация на прехода;
- $s \in Q$, начално състояние
- $F \subseteq Q$, крайни състояния



Как работи една НМТ

$$wa(q)bcv \overset{(q',b',N)\in\delta(q,b)}{\vdash} wa(q')b'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{(q',b',L)\in\delta(q,b)}{\vdash} w(q')ab'cv$$

$$wa(q)bcv \overset{(q',b',R)\in\delta(q,b)}{\vdash} wab'(q')cv$$

Възможни преходи между конфигурациите

Кога завършва една НМТ?

T завършва при конфигурация $w(q)av$ ако
$\delta(q,a) = \{\}$.

Конвенция:
$\forall q \in F : \forall a \in \Gamma : \delta(q,a) = \{\}$

Разлики ДМТ versus НМТ:

δ определя преходите между конфигурации versus

δ допуска преходите между конфигурации.

Как работи една НМТ?

T приема $w \Leftrightarrow$

$\exists \alpha, \beta \in \Gamma^*, f \in F : (s)w \vdash^* \alpha f \beta$

$L(T) := \{w \in \Sigma^* : T \text{ приема } w\}$.

Дефиниция:

T изчислява функцията f ако

за всяка дума w: $f(w)$ е дефинирана т.т.к. T завършва над w

и $f(w) = v$ ако $(s)w \to \cdots \to x(f)v$ с $f \in F$.

НМТ и ДМТ

Теорема Ако M е НМТ, то има ДМТ M', такава че за всяка дума w
M завършва над w т.т.к. M' завършва над w и
$(s)w \vdash_M^* u(f)v \Leftrightarrow (s')w \vdash_{M'}^* u(f')v$.
Д-во: Нека $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$
Нека $r = \max|\delta(q,a)| \forall q \in Q \ \& \ a \in \Gamma$.
Номерираме стойностите на $\delta(q,a)$ с $1, 2, \ldots, r$,
ако са по-малко повтаряме последния.

Тъй като M е недетерминистична, няма как да разберем на всяка стъпка, кой от тези r прехода избира M
Но, ние ще помогнем.

НМТ и ДМТ

Машина M_d - детерминистична с 2 ленти:

I лента: w -входната дума

II лента: $i_1, \ldots, i_n$ - редица на преходите $i_j \leq r$.

M_d имитира M с избор на преходите, посочен от II лента.

Машина N- генерира последователно всички редици $i_1, \ldots, i_n$, за $i_j \leq r$, лексикогарфски:
$1, 2, \ldots, r, 11, 12, 13, \ldots, rr, 111, \ldots$

НМТ и ДМТ

Машина M': 3

I лента: w - входа, не се променя

II лента: w

III лента: $i_1, \ldots, i_n$-редица на преходите $i_j \leq r$,

1. Копира входа от I-та лента на II-та.
2. Пуска M_d на II-та и IIIта лента, като след всяка симулация на M_d генерира редица от преходи с машината N на III-та и възстановява w на II-та лента.
3. Когато M_d стигне до заключително състояние, копира съдържанието от II-та на I-та.

НМТ и ДМТ

$\downarrow M(w) \Longleftrightarrow \downarrow M'(w)$

Ако $\downarrow M(w)$, то след редица неуспешни опити ще намерим успешната редица от преходи и $\downarrow M'(w)$.

Ако $\downarrow M'(w)$, то $\downarrow M_d(w)$ и следователно $\downarrow M(w)$.

Но ако M завърши за n стъпки, то M' завършва за $\exp(n)$ стъпки.

Граматики от тип 1

Пример: $L = \{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$

$G = (V, \Sigma, P, S)$, $V = \{S, A, B, C, T_a, T_b, T_c\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

R:

$S \longrightarrow ABCS$ $\quad$ $CT_c \longrightarrow T_c c$

$S \longrightarrow T_c$ $\quad$ $CT_c \longrightarrow T_b c$

$BA \longrightarrow AB$ $\quad$ $BT_b \longrightarrow T_b b$

$CB \longrightarrow BC$ $\quad$ $BT_b \longrightarrow T_a b$

$CA \longrightarrow AC$ $\quad$ $AT_a \longrightarrow T_a a$

$T_a \longrightarrow \varepsilon$

Граматики от тип 0 (от общ тип)

Пример: $L = \{a^{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$

$G = (V, \Sigma, P, S)$, $V = \{S, A, B, C, D, E\}$, $\Sigma = \{a\}$

R:

$S \longrightarrow ACaB$	A, B маркери
$Ca \longrightarrow aaC$	удвоява a
$CB \longrightarrow DB$	докато стигне B, $C \leftrightarrow D$
$CB \longrightarrow E$	за край
$aD \longrightarrow Da$	при D, наляво
$AD \longrightarrow AC$	докато стигне A, $D \leftrightarrow C$
$aE \longrightarrow Ea$	при D, наляво
$AE \longrightarrow \varepsilon$	E маха границите.

Твърдение: $\forall$тип 0 език $L : \exists$МТ $T : L(T) = L$

Д-во: Нека $G = (V, \Sigma, P, S)$-граматика от тип 0 с $L(G) = L$.

Да разгледаме НМТ $T = (Q, \Sigma, (\Sigma \cup V), \delta, s, F)$:

Procedure inL(z) // начална конфигурация $(s)z$

invariant "съдържанието на лентата" $\stackrel{*}{\Rightarrow} z$

while tape $\neq S$ do

if $\exists w \to \alpha \in P :$ tape $= x\alpha y$ then // $2\times$ недетрм. избор!

tape:= xwy // заместващо правило!

else reject z

accept z

приемащо изчисление $\xrightarrow{Inv.} \exists$ извод.

$S \stackrel{*}{\Rightarrow} z \longrightarrow \exists$ съответстващо успешно изчисление .

Твърдение: $\forall L : \exists$НМТ $T : L(T) = L \rightarrow L$ е език от тип 0.

Д-во: Нека $T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ е НМТ и $L(T) = L$.

Да разгледаме граматика от тип 0

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

Идея: МТ-конфигурация $\alpha(q)a\beta \rightsquigarrow$ твърдение за $\alpha(q,a)\beta$ плюс екстра информация за оригиналния вход.

3 фази на извода:

1. генерираме дума от Σ^*.
2. симулираме изчислението на МТ.
3. след успешно приемане възстановяваме входната дума

Фаза 1: генериране на дума от Σ^*

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ НМТ и $L(T) = L$.

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

$\{S \to S(a,a) : a \in \Sigma\} \subseteq P$

$\{S \to (s,a,a) : a \in \Sigma\} \subseteq P$ край на фаза 1.

(и специални грижи ако $\varepsilon \in L$)

Пример: $S \Rightarrow S(c,c) \Rightarrow S(b,b)(c,c) \Rightarrow (s,a,a)(b,b)(c,c)$

отговаря на началната конфигурация $(s)abc$

Фаза 2: симулиране на изчислението на МТ

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ НМТ с $L(T) = L$.

$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

$$P := P \cup \{(q,a,c) \to (q',a',c) \quad : (q',a',N) \in \delta(q,a), c \in \Sigma\}$$
$$\cup \{(b,c')(q,a,c) \to (q',b,c')(a',c) \quad : (q',a',L) \in \delta(q,a), c \in \Sigma\}$$
$$\cup \{(q,a,c)(b,c') \to (a',c)(q',b,c') \quad : (q',a',R) \in \delta(q,a), c \in \Sigma\}$$

Пример: $(s,a,a)(b,b)(c,c) \stackrel{*}{\Rightarrow} (x,a)(f,y,b)(z,c)$

отговаря на редицата от конфигурации

$(s)abc \vdash \cdots \vdash x(f)yz$

Фаза 3: възстановява входната дума

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ НМТ с $L(T) = L$.

