Функции от по-висок ред

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, спец. Информатика, 2015/16 г.

28 октомври 2015 г.

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са “първокласни” стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$?

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са “първокласни” стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са “първокласни” стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `?`

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `#f`

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` $\longrightarrow$ `?`

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` $\longrightarrow$ Грешка!

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(define (branch p? f g x) (if (p? x) (f x) (g x)))`

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са “първокласни” стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(define (branch p? f g x) (if (p? x) (f x) (g x)))`
- `(branch odd? exp fact 4)` $\longrightarrow$?

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са “първокласни” стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(define (branch p? f g x) (if (p? x) (f x) (g x)))`
- `(branch odd? exp fact 4)` $\longrightarrow$ 24

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` ⟶ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` ⟶ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` ⟶ Грешка!
- `(define (branch p? f g x) (if (p? x) (f x) (g x)))`
- `(branch odd? exp fact 4)` ⟶ 24
- `(define (id x) x)`

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(define (branch p? f g x) (if (p? x) (f x) (g x)))`
- `(branch odd? exp fact 4)` $\longrightarrow$ `24`
- `(define (id x) x)`
- `(branch number? log id "1")` $\longrightarrow$ `?`

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` ⟶ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` ⟶ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` ⟶ Грешка!
- `(define (branch p? f g x) (if (p? x) (f x) (g x)))`
- `(branch odd? exp fact 4)` ⟶ `24`
- `(define (id x) x)`
- `(branch number? log id "1")` ⟶ `"1"`

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(define (branch p? f g x) (if (p? x) (f x) (g x)))`
- `(branch odd? exp fact 4)` $\longrightarrow$ `24`
- `(define (id x) x)`
- `(branch number? log id "1")` $\longrightarrow$ `"1"`
- `(branch string? number? procedure? symbol?)` $\longrightarrow$?

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(define (branch p? f g x) (if (p? x) (f x) (g x)))`
- `(branch odd? exp fact 4)` $\longrightarrow$ `24`
- `(define (id x) x)`
- `(branch number? log id "1")` $\longrightarrow$ `"1"`
- `(branch string? number? procedure? symbol?)` $\longrightarrow$ `#t`

Подаване на функции като параметри

В Scheme функциите са "първокласни" стойности.

Примери:

- `(define (fixed-point? f x) (= (f x) x))`
- `(fixed-point? sin 0)` $\longrightarrow$ `#t`
- `(fixed-point? exp 1)` $\longrightarrow$ `#f`
- `(fixed-point? + 0)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(define (branch p? f g x) ((if (p? x) f g) x))`
- `(branch odd? exp fact 4)` $\longrightarrow$ `24`
- `(define (id x) x)`
- `(branch number? log id "1")` $\longrightarrow$ `"1"`
- `(branch string? number? procedure? symbol?)` $\longrightarrow$ `#t`

Функции от по-висок ред

Дефиниция

Функция, която приема функция за параметър се нарича *функция от по-висок ред*.

Функции от по-висок ред

Дефиниция

Функция, която приема функция за параметър се нарича *функция от по-висок ред*.

- `fixed-point?` и `branch` са функции от по-висок ред

Функции от по-висок ред

Дефиниция

Функция, която приема функция за параметър се нарича *функция от по-висок ред*.

- `fixed-point?` и `branch` са функции от по-висок ред
- Примери за математически функции от по-висок ред?

Функции от по-висок ред

Дефиниция

Функция, която приема функция за параметър се нарича *функция от по-висок ред*.

- `fixed-point?` и `branch` са функции от по-висок ред
- Примери за математически функции от по-висок ред?
- Всички функции в λ-смятането са от по-висок ред!

Задачи за сумиране

Задача: Да се пресметнат следните суми:

1. $k^2 + (k+1)^2 + \ldots + 100^2$ за $k \leq 100$
2. $\int_a^b f(x) \approx \Delta x \big[f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \ldots + f(b) \big]$
3. $x + e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}} + \ldots$ докато поредното събираемо е $\leq 10^{1000}$

Задачи за сумиране

Задача: Да се пресметнат следните суми:

1. $k^2 + (k+1)^2 + \ldots + 100^2$ за $k \leq 100$
2. $\int_a^b f(x) \approx \Delta x \big[f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \ldots + f(b) \big]$
3. $x + e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}} + \ldots$ докато поредното събираемо е $\leq 10^{1000}$

```
(define (sum1 k)
  (if (> k 100) 0 (+ (* k k) (sum1 (+ k 1)))))
```

Задачи за сумиране

Задача: Да се пресметнат следните суми:

1. $k^2 + (k+1)^2 + \ldots + 100^2$ за $k \leq 100$
2. $\int_a^b f(x) \approx \Delta x \big[f(a) + f(a+\Delta x) + f(a+2\Delta x) + \ldots + f(b) \big]$
3. $x + e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}} + \ldots$ докато поредното събираемо е $\leq 10^{1000}$

```
(define (sum1 k)
  (if (> k 100) 0 (+ (* k k) (sum1 (+ k 1)))))

(define (sum2 a b f dx)
  (if (> a b) 0 (+ (* dx (f a)) (sum2 (+ a dx) b f dx))))
```