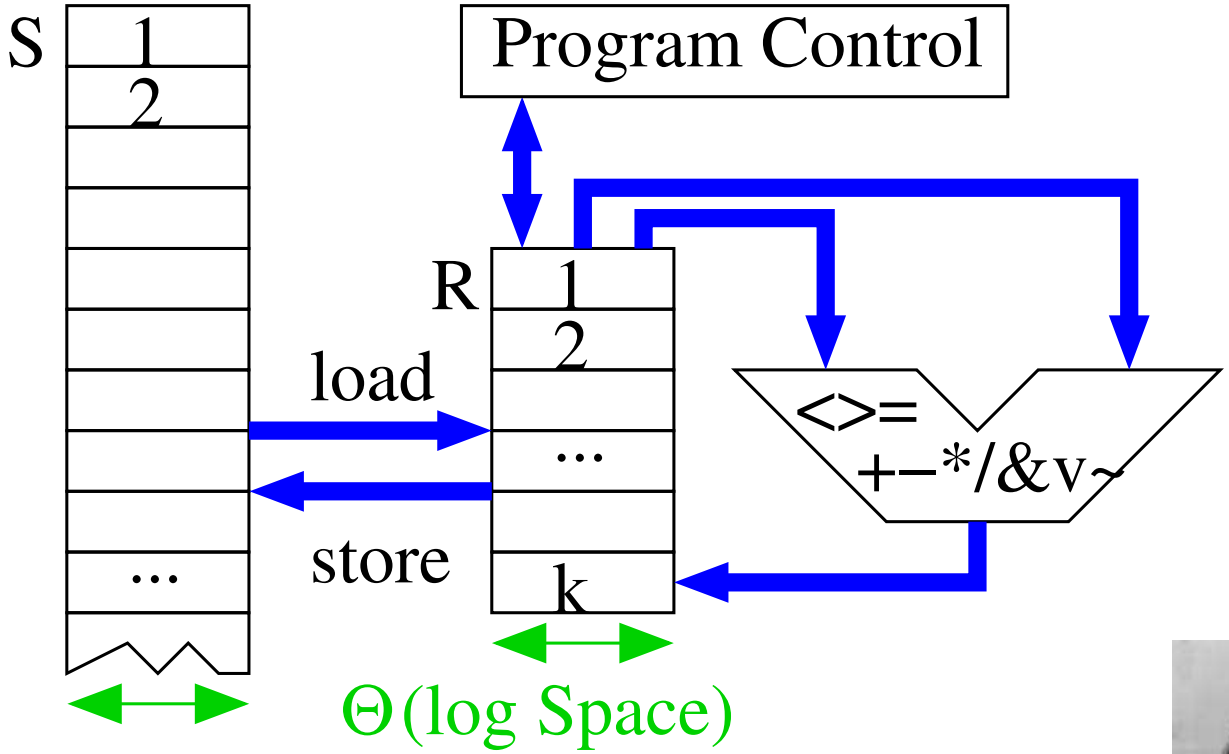
$G = (V = \{S\} \cup (\Gamma \times \Sigma) \cup (Q \times \Gamma \times \Sigma), \Sigma, P, S)$.

$\{(f,a,c) \to c : f \in F, a \in \Gamma, c \in \Sigma\} \subseteq P$ Приемане

$\{(a,b) \to b : a \in \Gamma \wedge b \in \Sigma\} \subseteq P$

Пример: $(x,a)(f,y,b)(z,c) \Rightarrow (x,a)b(z,c) \Rightarrow ab(z,c) \Rightarrow abc$

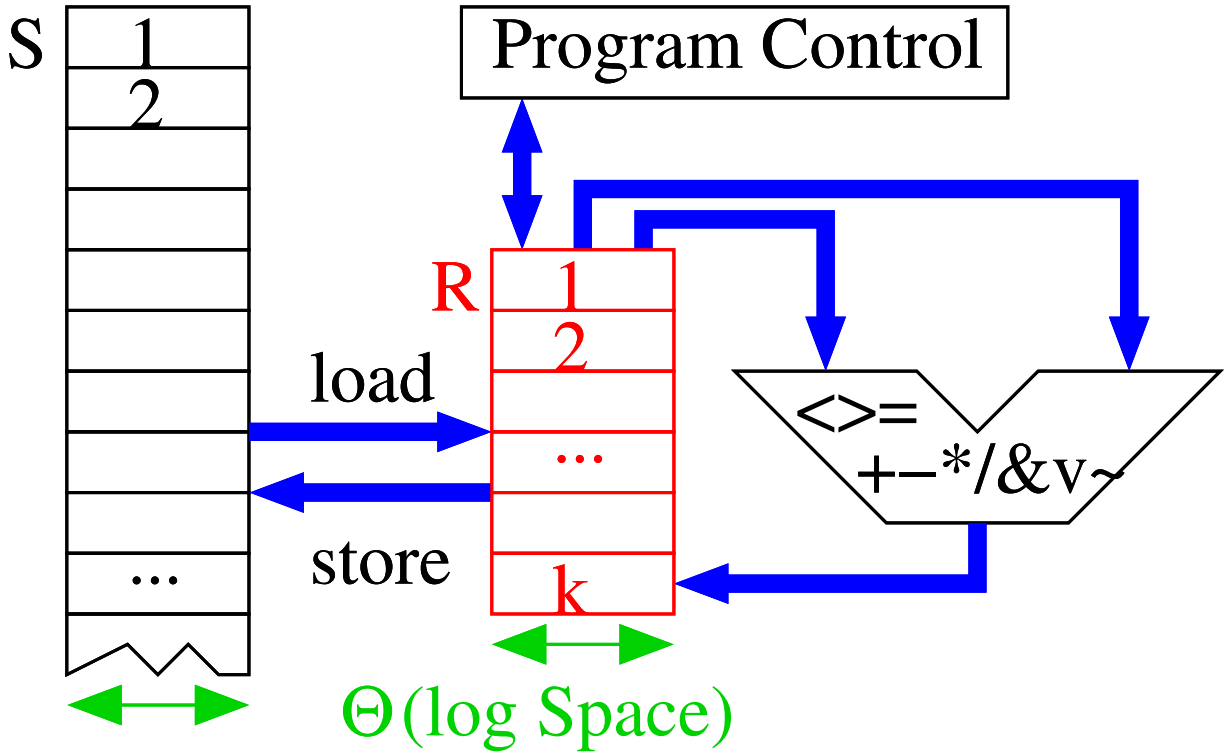
RAM: Машини с директен достъп до паметта (random access memory)



Модерна (RISC)адаптация

на фон Ноймановия модел [1945]

Регистри

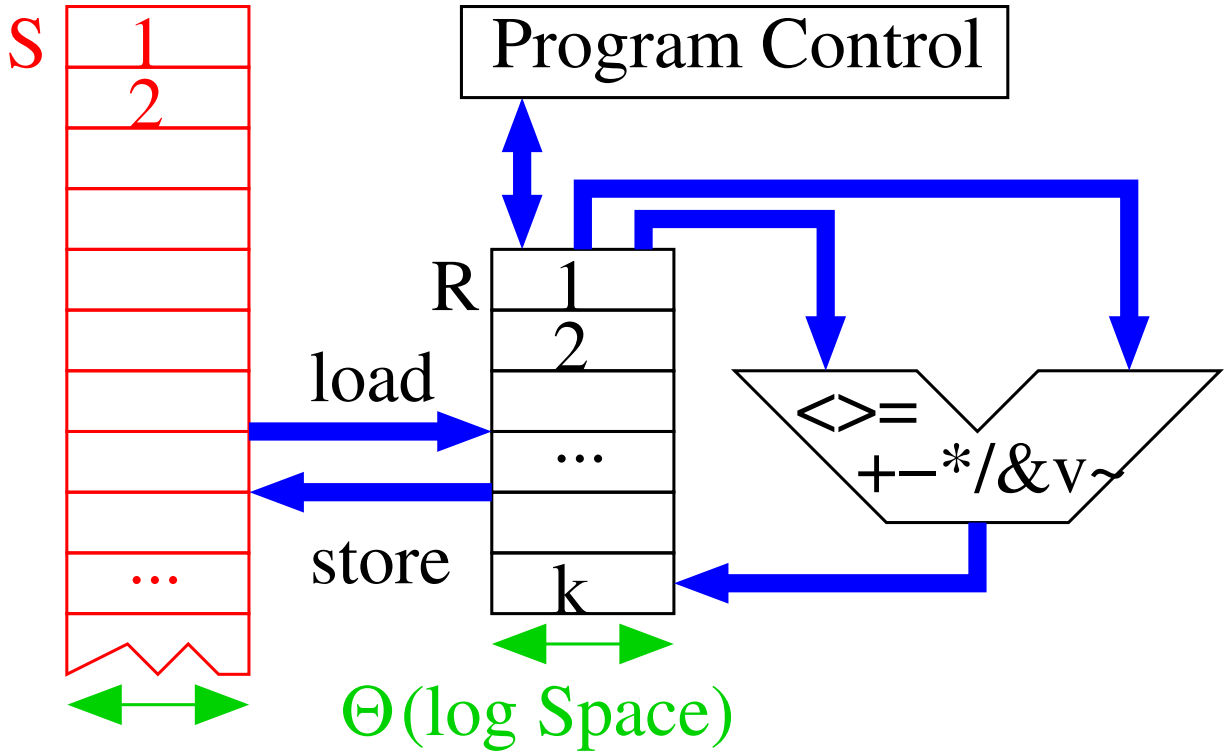


k (всяка константа) регистри

$R_1,\ldots,R_k$ за

(малки) числа

Основната памет

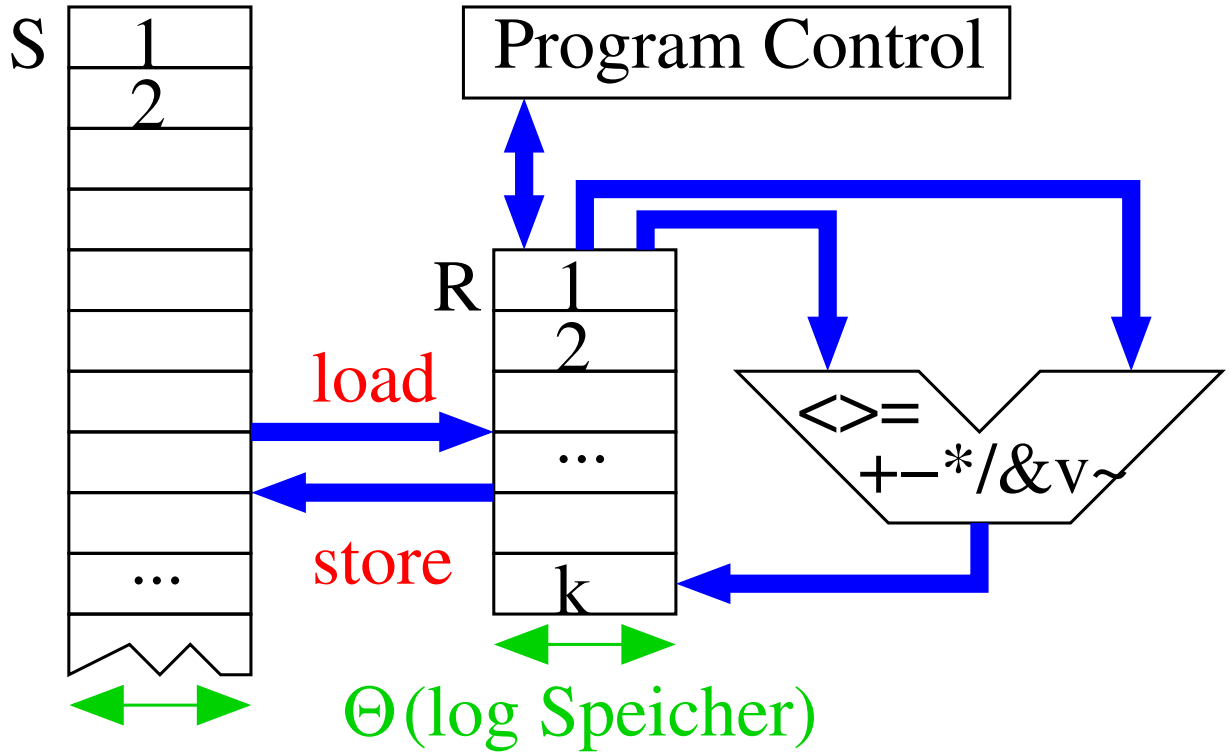


Неограничен брой клетки

$S[1]$, $S[2]\ldots$ за

(малки) числа

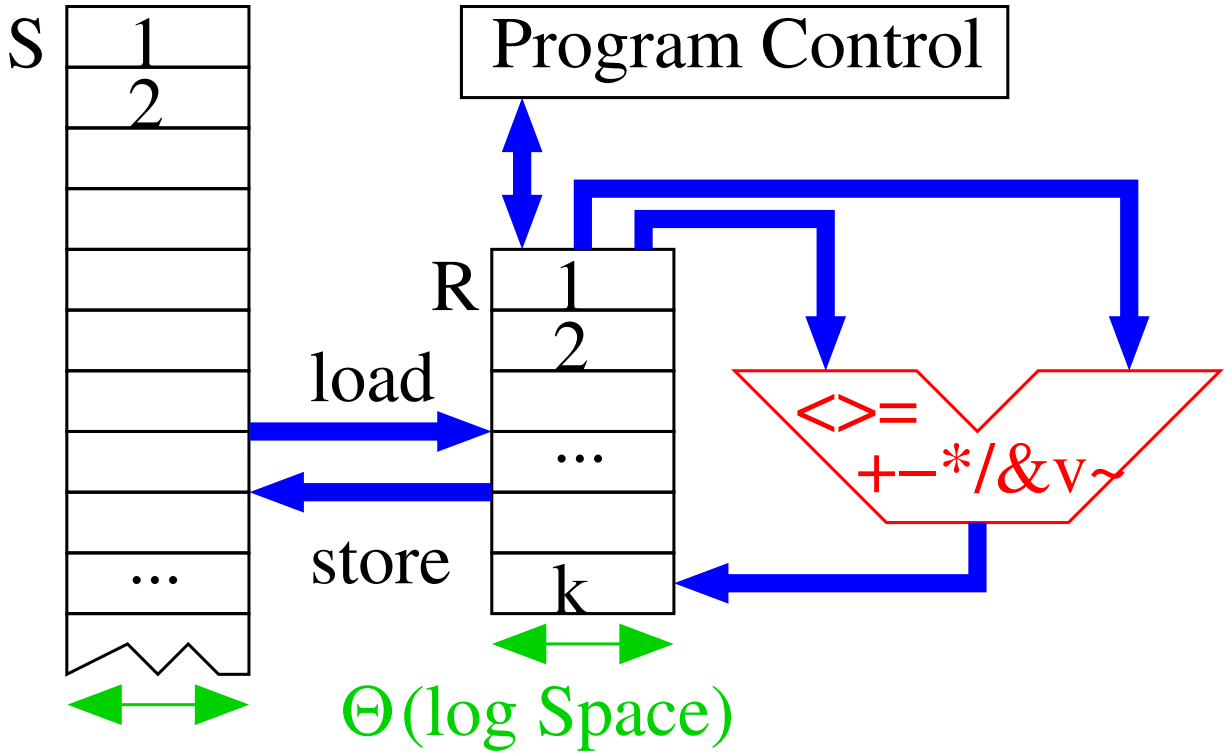
Достъп до паметта



$R_i := S[R_j]$ зарежда съдържанието на клетката от паметта $S[R_j]$ в регистър R_i.

$S[R_j] := R_i$ запомня регистъра R_i в клетката $S[R_j]$.

Изчисление

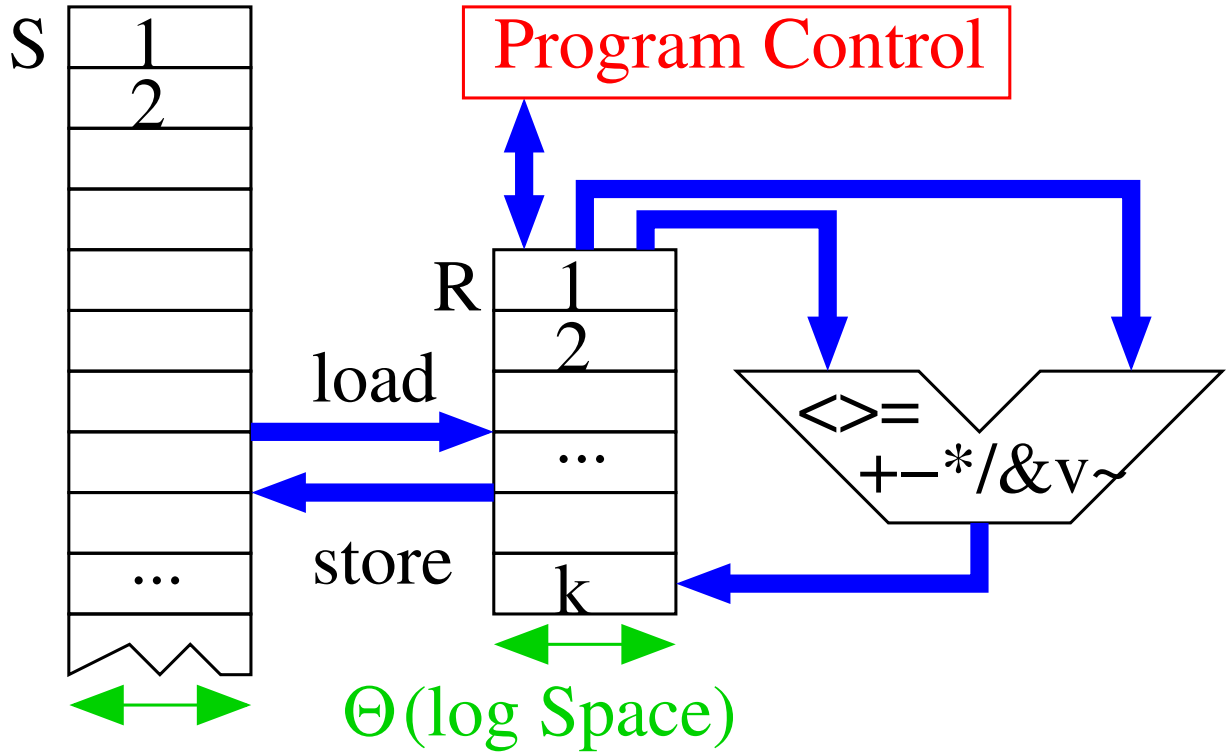


$R_i := R_j \odot R_\ell$ Регистрова аритметика.