Задачи за сумиране

Задача: Да се пресметнат следните суми:

1. $k^2 + (k+1)^2 + \ldots + 100^2$ за $k \leq 100$
2. $\int_a^b f(x) \approx \Delta x \Big[f(a) + f(a+\Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \ldots + f(b) \Big]$
3. $x + e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}} + \ldots$ докато поредното събираемо е $\leq 10^{1000}$

```
(define (sum1 k)
  (if (> k 100) 0 (+ (* k k) (sum1 (+ k 1)))))

(define (sum2 a b f dx)
  (if (> a b) 0 (+ (* dx (f a)) (sum2 (+ a dx) b f dx))))

(define (sum3 x)
  (if (> x (expt 10 1000)) 0 (+ x (sum3 (exp x)))))
```

Задачи за сумиране

Задача: Да се пресметнат следните суми:

1. $k^2 + (k+1)^2 + \ldots + 100^2$ за $k \leq 100$
2. $\int_a^b f(x) \approx \Delta x \big[f(a) + f(a+\Delta x) + f(a+2\Delta x) + \ldots + f(b)\big]$
3. $x + e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}} + \ldots$ докато поредното събираемо е $\leq 10^{1000}$

```
(define (sum1 k)
  (if (> k 100) 0 (+ (* k k) (sum1 (+ k 1)))))

(define (sum2 a b f dx)
  (if (> a b) 0 (+ (* dx (f a)) (sum2 (+ a dx) b f dx))))

(define (sum3 x)
  (if (> x (expt 10 1000)) 0 (+ x (sum3 (exp x)))))
```

Задачи за сумиране

Задача: Да се пресметнат следните суми:

1. $k^2 + (k+1)^2 + \ldots + 100^2$ за $k \leq 100$
2. $\int_a^b f(x) \approx \Delta x \left[f(a) + f(a+\Delta x) + f(a+2\Delta x) + \ldots + f(b) \right]$
3. $x + e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}} + \ldots$ докато поредното събираемо е $\leq 10^{1000}$

```
(define (sum1 k)
  (if (> k 100) 0 (+ (* k k) (sum1 (+ k 1)))))

(define (sum2 a b f dx)
  (if (> a b) 0 (+ (* dx (f a)) (sum2 (+ a dx) b f dx))))

(define (sum3 x)
  (if (> x (expt 10 1000)) 0 (+ x (sum3 (exp x)))))
```

Задачи за сумиране

Задача: Да се пресметнат следните суми:

1. $k^2 + (k+1)^2 + \ldots + 100^2$ за $k \leq 100$
2. $\int_a^b f(x) \approx \Delta x \left[f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \ldots + f(b) \right]$
3. $x + e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}} + \ldots$ докато поредното събираемо е $\leq 10^{1000}$

```
(define (sum1 k)
  (if (> k 100) 0 (+ (* k k) (sum1 (+ k 1)))))

(define (sum2 a b f dx)
  (if (> a b) 0 (+ (* dx (f a)) (sum2 (+ a dx) b f dx))))

(define (sum3 x)
  (if (> x (expt 10 1000)) 0 (+ x (sum3 (exp x)))))
```

Обобщена функция за сумиране

Да се напише функция от по-висок ред `sum`, която пресмята сумата:

$$\sum_{\substack{i=a \\ i \leftarrow next(i)}}^{b} term(i).$$

Обобщена функция за сумиране

Да се напише функция от по-висок ред `sum`, която пресмята сумата:

$$\sum_{\substack{i=a\\ i\leftarrow next(i)}}^{b} term(i).$$

```
(define (sum a b term next)
  (if (> a b) 0 (+ (term a) (sum (next a) b term next))))
```

Приложения на sum

Решение на задачите за суми чрез `sum`:

$$\sum_{i=k}^{100} i^2$$

Приложения на `sum`

Решение на задачите за суми чрез `sum`:

$$\sum_{i=k}^{100} i^2$$

```
(define (square x) (* x x))
(define (1+ x) (+ x 1))
(define (sum1 k) (sum k 100 square 1+))
```

Приложения на sum

Решение на задачите за суми чрез sum:

$$\sum_{i=k}^{100} i^2$$

```
(define (square x) (* x x))
(define (1+ x) (+ x 1))
(define (sum1 k) (sum k 100 square 1+))
```

$$\sum_{\substack{i=a \\ i \to i+\Delta x}}^{b} \Delta x\, f(i)$$

Приложения на sum

Решение на задачите за суми чрез sum:

$$\sum_{i=k}^{100} i^2$$

```
(define (square x) (* x x))
(define (1+ x) (+ x 1))
(define (sum1 k) (sum k 100 square 1+))
```

$$\sum_{\substack{i=a \\ i \to i+\Delta x}}^{b} \Delta x \, f(i)$$

```
(define (sum2 a b f dx)
  (define (term x) (* dx (f x)))
  (define (next x) (+ x dx))
  (sum a b term next))
```

Приложения на sum

Решение на задачите за суми чрез sum:

$$\sum_{i=k}^{100} i^2$$

```
(define (square x) (* x x))
(define (1+ x) (+ x 1))
(define (sum1 k) (sum k 100 square 1+))
```

$$\sum_{\substack{i=a \\ i \to i+\Delta x}}^{b} \Delta x\, f(i)$$

```
(define (sum2 a b f dx)
  (define (next x) (+ x dx))
  (* dx (sum a b f next)))
```

Приложения на sum

Решение на задачите за суми чрез sum:

$$\sum_{i=k}^{100} i^2$$

```
(define (square x) (* x x))
(define (1+ x) (+ x 1))
(define (sum1 k) (sum k 100 square 1+))
```

$$\sum_{\substack{i=a\\ i\to i+\Delta x}}^{b} \Delta x\, f(i)$$

```
(define (sum2 a b f dx)
  (define (next x) (+ x dx))
  (* dx (sum a b f next)))
```

$$\sum_{\substack{i=x\\ i\to e^i}}^{10^{1000}} i$$

Приложения на sum

Решение на задачите за суми чрез sum:

$$\sum_{i=k}^{100} i^2$$

```
(define (square x) (* x x))
(define (1+ x) (+ x 1))
(define (sum1 k) (sum k 100 square 1+))
```

$$\sum_{\substack{i=a \\ i\to i+\Delta x}}^{b} \Delta x\, f(i)$$

```
(define (sum2 a b f dx)
  (define (next x) (+ x dx))
  (* dx (sum a b f next)))
```

$$\sum_{\substack{i=x \\ i\to e^i}}^{10^{1000}} i$$

```
(define (sum3 x)
  (sum x (expt 10 1000) id exp))
```

Обобщена функция за произведение

Да се напише функция от по-висок ред `product`, която пресмята:

$$\prod_{\substack{i=a \\ i \leftarrow next(i)}}^{b} term(i).$$

Обобщена функция за произведение

Да се напише функция от по-висок ред `product`, която пресмята:

$$\prod_{\substack{i=a \\ i \leftarrow next(i)}}^{b} term(i).$$

```
(define (product a b term next)
  (if (> a b) 1 (* (term a) (product (next a) b term next))))
```

Обобщена функция за произведение

Да се напише функция от по-висок ред product, която пресмята:

$$\prod_{\substack{i=a \\ i \leftarrow next(i)}}^{b} term(i).$$

```
(define (product a b term next)
  (if (> a b) 1 (* (term a) (product (next a) b term next))))

(define (sum a b term next)
  (if (> a b) 0 (+ (term a) (sum (next a) b term next))))
```

Обобщена функция за произведение

Да се напише функция от по-висок ред `product`, която пресмята:

$$\prod_{\substack{i=a\\ i\leftarrow next(i)}}^{b} term(i).$$

```
(define (product a b term next)
  (if (> a b) 1 (* (term a) (product (next a) b term next))))

(define (sum a b term next)
  (if (> a b) 0 (+ (term a) (sum (next a) b term next))))
```

Обобщена функция за натрупване

Да се напише функция, която пресмята

$$term(a) \oplus \Big(term\big(next(a)\big) \oplus \big(\ldots \oplus (term(b) \oplus \perp) \ldots\big)\Big),$$

където $\oplus$ е бинарна операция,
а $\perp$ е нейната “нулева стойност”, т.е. $x \oplus \perp = x$.

Обобщена функция за натрупване

Да се напише функция, която пресмята

$$term(a) \oplus \Big(term\big(next(a)\big) \oplus \big(\ldots \oplus (term(b) \oplus \bot) \ldots\big)\Big),$$

където $\oplus$ е бинарна операция,
а $\bot$ е нейната "нулева стойност", т.е. $x \oplus \bot = x$.

```
(define (accumulate op nv a b term next)
  (if (> a b) nv
      (op (term a) (accumulate op nv (next a) b term next))))
```

Обобщена функция за натрупване

Да се напише функция, която пресмята

$$term(a) \oplus \left(term\big(next(a)\big) \oplus \Big(\ldots \oplus \big(term(b) \oplus \perp\big) \ldots\Big)\right),$$

където $\oplus$ е бинарна операция,
а $\perp$ е нейната "нулева стойност", т.е. $x \oplus \perp = x$.

```
(define (accumulate op nv a b term next)
  (if (> a b) nv
      (op (term a) (accumulate op nv (next a) b term next))))

(define (sum a b term next) (accumulate + 0 a b term next))
(define (product a b term next) (accumulate * 1 a b term next))
```

Задача: пресмятане на полином

Да се пресметне стойността на полинома

$$P_n(x) \quad = \quad x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1)$$