‘$\odot$’ означава голямо количество от операции

аритметични, сравнения, логически

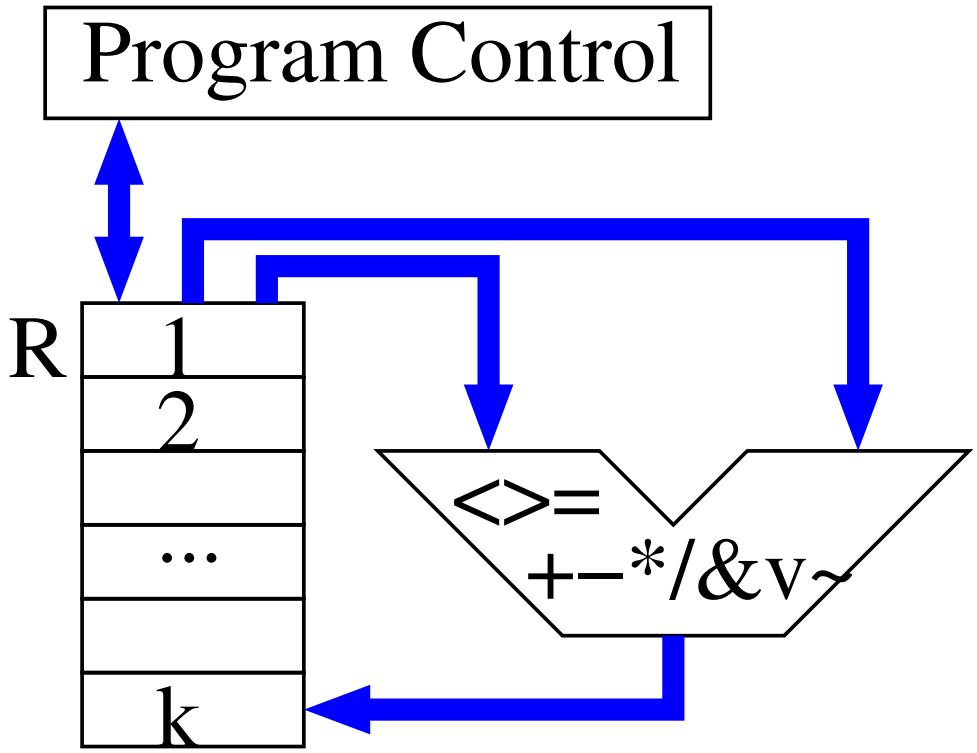
Условен преход



JZ j, R_i продължава изпълнението на прогармата с команда с етикет j (goto j) ако $R_i = 0$

Машини с Неограничени Регистри (МНР)

$\approx$ RAM $-$ памет $+$ произволно големи числа $+$ произволен (краен) брой (Шефердсон, Стържиц, 1963)



МНР-изчислимост

Конфигурация: $(q, R_1, \ldots, R_k)$

q е брояч на програмните команди

"'$\vdash^*$"' дефинирахме.

$f : \mathbb{N}^{k'} \to \mathbb{N}$, $k' \leq k$ е МНР изчислима $\Leftrightarrow$

$\exists$МНР $M : \forall n_1, \ldots, n_{k'}, m \in \mathbb{N}$:

$$f(n_1, \ldots, n_{k'}) = m \Leftrightarrow$$

$$(1, n_1, \ldots, n_{k'}, 0^{k-k'}) \vdash^* (q, f(n_1, \ldots, n_k), \ldots)$$

with PROGRAM$[q]$ =HALT

RAM-изчислимост

Конфигурация: $(q, R_1, \ldots, R_k, S)$

Нека M е RAM:

вход: $w \in \Sigma^n$ в $S[1],\ldots,S[n]$

изход: $f_M(w)$ в $S[1],\ldots,S[|f_M(w)|]$

когато HALT-командата се изпълни.

Рзаглеждаме естествени числа и трябва да ги кодираме!

Аналогично като MT

Езици за програмиране от високо ниво

Java, C/C++, Pascal,...

ML, Lisp,...

Prolog, Oz,...

...

са най-популярните програмни модели за нас.

Компилаторите транслират програмата в RAM-код.

МНР емулира RAM

Идея: допълнителен регистър R_S представящ паметта:

$$R_S = \sum_i S[i] \cdot 2^{bi}$$

с $b =$ броят на RAM битовете

$S[i]$ в R_j зареждане:

$$R_j := \frac{R_S}{2^{bi}} \bmod 2^b \ .$$

$S[i] := 0$:

$$R_S := R_S - (\frac{R_S}{2^{bi}} \bmod 2^b)2^{bi}$$

R_j в $S[i]$ запазване:

$$S[i] := 0;\ R_S := R_S + R_j \cdot 2^{bi}$$

Квантов компютър

- Един Qubit запеметява суперпозициите 0 и 1 (и 0 и 1- едновременно).
- Изчисления с n Qubit-а дава суперпозицията на 2^n класически изчисления
- Квантовият компютър може за полиномиално време да факторизира и може да получи дискретни логаритми
- Това дава възможност много криптографски алгоритми да се реализизрат бързо

Квантов компютър: теория на изчислимостта и сложността

- Предположения от теория на сложността:
  - Факторизизрането, DLog не са в P (същото и с рандомизацията)
  - Факторизизрането, DLog не са NP.
- Машините на Тюринг могат да симулират квантовия компютър

Резултат: Квантовите компютри са по-бързи, но не по-мощни от класическите компютри

2.3 Примитивно-рекурсивни функции

Разглеждаме функции в множеството на естествените числа $\mathbb{N}$.

Основни функции

- $O(x) = 0$
- $S(x) = x + 1$
- $I_k^n(x_1, \ldots, x_n) = x_k,\ k \leq n$

2.4 Примитивно-рекурсивни функции

Основни операции

- Суперпозиция

  $h(x_1,\ldots,x_n) = f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n))$

- Примитивна рекурсия

  $h(x_1,\ldots,x_n,0) = f(x_1,\ldots,x_n)$

  $h(x_1,\ldots,x_n,y+1) = g(x_1,\ldots,x_n,y,h(x_1,\ldots,x_n,y))$

Примитивно-рекурсивни функции

Една функция е примитивно рекурсивна, ако се получава от основните с помощта на операциите суперозиция и примитивна рекурсия, приложени краен брой пъти.

Примери:

- $x+0=x$
  $x+(y+1)=(x+y)+1$
- $x.0=0$
  $x.(y+1)=x.y+x$
- $x^0=1$
  $x^{y+1}=x^y.x$

Примитивно-рекурсивни функции

Примери:

- $x \dot{-} 1 = 0$, ако $x = 0$; $x \dot{-} 1 = x - 1$ ако $x > 0$.
- $x \dot{-} y = 0$, ако $x < y$; $x \dot{-} y = x - y$ ако $x \geq y$.
- $sg(x) = 0$, ако $x = 0$; $sg(x) = 1$ ако $x > 0$.
- $\overline{sg}(x) = 1$, ако $x = 0$; $\overline{sg}(x) = 0$ ако $x > 0$.
- $|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$.
- $x \leq y \Leftrightarrow x \dot{-} y = 0$

Операции, запазващи примитивната рекурсивност

- if then else

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ако } p(x) = 0 \\ g(x) & \text{иначе} \end{cases}$$

$$h(x) = \overline{sg}(p(x)).f(x) + sg(p(x)).g(x)$$

- Ограничено сумиране

$$g(x,y) = \Sigma_{z<y} f(x,z)$$

- Ограничена минимизация

$$g(x,y) = \begin{cases} \mu z_{z<y}[f(x,z) = 0] & \text{ако има такова} \\ y & \text{иначе} \end{cases}$$

Примитивно-рекурсивни функции

- $x \mod y$, като $x \mod 0 = x$

  $0 \mod y = 0$

  $$x+1 \mod y = \begin{cases} x \mod y + 1 & \text{ако } x \mod y + 1 \neq y \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

- x/y, $x/0 = 0$.

- $$\text{div}\ (x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ако } x \mod y = 0 \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

- $\mathrm{D(x)} = \Sigma_{\mathrm{z<x+1}} \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{div(x,z)})$ броят на делителите на x.

Примитивно-рекурсивни функции

- $pr(x) = \mathrm{sg}|\mathrm{D}(\mathrm{x}) - 2|$ x е просто число
- $p(x)$= простото число с номер x $p(0) = 2, p(1) = 3, \ldots$.
  $p(0) = 2$
  $p(x+1) = \mu z_{\leq 2^{2^x}}[z > p(x)\ \&\ pr(z) = 0]$.
- $(x)_y =$ степента, с която пр. число с ном. y участва в разлагането на x.
  $(x)_y = \mu t_{\leq x}[\mathrm{div}(\mathrm{p}(\mathrm{y})^{\mathrm{t}+1}, \mathrm{x}) = 1]$.

Примитивно-рекурсивно кодиране

- $\pi(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$ е примитивно рекурсивна
- $L(\pi(x,y)) = x$ и $R(\pi(x,y)) = y$ декодиращи функции

  $L(z) = (z+1)_0$

  $R(z) = ((z+1)/2^{(z+1)_0})/2.$
- Всяко число е код на наредена двойка
- Кодирането е еднозначно.