Задача: пресмятане на полином

Да се пресметне стойността на полинома

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)x^i \end{aligned}$$

Задача: пресмятане на полином

Да се пресметне стойността на полинома

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)x^i \end{aligned}$$

Решение №1:

```
(define (p n x)
  (accumulate + ? ? ? ? ?))
```

Задача: пресмятане на полином

Да се пресметне стойността на полинома

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)x^i
\end{aligned}
$$

Решение №1:

```
(define (p n x)
  (accumulate + 0 ? ? ? ?))
```

Задача: пресмятане на полином

Да се пресметне стойността на полинома

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)x^i
\end{aligned}
$$

Решение №1:

```
(define (p n x)
  (accumulate + 0 0 ? ? ?))
```

Задача: пресмятане на полином

Да се пресметне стойността на полинома

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)x^i \end{aligned}$$

Решение №1:

```
(define (p n x)
  (accumulate + 0 0 n ? ?))
```

Задача: пресмятане на полином

Да се пресметне стойността на полинома

$$P_n(x) = x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)x^i$$

Решение №1:

```
(define (p n x)
  (define (term i) (* (- (1+ n) i) (expt x i)))
  (accumulate + 0 0 n term ?))
```

Задача: пресмятане на полином

Да се пресметне стойността на полинома

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)x^i \end{aligned}$$

Решение №1:

```
(define (p n x)
  (define (term i) (* (- (1+ n) i) (expt x i)))
  (accumulate + 0 0 n term 1+))
```

Задача: пресмятане на полином

Да се пресметне стойността на полинома

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)x^i \end{aligned}$$

Решение №1:

```
(define (p n x)
  (define (term i) (* (- (1+ n) i) (expt x i)))
  (accumulate + 0 0 n term 1+))
```

Задача: пресмятане на полином

Да се пресметне стойността на полинома

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (n+1-i)x^i \end{aligned}$$

Решение №1:

```
(define (p n x)
  (define (term i) (* (- (1+ n) i) (expt x i)))
  (accumulate + 0 0 n term 1+))
```

Можем ли да решим задачата без да извикваме expt на всяка стъпка?

Правило на Хорнер

$$P_n(x) = \left(\left(\left(\ldots((x+2)x+3)x+\ldots\right)x+(n-1)\right)x+n\right)x+(n+1)$$

Правило на Хорнер

$$P_n(x) = \left(\left(\left(\ldots((x+2)x+3)x+\ldots\right)x+(n-1)\right)x+n\right)x+(n+1)$$

Можем ли да сметнем с `accumulate`?

Правило на Хорнер

$$P_n(x) = \left(\left(\left(\ldots((x+2)x+3)x+\ldots\right)x+(n-1)\right)x+n\right)x+(n+1)$$

Можем ли да сметнем с `accumulate`?

Идея: Да използваме операцията $a \oplus b := ax + b$.

Правило на Хорнер

$$P_n(x) = \left(\left(\left(\ldots((x+2)x+3)x+\ldots\right)x+(n-1)\right)x+n\right)x+(n+1)$$

Можем ли да сметнем с `accumulate`?

Идея: Да използваме операцията $a \oplus b := ax + b$.

Коя е "нулевата стойност" $\perp$?

Правило на Хорнер

$$P_n(x) = \left(\left(\left(\ldots((x+2)x+3)x+\ldots\right)x+(n-1)\right)x+n\right)x+(n+1)$$

Можем ли да сметнем с accumulate?

Идея: Да използваме операцията $a \oplus b := ax + b$.

Коя е "нулевата стойност" $\perp$?

Решение №2:

```
(define (p n x)
  (define (op a b) (+ (* a x) b))
  (accumulate op 0 1 (1+ n) id 1+))
```

Правило на Хорнер

$$P_n(x) = \left(\left(\left(\dots((x+2)x+3)x+\dots\right)x+(n-1)\right)x+n\right)x+(n+1)$$

Можем ли да сметнем с accumulate?

Идея: Да използваме операцията $a \oplus b := ax + b$.

Коя е "нулевата стойност" $\perp$?

Решение №2:

```
(define (p n x)
  (define (op a b) (+ (* a x) b))
  (accumulate op 0 1 (1+ n) id 1+))
```

Не смята правилно!

Правило на Хорнер

Всъщност пресметнахме:

$$Q_n(x) = x + 2x + 3x + \ldots + nx + (n+1)x = \frac{(n+1)(n+2)}{2}x.$$

Правило на Хорнер

Всъщност пресметнахме:

$$Q_n(x) = x + 2x + 3x + \ldots + nx + (n+1)x = \frac{(n+1)(n+2)}{2}x.$$

Идея: Да използваме операцията $a \oplus b := a + bx$.

Правило на Хорнер

Всъщност пресметнахме:

$$Q_n(x) = x + 2x + 3x + \ldots + nx + (n+1)x = \frac{(n+1)(n+2)}{2}x.$$

Идея: Да използваме операцията $a \oplus b := a + bx$.

Решение №3:

```
(define (p n x)
  (define (op a b) (+ a (* b x)))
  (accumulate op 0 1 (1+ n) id 1+))
```

Правило на Хорнер

Всъщност пресметнахме:

$$Q_n(x) = x + 2x + 3x + \ldots + nx + (n+1)x = \frac{(n+1)(n+2)}{2}x.$$

Идея: Да използваме операцията $a \oplus b := a + bx$.

Решение №3:

```
(define (p n x)
  (define (op a b) (+ a (* b x)))
  (accumulate op 0 1 (1+ n) id 1+))
```

Пак не смята правилно!!!

Ляво и дясно натрупване

Всъщност пресметнахме:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= 1 + x\Big(2 + x\Big(\ldots + x\Big((n-1) + x(n + x(n+1))\Big)\ldots\Big)\Big) \\ &= (n+1)x^n + nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

вместо

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \Bigg(\Bigg(\Big(\ldots((x+2)x+3)x+\ldots\Big)x + (n-1)\Bigg)x + n\Bigg)x + (n+1) \\ &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1). \end{aligned}$$

Ляво и дясно натрупване

Всъщност пресметнахме:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= 1 + x\Bigg(2 + x\bigg(\ldots + x\Big((n-1) + x(n + x(n+1))\Big)\ldots\bigg)\Bigg) \\ &= (n+1)x^n + nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

вместо

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \Bigg(\bigg(\Big(\ldots((x+2)x+3)x + \ldots\Big)x + (n-1)\bigg)x + n\Bigg)x + (n+1) \\ &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1). \end{aligned}$$

За неасоциативни операции $\oplus$ има значение в какъв ред са скобите!

Обобщена функция за натрупване

Да се напише функция, която пресмята **ляво натрупване**:

$$\Big(\ldots \big((\perp \oplus term(a)) \oplus term(next(a)) \big) \oplus \ldots \Big) \oplus term(b)$$

Обобщена функция за натрупване

Да се напише функция, която пресмята **ляво натрупване**:

$$\Big(\ldots\big((\perp \oplus term(a)) \oplus term(next(a))\big) \oplus \ldots\Big) \oplus term(b)$$

```
(define (accumulate-i op nv a b term next)
  (if (> a b) nv
      (accumulate-i op (op nv (term a)) (next a) b term next)))
```

Обобщена функция за натрупване

Да се напише функция, която пресмята **ляво натрупване**:

$$\Big(\ldots\big((\perp \oplus term(a)) \oplus term(next(a))\big) \oplus \ldots\Big) \oplus term(b)$$

```
(define (accumulate-i op nv a b term next)
  (if (> a b) nv
      (accumulate-i op (op nv (term a)) (next a) b term next)))
```

- accumulate — дясно натрупване, рекурсивен процес
- accumulate-i — ляво натрупване, итеративен процес

Правило на Хорнер

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1)\\
&= \left(\left(\left(\ldots((x+2)x+3)x+\ldots\right)x+(n-1)\right)x+n\right)x+(n+1)
\end{aligned}
$$

Идея: използваме `accumulate-i` и $a \oplus b := ax + b$.

Правило на Хорнер

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-2)x^3 + (n-1)x^2 + nx + (n+1) \\
&= \left(\left(\left(\ldots((x+2)x+3)x+\ldots\right)x+(n-1)\right)x+n\right)x+(n+1)
\end{aligned}
$$

Идея: използваме `accumulate-i` и $a \oplus b := ax + b$.

Решение №4:

```
(define (p n x)
  (define (op a b) (+ (* a x) b))
  (accumulate-i op 0 1 (1+ n) id 1+))
```

Анонимни функции

Можем ли да ги конструираме параметрите на функциите от по-висок ред “на място”, без да им даваме имена?

Анонимни функции

Можем ли да ги конструираме параметрите на функциите от по-висок ред "на място", без да им даваме имена?

- `(lambda ({<параметър>}) <тяло>)`

Анонимни функции

Можем ли да ги конструираме параметрите на функциите от по-висок ред “на място”, без да им даваме имена?

- `(lambda ({<параметър>}) <тяло>)`
- Оценява се до функционален обект със съответните параметри и тяло

Анонимни функции

Можем ли да ги конструираме параметрите на функциите от по-висок ред "на място", без да им даваме имена?

- `(lambda ({<параметър>}) <тяло>)`
- Оценява се до функционален обект със съответните параметри и тяло
- Анонимната функция пази указател към средата, в която е оценена

Анонимни функции

Можем ли да ги конструираме параметрите на функциите от по-висок ред “на място”, без да им даваме имена?

- `(lambda ({`<параметър>`})` <тяло>`)`
- Оценява се до функционален обект със съответните параметри и тяло
- Анонимната функция пази указател към средата, в която е оценена
- Примери:

Анонимни функции

Можем ли да ги конструираме параметрите на функциите от по-висок ред “на място”, без да им даваме имена?

- `(lambda ({<параметър>}) <тяло>)`
- Оценява се до функционален обект със съответните параметри и тяло
- Анонимната функция пази указател към средата, в която е оценена
- Примери:
  - `(lambda (x) (+ x 3))` $\longrightarrow$ `#<procedure>`

Анонимни функции

Можем ли да ги конструираме параметрите на функциите от по-висок ред "на място", без да им даваме имена?