Примитивно-рекурсивни и μ-рекурсивни функции

μ операция:

$f(x_1,\ldots,x_n) = \mu z[g(x_1,\ldots,x_n,z) = 0] \Leftrightarrow$

$(\forall y < z)(g(x_1,\ldots,x_n,y) > 0)\ \&\ g(x_1,\ldots,x_n,z) = 0$

Една функция е μ-рекурсивна, ако се получава от основните с помощта на операциите суперозиция, примитивна рекурсия и μ-операция, приложени краен брой пъти.

Пример: никъде недефинираната функция

$\emptyset(x) = \mu z[S(x) = 0]$.

Теорема μ-рекурсивни функции съвпадат с изчислимите с МТ.

2.5 Функция на Акерман

[Акерман 1928, Хермес]

Function $a(x,y)$

if $x = 0$ then return $y+1$

if $y = 0$ then return $a(x-1,1)$

return $a(x-1,a(x,y-1))$

Твърдение: a е тотална, МТ-изчислима функция

Д-во:

рекурсия $\rightsquigarrow$ стек с RAM $\rightsquigarrow$ МТ

Тоталност на функцията на Акерман

Д-во: Индукция по лексикографската наредба на (x,y):

База: $a(0,y) = y+1$

Индукционна стъпка за $y = 0$:

$a(x,0) = a(x-1,1)$,

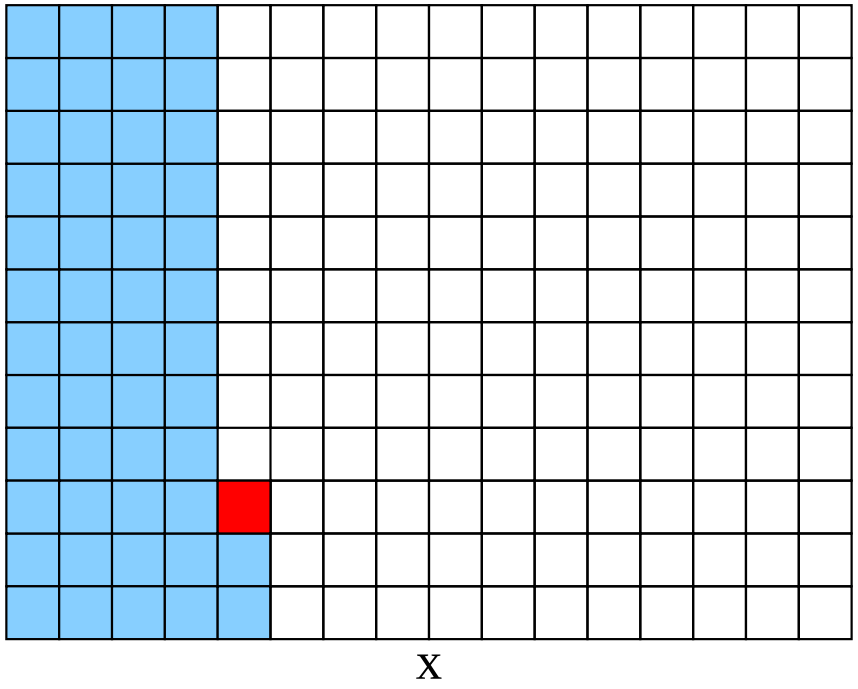
завършва по ИП $(x-1,1) < (x,0)$

Индукционна стъпка за $x,y > 0$:

$a(x-1,a(x,y-1))$ завършва

$(x,y-1) < (x,y)$ и

$(x-1,a(x,y-1)) < (x,y)$



Функцията на Акерман не е примитивно рекурсивна

Д-во: Да допуснем, че a е примитивно рекурсивна.
$\longrightarrow a(n,n) = g(n)$ е примитивно рекурсивна

Но ние ще покажем:

Лема Е: $\forall$ пр. р. $h : \exists k : \forall \overline{x} \in \mathbb{N}^n : h(\overline{x}) < a(k, \max(\overline{x}))$.

Тогава $(\exists k) a(n,n) < a(k,n)$ за всяко $n \Rightarrow a(k,k) < a(k,k)$.

Противоречие.

Пример

$$a(0,y) = y+1$$

$$\begin{aligned} a(1,y) &= a(0,a(1,y-1)) = a(1,y-1)+1 = \\ &\quad a(0,a(1,y-2))+1 = a(1,y-2)+2 = \cdots = \\ &\quad a(1,0)+y = y+a(0,1) = y+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(2,y) &= a(1,a(2,y-1) = 2+a(2,y-1) = \cdots \\ &\quad = 2y+a(2,0) = 2y+a(1,1) = 2y+3 \end{aligned}$$

Пример

$$
\begin{aligned}
a(2,y) &= 2y+3 \\
a(3,y) &= a(2,a(3,y-1)) = 2a(3,y-1)+3 \\
&= 2a(2,a(3,y-2))+3 = 4a(3,y-2)+3(1+2) \\
&= 4a(2,a(3,y-3)+3(1+2) = 8a(3,y-3)+3(1+2+4) \\
&= \cdots = 2^y \underbrace{a(3,0)}_{=5} + 3(\underbrace{1+2+\cdots+2^{y-1}}_{=2^y-1}) \\
&= 2^{y+3}-3
\end{aligned}
$$

Пример

$$a(3,y) = 2^{y+3} - 3$$

$$a(4,y) = a(3,a(4,y-1)) = 2^{a(4,y-1)+3} - 3$$

$$= 2^{a(3,a(4,y-2))+3} - 3 = 2^{2^{a(4,y-2)+3}-3+3} - 3$$

$$= 2^{2^{a(3,a(4,y-3))+3}} - 3 = 2^{2^{2^{a(4,y-3)+3}-3+3}} - 3$$

$$= \cdots = 2^{\overset{2}{\vdots}^{\overbrace{a(4,0)}^{=a(3,1)=2^{1+3}-3}+3}} - 3 = 2^{\overset{2^{16}}{\vdots}} - 3$$

$$a(4,2) = 2^{2^{16}} - 3 = 2^{65536} - 3$$

Монотонност на функцията на Акерман

Лема A: $y < a(x,y)$

Лема B: $a(x,y) < a(x,y+1)$

Лема C: $a(x,y+1) \leq a(x+1,y)$

Лема D: $a(x,y) < a(x+1,y)$

Лема BD: $a(x,y) \leq a(x',y')$ ако $x \leq x'$ и $y \leq y'$

Лема E: $a(x,2y+1) \leq a(x+1,y)$

Д-во: Упражнение. Индукция,...

Лема Е: $\forall$ пр. рек. функция

$h : \exists k : \forall n = \max(x_1, \ldots, x_n) : h(x_1, \ldots, x_n) < a(k, n)$.

Д-во: Индукция по дефиницията на пр. рек. функции.

База на индукцията:

$O(n) = o < n + 1 = a(0, n)$.

$S(n) = n + 1 < 2n + 3 = a(2, n)$.

$I_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i < n + 1 = a(0, n)$, $n = \max x_1, \ldots, x_k$.

Индукционна стъпка за $f = f_2.f_1$ (за простота),
$n = \max(\overline{x})$:
По ИП $\exists k_1, k_2 : f_1(n) < a(k_1, n) \wedge f_2(m) < a(k_2, m)$.
Нека $k_3 = \max\{k_1 - 1, k_2\}$. Тогава:

$$
\begin{aligned}
f(\overline{x}) &\leq f_2(f_1(n)) && \text{Деф. } f \\
&< a(k_2, f_1(n)) && \text{ИП} \\
&< a(k_2, a(k_1, n)) && \text{ИП,монотонност} \\
&\leq a(k_3, a(k_3 + 1, n)) && \text{монотонност} \\
&= a(k_3 + 1, n + 1) && \text{Деф. } a \\
&\leq a(k_3 + 2, n) && \text{Лема B}
\end{aligned}
$$

Индукционна стъпка за $f = g(f_1 \dots f_n)$, $n = \max(\overline{x})$:

По ИП

$\exists k, k_1 \dots k_n : g(\overline{x}) < a(k,n), f_1(\overline{x}) < a(k_1,n) \wedge f_2(\overline{x}) < a(k_n,n).$

Нека $m = \max\{k, k_1, \dots, k_n\}$. Тогава: $f_i(\overline{x}) < a(m+1,n)$.

$$
\begin{aligned}
f(\overline{x}) &\leq a(m, \max(f_1(\overline{x}), \dots, f_n(\overline{x}))) && \text{ИП } g \\
&< a(m, a(m+1,n)) && \text{ИП} \\
&= a(m+1, n+1) && \text{Деф. } a \\
&\leq a(m+2, n) && \text{Лема B}
\end{aligned}
$$

Индукционна стъпка за

$h(\overline{x},0) = f(\overline{x})$, $h(\overline{x},y+1) = g(\overline{x},y,h(\overline{x},y))$, $n = \max(\overline{x})$:

По ИП $\exists k_1 : f(n) < a(k_1,n)$,

$\exists k_2 : g(n,y,z) < a(k_2,\max(n,y,z))$.

Нека $k = \max(k_1,k_2)$.