- `(lambda ({<параметър>}) <тяло>)`
- Оценява се до функционален обект със съответните параметри и тяло
- Анонимната функция пази указател към средата, в която е оценена
- Примери:
  - `(lambda (x) (+ x 3))` $\longrightarrow$ `#<procedure>`
  - `((lambda (x) (+ x 3)) 5)` $\longrightarrow$ 8

Анонимни функции

Можем ли да ги конструираме параметрите на функциите от по-висок ред “на място”, без да им даваме имена?

- `(lambda ({`<параметър>`})` <тяло>`)`
- Оценява се до функционален обект със съответните параметри и тяло
- Анонимната функция пази указател към средата, в която е оценена
- Примери:
  - `(lambda (x) (+ x 3))` $\longrightarrow$ `#<procedure>`
  - `((lambda (x) (+ x 3)) 5)` $\longrightarrow$ `8`
  - `(define (<име> <параметри>) <тяло>)`
    $\longleftrightarrow$
    `(define <име> (lambda (<параметри>) <тяло>))`

Примери

```
(define (integral a b f dx)
   (* dx (accumulate + 0 a b f (lambda (x) (+ x dx)))))
```

Примери

```
(define (integral a b f dx)
   (* dx (accumulate + 0 a b f (lambda (x) (+ x dx)))))

(define (p n x)
   (accumulate-i + 0 1 (1+ n) (lambda (a b) (+ (* a x) b))
                              (lambda (i) (+ i 1))))
```

Примери

```
(define (integral a b f dx)
   (* dx (accumulate + 0 a b f (lambda (x) (+ x dx)))))

(define (p n x)
   (accumulate-i + 0 1 (1+ n) (lambda (a b) (+ (* a x) b))
                              (lambda (i) (+ i 1))))
```

Как можем да реализираме с accumulate:

- $n!$
- x^n
- $\sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!}$
- $\exists x \in [a; b]\ p(x)$

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$?

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ 81

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ `81`
- `(define (twice f) (lambda (x) (f (f x))))`

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ `81`
- `(define (twice f) (lambda (x) (f (f x))))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ `?`

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ 81
- `(define (twice f) (lambda (x) (f (f x))))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ Грешка!

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ 81
- `(define (twice f) (lambda (x) (f (f x))))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(twice square)` $\longrightarrow$?

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ `81`
- `(define (twice f) (lambda (x) (f (f x))))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(twice square)` $\longrightarrow$ `#<procedure>`

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ `81`
- `(define (twice f) (lambda (x) (f (f x))))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(twice square)` $\longrightarrow$ `#<procedure>`
- `((twice square) 3)` $\longrightarrow$ `81`

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ `81`
- `(define (twice f) (lambda (x) (f (f x))))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(twice square)` $\longrightarrow$ `#<procedure>`
- `((twice square) 3)` $\longrightarrow$ `81`
- `((twice (twice square)) 2)` $\longrightarrow$ `?`

Функции, които връщат функции

Да напишем функция, която прилага дадена функция два пъти над аргумент.

- `(define (twice f x) (f (f x)))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ 81
- `(define (twice f) (lambda (x) (f (f x))))`
- `(twice square 3)` $\longrightarrow$ Грешка!
- `(twice square)` $\longrightarrow$ `#<procedure>`
- `((twice square) 3)` $\longrightarrow$ 81
- `((twice (twice square)) 2)` $\longrightarrow$ 65536

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`
- `(1+ 7)` $\longrightarrow$ 8

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`
- `(1+ 7)` $\longrightarrow$ 8
- `(define 5+ (n+ 5))`

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`
- `(1+ 7)` $\longrightarrow$ `8`
- `(define 5+ (n+ 5))`
- `(5+ 7)` $\longrightarrow$ `12`

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`
- `(1+ 7)` $\longrightarrow$ `8`
- `(define 5+ (n+ 5))`
- `(5+ 7)` $\longrightarrow$ `12`
- `(define (compose f g) (lambda (x) (f (g x))))`

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`
- `(1+ 7)` $\longrightarrow$ 8
- `(define 5+ (n+ 5))`
- `(5+ 7)` $\longrightarrow$ 12
- `(define (compose f g) (lambda (x) (f (g x))))`
- `((compose square 1+) 3)` $\longrightarrow$?

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`
- `(1+ 7)` $\longrightarrow$ `8`
- `(define 5+ (n+ 5))`
- `(5+ 7)` $\longrightarrow$ `12`
- `(define (compose f g) (lambda (x) (f (g x))))`
- `((compose square 1+) 3)` $\longrightarrow$ `16`

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`
- `(1+ 7)` $\longrightarrow$ `8`
- `(define 5+ (n+ 5))`
- `(5+ 7)` $\longrightarrow$ `12`
- `(define (compose f g) (lambda (x) (f (g x))))`
- `((compose square 1+) 3)` $\longrightarrow$ `16`
- `((compose 1+ square) 3)` $\longrightarrow$ `?`

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`
- `(1+ 7)` $\longrightarrow$ 8
- `(define 5+ (n+ 5))`
- `(5+ 7)` $\longrightarrow$ 12
- `(define (compose f g) (lambda (x) (f (g x))))`
- `((compose square 1+) 3)` $\longrightarrow$ 16
- `((compose 1+ square) 3)` $\longrightarrow$ 10

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`
- `(1+ 7)` $\longrightarrow$ `8`
- `(define 5+ (n+ 5))`
- `(5+ 7)` $\longrightarrow$ `12`
- `(define (compose f g) (lambda (x) (f (g x))))`
- `((compose square 1+) 3)` $\longrightarrow$ `16`
- `((compose 1+ square) 3)` $\longrightarrow$ `10`
- `((compose 1+ (compose square (n+ 2))) 3)` $\longrightarrow$ `?`

Примери

- `(define (n+ n) (lambda (i) (+ i n)))`
- `(define 1+ (n+ 1))`
- `(1+ 7)` $\longrightarrow$ 8
- `(define 5+ (n+ 5))`
- `(5+ 7)` $\longrightarrow$ 12
- `(define (compose f g) (lambda (x) (f (g x))))`
- `((compose square 1+) 3)` $\longrightarrow$ 16
- `((compose 1+ square) 3)` $\longrightarrow$ 10
- `((compose 1+ (compose square (n+ 2))) 3)` $\longrightarrow$ 26

Оценка на lambda

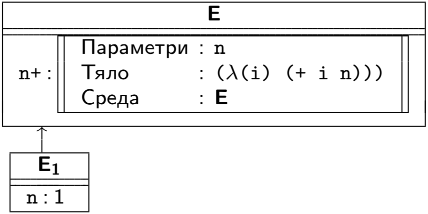
{**E**}

```
(define (n+ n)
  (lambda (i) (+ i n)))
```

E		
n+ :	Параметри	: n
	Тяло	: (λ(i) (+ i n)))
	Среда	: **E**

Оценка на lambda

```
{E}      (define (n+ n)
           (lambda (i) (+ i n)))
{E}      (define 1+ (n+ 1))
```



Оценка на lambda

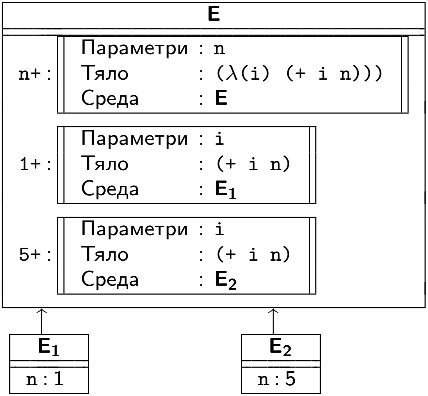
```
{E}      (define (n+ n)
      (lambda (i) (+ i n)))
{E}    (define 1+ (n+ 1))
```

Оценка на lambda

```
{E}      (define (n+ n)
    (lambda (i) (+ i n)))
{E}    (define 1+ (n+ 1))
{E}    (define 5+ (n+ 5))
```

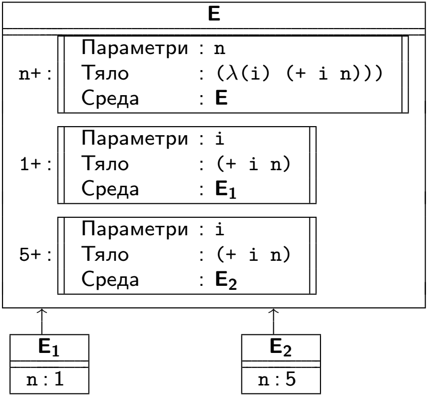
Оценка на lambda

```
{E}     (define (n+ n)
          (lambda (i) (+ i n)))
{E}     (define 1+ (n+ 1))
{E}     (define 5+ (n+ 5))
```



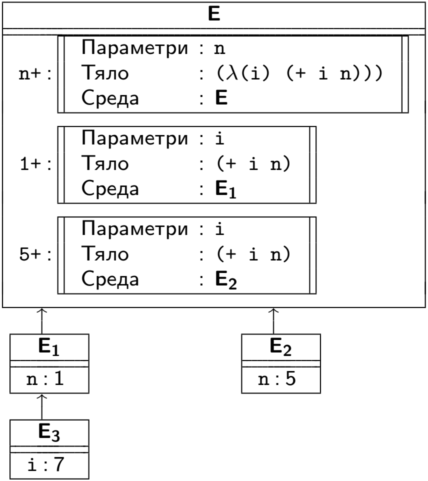
Оценка на lambda

```
{E}      (define (n+ n)
       (lambda (i) (+ i n)))
{E}      (define 1+ (n+ 1))
{E}      (define 5+ (n+ 5))
{E}          (1+ 7)
```



Оценка на lambda

```
{E}      (define (n+ n)
     (lambda (i) (+ i n)))
{E}    (define 1+ (n+ 1))
{E}    (define 5+ (n+ 5))
{E}         (1+ 7)
              ↓
{E3}       (+ i n)
```