С индукция по y : $h(\overline{x},y) \leq a(k+1,y+\max(\overline{x}))$:

$$\begin{aligned} h(\overline{x},0) &= f(\overline{x}) \leq a(k+1,\max(\overline{x})) \\ h(\overline{x},y+1) &= g(\overline{x},y,h(\overline{x},y)) \\ &< a(k,\max(\overline{x},y,h(\overline{x},y))) \\ &\leq a(k,(a(k+1,y+\max(\overline{x})) \\ &\leq a(k+1,y+1+\max(\overline{x})). \end{aligned}$$

Индукционна стъпка за
$h(\overline{x},0) = f(\overline{x}),\ h(\overline{x},y+1) = g(\overline{x},y,h(\overline{x},y))$:

$$\begin{aligned} h(\overline{x},y) &\leq a(k+1,y+\max(\overline{x})) \\ &\leq a(k+1,2\max(\overline{x},y)) \\ &\leq a(k+1,2\max(\overline{x},y)+1) \\ &\leq a(k+2,\max(\overline{x},y)) \end{aligned}$$

Busy Beaver

$\Sigma(n)$: $\max_\delta$ # единици, които са на лентата след като ДМТ $(\{1,\ldots,n,Z\},\emptyset,\{0,1\},\delta,1,\{Z\})$ завършва (празен вход).

$S(n)$: $\max_\delta$ #преходи, които една ДМТ $(\{1,\ldots,n,Z\},\emptyset,\{0,1\},\delta,1,\{Z\})$ прави преди да завърши(празен вход).

Busy Beaver

Да допуснем, че S(n) е изчислима функция.

EvalS : MT, остойностява S(n)

Clean изтрива 1-те на лентата

Double $n+n$

Double | EvalS | Clean - с n_0 състояния

Create n_0 - създава n_0 1-ци на празна лента

BadS : Create n_0 | Double | EvalS | Clean - $N = n_0 + n_0$ с.

От празна лента първо пише n_0 1-ци и след това ги удвоява, пишейки N 1-ци. Тогава BadS пише S(N) 1-ци на лентата, и накрая изтрива 1'ците и завършва. Но изтриването прави поне S(N) стъпки, така времето на BadS е $>$ от S(N), противоречие с деф. на S(n).

Busy Beaver

$\Sigma(n)$, $S(n)$ са тотални не изчислими функции.

n	$\Sigma(n)$	$S(n)$
1	1	1
2	4	6
3	6	21
4	13	107
5	$\geq$4 098	$\geq$47 176 870
6	$> 1.29 \cdot 10^{865}$	$> 3 \cdot 10^{1730}$

[http://www.drb.insel.de/~heiner/BB/],

[http://www.logique.jussieu.fr/~michel/ha.html]

Busy Beaver

n: 6 5 4 3 2

q/in 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1

A: B1R F0L; B1R C1L; B1R B1L; B1R Z1L; B1R B1L

B: C0R D0R; C1R B1R; A1L C0L; B1L C0R; A1L Z1R

C: D1L E1R; D1R E0L; Z1R D1L; C1L A1L;

D: E0L D0L; A1L D1L; D1R A0R;

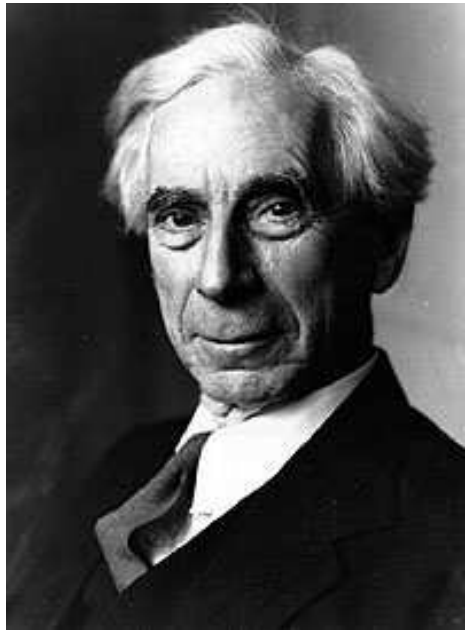
E: A0R C1R; Z1R A0L; n=1:

F: A1L Z1R; H1N ---

2.6 Проблемът за завършване, Неразрешимост, Сводимост

- Гьоделова номерация: МТ могат да оперират над себе си като вход
- Важен пример: Универсална МТ
- Диагонален метод: един неразрешим език
- Сводимост: показва, че и други проблеми са неразрешими.

Парадокси и Self reference



Бръснарят в един малък град
бръсне тези и само тези хора,
които не се бръснят сами.

.

Кой бръсне бръснаря?

Парадокси и Self reference

Даниел Дйосентриб решил да изобрети една машина която всичко знае.

Да	Не

Задавате да/не въпрос и отговорът светва.

Дагоберт Дъг иска да купи машината.

Но е решил да провери дали работи правилно.

Задава въпрос на машината:

Ще ми отговориш ли с не?

Какво се случва?

Разрешимост

$A \subseteq \Sigma^*$ е (разрешимо), ако

характеристичната му функция χ_A е изчислима.

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{ако } w \in A \\ 0 & \text{ако } w \notin A \end{cases}$$

Полуразрешимост

$A \subseteq \Sigma^*$ е полуразрешимо, ако
"'полу"' характеристичната му функция χ_A е изчислима.

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{ако } w \in A \\ \bot & \text{ако } w \notin A \end{cases}$$

Свойства на разрешимите и полуразрешимите множества

Твърдение: $A \subseteq \Sigma^*$ разрешимо $\Leftrightarrow$
A и $\overline{A}$ са полуразрешими

Д-во: Нека МТ

M_A полуразрешава A и

$M_{\overline{A}}$ полуразрешава $\overline{A}$

for $s := 1$ to ∞ do

if M_A завършва за s стъпки then Accept

if $M_{\overline{A}}$ завършва за s стъпки then Reject

Свойства на разрешимите множества

Твърдение: $A, B \subseteq \Sigma^*$ разрешими $\Rightarrow$

$A \cup B$,

$A \cap B$,

$A \setminus B$,

$A \cdot B$,

A^* са разрешими.

Примери : $\Sigma^*, \emptyset$,

Всяко крайно множество е разрешимо.

Свойства на полуразрешимите множества

Твърдение: $A, B \subseteq \Sigma^*$ полуразрешими $\Rightarrow$
$A \cup B$ и $A \cap B$ са полуразрешими.

Нека M_1 и M_2 полуразрешават A и B

$A \cup B$: for $j := 1$ to ∞ do
    if M_1 приема w след j стъпки then Accept
    if M_2 приема w след j стъпки then Accept

$A \cap B$: for $j := 1$ to ∞ do
    if M_1 приема w след j ст.& M_2 приема w след j ст. then Acc

Рекурсивна номеруемост

$A \subseteq \Sigma^*$ рекурсивно номеруемо, ако

$A = \emptyset$ или $\exists$тотална изчислима функция $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$:

$$A = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$$

Твърдение: A е рекурсивно номеруемо $\Leftrightarrow$ A е полуразрешимо

Рекурсивна номеруемост $\longrightarrow$ полуразрешимост

Нека A е рекурсивно номеруемо с помощта на f.

Function $\chi'_A(x)$

for $n := 0$ to ∞ do

if $f(n) = x$ then return 1

Рекурсивна номеруемост $\longrightarrow$ полуразрешимост

- Нека $\pi(m,k) = 2^m(2k+1) - 1$ - е кодираща функция на всички двойки естествени числа.
- Всяко естествено число n е код на точно една двойка числа $n = \pi(m,k)$.
- Нека $L(\pi(m,k)) = m$ и $R(\pi(m,k)) = k$ са декодиращите функции.
- π, L, R са изчислими функции.
- Да разгледаме редицата на всички думи в Σ^*: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots$, наредени така: $|\alpha_i| < |\alpha_{i+1}|$ или $|\alpha_i| = |\alpha_{i+1}|$ и α_i е лексикографски по-малко от α_{i+1}.
- Например: $a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots$

Полуразрешимо $\longrightarrow$ рекурсивно номеруемо

Нека M е МТ полуразрешаваща A.

Ако $A = \emptyset$: тривиално.

Иначе дефинираме функция $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ с област на стойностите A. Нека a е фиксиран елемент на A.

$$f(n) = \begin{cases} \alpha_{L(n)} & \text{ако } M(\alpha_{L(n)}) \downarrow \text{ за R(n) стъпки,} \\ a & \text{иначе.} \end{cases}$$

Function $f(n)$

Интерпретираме n като код на двойката $n = \pi(m, k)$

Да разгледаме думата с номер m: $u = \alpha_m$

if M завършва при u за $\leq k$ стъпки then return u

else return a

Полуразрешимо $\longrightarrow$ рекурсивно номеруемо

- f е тотална
- f приема само стойности от A
- $\forall u \in A \exists k : M$ приема u за k стъпки
- $f(\pi(m,k)) = \alpha_m$

■

Задача: Да се докаже, че ако $A \subseteq \Sigma^*$ е безкрайно, то A е разрешимо тогава и само тогава, когато съществува тотална изчислима функция $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$:

$A = \{f(0) < f(1) < f(2) < \ldots\}$ в лексикографски ред по големина.

Еквивалентни определения

$A \subseteq \Sigma^*$

- A е рекурсивно номеруемо
- A е полуразрешимо
- A е от Чомски тип 0
- $A = L(M)$ за МТ M
- χ'_A е Тюринг, МНР, RAM, ... изчислима
- A е дефиниционна област на една (частична) изчислима функция

2.7 Неразрешими Проблеми

Номерация на машините на Тюринг

Машината на Тюринг $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ наричаме стандатизирана, ако

- $Q = \{1, \ldots, n\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$, $(\sqcup = 2)$
- $s = 1$
- $F = \{2\}$

за подходяща константа n

Гьоделов номер $\langle M \rangle$ на машина на Тюринг M

Дефинираме следните изрази в $\{0,1\}$:
Кодираме $\delta(q,a) = (r,b,d)$ by $0^q\,1\,0^{a+1}\,1\,0^r\,1\,0^{b+1}\,1\,0^d$
където d е кодът на посоките: $N = 1, L = 2, R = 3$.

Машините на Тюринг ще кодираме с двоични числа:

$$111\text{code}_1 11\text{code}_2 11 \ldots 11\text{code}_z 111,$$

code_i for $i = 1,\ldots,z$: всички стойности на функцията δ.

Конвенция:
n не е Гьоделов номер на някоя МТ,
$\rightarrow$ n описва една МТ, която приема $\emptyset$

Гьоделова номерация

Наблюдение

Гьоделовата номерация дава едно инективно изображение на стандартизираните МТ в естествените числа

Пример

Нека $M = (\{1,2,3\}, \{0,1\}, \{0,1,\sqcup\}, \delta, 1, \{2\})$, с

$\delta(1,1) = (3,0,R)$

$\delta(3,0) = (1,1,R)$

$\delta(3,1) = (2,0,R)$

$\delta(3,\sqcup) = (3,1,L)$

$\langle M \rangle$ е тогава:

111010010001010001100010101001000110001001001010001100010001000100100111

Универсална машина на Тюринг

$$U = (Q_u, \{0,1\}, \{0,1,\sqcup\}, \delta_u, s_u, F_u)$$

вход: $\langle M \rangle w$

M е симулираната МТ, w е двоично кодираният вход.

U симулира M над w.

U приема $\langle M \rangle w$, ако M приема w

Универсална машина на Тюринг

3 ленти:

1. $\langle M \rangle$
2. кодът на състоянието q_M на M (унарно кодирано)
3. съдържанието на лентата за w на M

Универсална машина на Тюринг

if prefix v на w е код на една МТ then // 111tuple111

преместваме v на лентата $\langle M \rangle$

$q_M := 1$ // началното състояние на M

while $q_M \neq 2$ do // крайно състояние на M

преместваме се до началото на $\langle M \rangle$

foreach $(q, a, r, b, d) \in \langle M \rangle$ do // поле по поле

if $q = q_M$ then // сравняваме с q_M

if входният символ на лента 3$= a$ then

$q_M := r$ // копираме на лента 2

слагаме b на лента 3

Движението по лента 3 е съгласно d

Диагонален език L_d

Нека M_i е МТ с код $\langle M_i \rangle = i$.

Нека w_i двоичното представяне на i.

$L_d := \{w_i : M_i$ не приема (не завършва над) $w_i\}$

Твърдение: L_d не е полуразрешим

Д-во:

Да допуснем:

$L_d = \{w_i : M_i$ не приема (не завършва над) $w_i\}$ е полуразрешим.

Деф. "'полуразрешим"' $\overrightarrow{\quad}$ $\exists M_i : M_i$ приема L_d.

Как работи M_i над w_i?

$w_i \in L_d \overset{\text{Деф. } M_i}{\longrightarrow} w_i$ ще се приеме от M_i. $\overset{\text{Деф. } L_d}{\longrightarrow} w_i \notin L_d$

$w_i \notin L_d \overset{\text{Деф. } M_i}{\longrightarrow} w_i$ няма да се приеме от M_i. $\overset{\text{Деф. } L_d}{\longrightarrow} w_i \in L_d$

И в двата случая имаме противоречие.

Следствие:

$\overline{L}_d = \{w_i : M_i \text{ приема } w_i\}$ е неразрешим

Забележете, че $\overline{L}_d$ е полуразрешим:

изпълняваме универсалната машина над $\langle M_i \rangle w_i$.

Да допуснем: $\overline{L}_d$ е разрешим.

$\rightarrow \exists M : M$ разпознава $\overline{L}_d$

Променяме $M \rightsquigarrow M'$ така M' разпознава L_d

(Заменяме: приема/не приема за заключителните състояния).

Противоречие.

Следствие:

$\overline{L_d}$ е полуразрешим и не е разрешим.

Полуразрешимите езици не са затворени относно допълнение.

Неразрешими проблеми

Не съществува програма P, такава че

$$\text{halts}(\langle P\rangle, X)) = \begin{cases} yes & \text{ако } P(X) \text{ завършва} \\ no & \text{иначе} \end{cases}$$

Ако такава програма съществува, то:

D(X)= if halts(X,X) then loop(X) else halt

D($\langle D\rangle$)= if halts($\langle D\rangle$,$\langle D\rangle$) then loop($\langle D\rangle$) else halt

Ако halts($\langle D\rangle, \langle D\rangle$)=yes, то $\downarrow$D($\langle D\rangle$), но $\uparrow$D($\langle D\rangle$).
Ако halts($\langle D\rangle, \langle D\rangle$)=no, то $\uparrow$D($\langle D\rangle$), но $\downarrow$D($\langle D\rangle$).

Неразрешими проблеми

Не съществува програма is-safe, която не е вирус и:

$$\text{is}-\text{safe}(\langle P\rangle, X)) = \begin{cases} yes & \text{ако } P(X) \text{ не пуска вирус} \\ no & \text{иначе} \end{cases}$$

D(X)= if is-safe(X,X) then virus(X) else print "Hello"

D($\langle D\rangle$)= if is-safe($\langle D\rangle$,$\langle D\rangle$) then virus($\langle D\rangle$) else print "Hello"

Ако is-safe($\langle D\rangle$,$\langle D\rangle$)=yes, то D($\langle D\rangle$) не е активирала вирус, но virus($\langle D\rangle$) е пуснат.
Ако is-safe($\langle D\rangle$,$\langle D\rangle$)=no, то вирус е активиран $\Rightarrow$ is-safe е пуснала вирус.

Проблемът за завършване (Стоп проблемът)

$H := \{w_i v : M_i$ завършва при $v\}$

Твърдение: H не е разрешим.

Д-во: Да допуснем, че H е разрешим.

Тогава има МТ M_i, която разпознава H.

$w_i \in \overline{L}_d$?

$\Leftrightarrow M_i$ приема w_i.

$\Leftrightarrow w_i w_i \in H$.

Така $\overline{L}_d$ също излиза разрешим. Противоречие.

Защо L_d се нарича диагонален?

$(u,v) \in R \Leftrightarrow u = \langle M \rangle$ (МТ) и M приема v

$R_u = \{v \mid (u,v) \in R\}$

$D = \{u \mid (u,u) \notin R\}$. Следователно $D \neq R_u$ за всяко u.

Ограниченият проблем за завършване

Твърдение:

$\{w_i v \# w_j : M_i$ завършва при v за най-много j стъпки$\}$

е разрешимо.

Д-во:

Пускаме универсалната МТ U да работи над $w_i v$

j симулиращи стъпки.

Други неразрешими проблеми

Дадено: машини на Тюринг T, T'

- $L(T) = \emptyset$? празнота
- $|L(T)| = \infty$? безкрайност
- $L(T) = \Sigma^*$? пълнота
- $L(T) = L(T')$? еквивалентност

Неразрешимост на празнотата

Да допуснем, че $\{i : L(M_i) = \emptyset\}$ е разрешим.

Ще покажем, че $\overline{L_d}$ ще излезе разрешим.

$\overline{L_d} = \{w_i : M_i \text{ приема } w_i\}$?

Конструираме машина на Тюринг $T(i)$:

> изтрий входа
>
> изпълни M_i над w_i
>
> if state$(M_i) \neq 2$ then безкраен цикъл

Така $L(T(i)) \neq \emptyset$, ако и само ако $w_i \in \overline{L_d}$.

Следователно $\overline{L_d}$ е разрешим.

Противоречие.

Неразрешимост на пълнотата

$L(T) = \Sigma^*$?

Същото доказателство като празнотата! Тук $T(i)$ игнорира входа си!

$L(T(i)) = \Sigma^*$, ако и само ако $w_i \in \overline{L}_d$.

Метапрограмиране

Доказателството на празнотата взима една програма и я трансформира в друга.

Важна техника за програмиране.

Деф. Нека L_1 и L_2 са езици в Σ^*. Казваме, че $L_1 \leq L_2$ (L_1 се свежда до L_2), ако има тотална изчислима функция f за която
$u \in L_1 \Leftrightarrow f(u) \in L_2$.

Ако L_2 е разрешим (полуразрешим), то L_1 е разрешим (полуразрешим).

Ако L_1 не е разрешим (полуразрешим), то L_2 не е разрешим (полуразрешим).

Други неразрешими проблеми

Твърдение. Следните проблеми не са разрешими:
1. По дадена МТ M дали M завършва над празна лента—$\{w_i \mid M_i \text{ halts on } \varepsilon\}$.
Дво 1. $E = \{w_i \mid M_i \text{ halts on } \varepsilon\}$ не е разрешим.
Идея: Ще построим изчислима фунция f:
$\langle M \rangle v \in H \Leftrightarrow f(\langle M \rangle, v) \in E$.
Конструираме машина на Тюринг $T_{\langle M \rangle v}$:

> пише v на празната лента
>
> изпълнява M над v

Така f е функцията, която по дадени $\langle M \rangle, v$ дава кода на $T_{\langle M \rangle v}$.

2. По дадена МТ M дали M завършва над всеки вход.

—A=$\{w_i \mid \forall v(M_i \text{ halts on } v)\}$.

Д-во: $\langle M \rangle \in E \Leftrightarrow f(\langle M \rangle) \in A$.

Конструираме машина на Тюринг $T_{\langle M \rangle}$:

изтрива входа

изпълнява M над празна лента

Така f е функцията, която по дадено $\langle M \rangle$, дава кода на МТ $T_{\langle M \rangle}$.

3. По дадени МТ M_1 и M_2 дали те завършват над един и същи вход.

B=$\{w_i w_j \mid \forall v(\downarrow M_i(v) \Longleftrightarrow \downarrow M_j(v))\}$.

Д-во: Нека y е код на МТ, която завършва при всеки вход- например идентитета.

Дефинираме $f(w_i) = w_i y$. Тогава:

$\langle M \rangle \in A \Leftrightarrow f(\langle M \rangle) \in B$.

Теорема на Райс-Успенски

Нека **R** е класът от изчислимите функции.

Теорема Нека **S** е не тривиален клас от изчислими функции. $(S \neq \emptyset, S \neq R)$. Тогава множеството

$$C(S) = \{w_i \mid M_i \text{ изчислява функция } \in S\}$$

не е разрешим.

Д-во:

Да допуснем, че $C(S)$ е разрешим.

Случай 1. $\emptyset \notin S$ и $f \in S$. Тогава има машина на Тюринг M_f която изчислява f.

Нека M е МТ и w е дума.

$$T_{M,w}(x) = \begin{cases} M_f(x) & \text{if} \downarrow M(w) \\ \perp & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогава:

ако $\downarrow M(w) \Rightarrow (\forall x) T_{M,w}(x) = f(x)$

ако $\uparrow M(w) \Rightarrow T_{M,w}(x) = \emptyset$.

$$T_{M,w} \in S \Leftrightarrow \downarrow M(w).$$

$$\langle T_{M,w} \rangle \in C(S) \Leftrightarrow \langle M \rangle w \in H.$$

Противоречие.

Случай 2. $\emptyset \in S$. Разглеждаме: $R \setminus S$ не е тривиален. Тогава $C(S)$ не е разрешимо, и следователно $C(S)$ е неразрешимо.

Теорема на Райс-Успенски

Нека **R** е класът на всички полуразрешими езици в Σ^*.

Следствие Ако **S** е нетривиален клас от полуразрешими множества в Σ^* $(S \neq \emptyset, S \neq R)$. Тогава множеството

$$C(SL) = \{w_i \mid M_i \text{ приема (полуразрешава) множество от } \in S\}$$

не е разрешимо.

Д-во:

Да допуснем, че е. Тогава

$C(S) = \{w_i \mid M_i$ изчислява функция с dom от $\in S\}$

е разрешимо. Противоречие.

Self-reference

Да построим МТ, която при всеки вход, изтрива входа и печата собствения си описание (код). Тази машина наричаме SELF.

Лема : Съществува изчислима функция $q(w) = \langle P_w \rangle$- кодът на P_w и завършва, където $\forall x P_w(x) = w$.

(a) За всеки вход w построяваме сл. машина

P_w:

1. Изтрива входа.
2. Пише w на лентата.
3. Завършва.

(b) Изход : $\langle P_w \rangle$.

Self-reference

Конструкция на SELF: $\langle SELF \rangle = \langle AB \rangle$.

Работата на A: печатай $\langle B \rangle$

Работата на B: печатай $\langle AB \rangle$

$A = P_{\langle B \rangle}$ [$\Rightarrow q(\langle B \rangle) = \langle A \rangle$].

$B =$: При вход $\langle M \rangle$:

1. Пресмята $q(\langle M \rangle) = \langle M' \rangle$.
2. Комбинира резултата с $\langle M \rangle$ за да получи $\langle M'M \rangle$.
3. Печата и завършва.

Тогава SELF:

1. $A : \langle B \rangle$;
2. $B : q(\langle B \rangle) = \langle A \rangle$;
3. $B : \langle A \rangle \langle B \rangle \rightsquigarrow \langle AB \rangle$

Теорема за рекурсията

Теорема. Нека $t : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ е изчислима функция. Съществува МТ R, която изчислява функцията $r(w) = t(\langle R \rangle, w)$.

Например $t(a, w) = a$. $\exists R(R(w) = \langle R \rangle)$.

Д-во: Нека T е МТ изчисляваща функцията t. Построяваме МТ $\langle R \rangle = \langle ABT \rangle$:

A: $P_{\langle BT \rangle}$ $(\langle A \rangle = q(\langle BT \rangle)$.

$B : input \langle BT \rangle$;

$q(\langle BT \rangle) = \langle A \rangle \rightrightarrows (\langle ABT \rangle, w)$.

$R(\langle ABT \rangle, w) = r(w)$.

Втора теорема за рекурсията

Следствие. Нека $t : N \to N$ е тотална изчислима функция и за всяко $w \in \Sigma^*$

$\theta(a, w) = U(t(a), w)$.

Съществува МТ R, за която

$R(w) = \theta(\langle R \rangle, w) = U(t(\langle R \rangle), w) = t(\langle R \rangle)(w)$.

Post Correspondence Problem (PCP)

Дадено: крайни редици от двойки думи

$$K = (x_1, y_1) \cdots (x_n, y_n) \in (\Sigma^+ \times \Sigma^+)^*$$

Въпрос:

$$\exists i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\} : x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$$

?

Пример

- $K = ((1,111),(10111,10),(10,0))$ има решение $(2,1,1,3)$, имаме:

$$x_2x_1x_1x_3 = 1011111110 = 1011111110 = y_2y_1y_1y_3$$

- $K = ((10,101),(011,11),(101,011))$ няма решение:
  $(133\cdots)$

Пример [Mirko Rahn]

- $K = ((0,011),(001,1),(1,00),(11,110))$

  има най-късо решение с дължина 595:

  12112121121121121203212112130321203311213111212031212121121312103212112103212130321202111120331121321212131112121121111203203121203212112121213131203213032120320321031213033112131302103201112121112100210121212121203212112121212021203203213032121120321331303303212130303121131130320010321211121211312123032121203212103011032130323021212303331011203131021212131210203203120213131213211032111121212021111212121203213212121211203213031120321121213033121320312120321213102101032130321020212303302132101112032031212101032021231321103112123121203032133030032121221132031212101032021231321103112123121203032133030003

PCP е полуразрешим

Алгоритъм:

Procedure PCP$((x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n))$

for $k := 1$ to ∞ do

foreach $i_1\cdots i_k \in \{1..n\}^k$ do

if $x_{i_1}\cdots x_{i_k} = y_{i_1}\cdots y_{i_k}$ then

output $i_1\cdots i_k$

return

PCP е неразрешим

Идея: допускаме, че е разрешим → проблемът за завършване става разрешим

$x_{i_1} \dots x_{i_k} = y_{i_1} \dots y_{i_k} = (s)w\#\cdots\#u(f)v$

описва една приемаща последователност от МТ-конфигурации

10. проблем на Хилберт — Диофантови уравнения

Дадено:
полином на на много променливи p
с цели коефициенти.
Въпрос [Hilbert 1900]:

$$\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z} : p(x_1, \ldots, x_n) = 0?$$

[Matiyasevich 1970]: Проблемът е неразрешим.

Затвореност на разрешимите езици

Затворени относно

$\cup$

$\cap$

$\bar{\cdot}$

Затвореност на полуразрешимите езици

Затворени относно

$\cup$

$\cap$

Не са затворени относно

$\overline{\cdot}$

Незатвореност на полуразрешимите езици относно допълнение

Да допуснем : че са затворени относно допълнение.
Нека M полуразрешава L_d, $\overline{M}$ полуразрешава $\overline{L_d}$

Function isInLd(w)

for $j := 1$ to ∞ do

if M приема w след j стъпки then return true

if $\overline{M}$ приема w след j стъпки then return false

Поне едната от двете завършва.

$\rightarrow L_d$ разрешимо.

Противоречие.