Оценка на lambda

{**E**} `(define (n+ n)`
`(lambda (i) (+ i n)))`

{**E**} `(define 1+ (n+ 1))`

{**E**} `(define 5+ (n+ 5))`

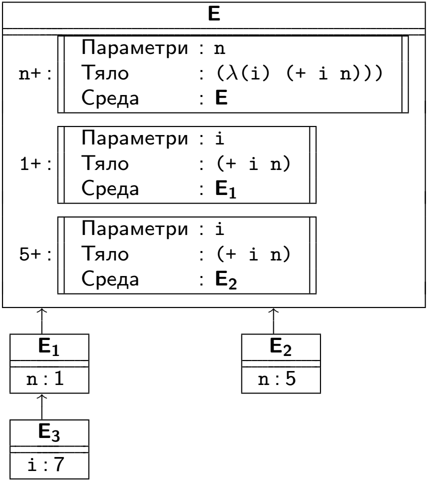
{**E**} `(1+ 7)`

$\downarrow$

{$\mathbf{E}_3$} `(+ i n)`

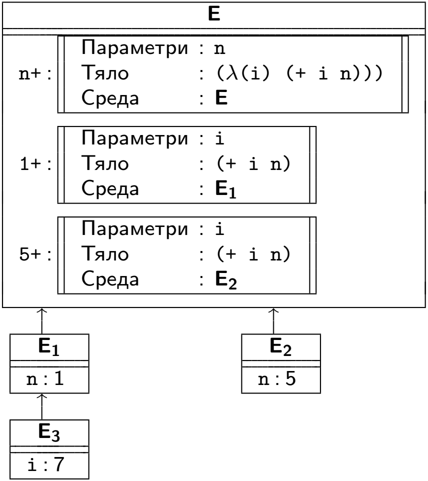
$\downarrow$

8



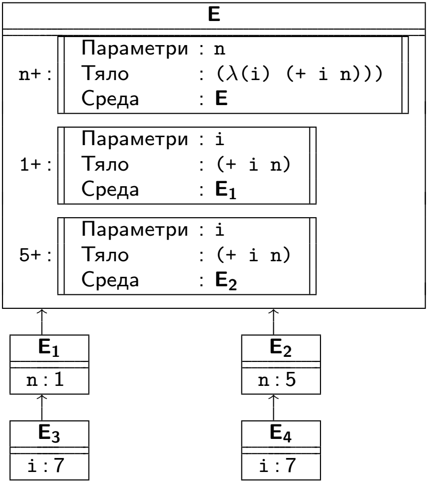
Оценка на lambda

```
{E}      (define (n+ n)
           (lambda (i) (+ i n)))
{E}      (define 1+ (n+ 1))
{E}      (define 5+ (n+ 5))
{E}      (1+ 7)
            ↓
{E3}     (+ i n)
            ↓
            8
{E}      (5+ 7)
```



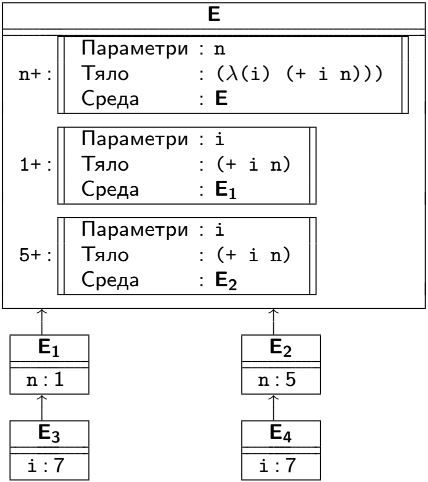
Оценка на lambda

{**E**}	`(define (n+ n)` `(lambda (i) (+ i n)))`
{**E**}	`(define 1+ (n+ 1))`
{**E**}	`(define 5+ (n+ 5))`
{**E**}	`(1+ 7)`
	↓
{$\mathbf{E_3}$}	`(+ i n)`
	↓
	8
{**E**}	`(5+ 7)`
	↓
{$\mathbf{E_4}$}	`(+ i n)`



Оценка на lambda

{**E**}	`(define (n+ n)`
	`(lambda (i) (+ i n)))`
{**E**}	`(define 1+ (n+ 1))`
{**E**}	`(define 5+ (n+ 5))`
{**E**}	`(1+ 7)`
	$\downarrow$
{$\mathbf{E}_3$}	`(+ i n)`
	$\downarrow$
	8
{**E**}	`(5+ 7)`
	$\downarrow$
{$\mathbf{E}_4$}	`(+ i n)`
	$\downarrow$
	12



Намиране на производна

$$f'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Намиране на производна

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{за малки } \Delta x$$

Намиране на производна

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ за малки } \Delta x$$

```
(define (derive f dx)
  (lambda (x) (/ (- (f (+ x dx)) (f x)) dx)))
```

Намиране на производна

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{за малки } \Delta x$$

```
(define (derive f dx)
  (lambda (x) (/ (- (f (+ x dx)) (f x)) dx)))
```

- `(define 2* (derive square 0.01))`

Намиране на производна

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{за малки } \Delta x$$

```
(define (derive f dx)
  (lambda (x) (/ (- (f (+ x dx)) (f x)) dx)))
```

- `(define 2* (derive square 0.01))`
- `(2* 5)` $\longrightarrow$ `10.009999999999764`

Намиране на производна

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{за малки } \Delta x$$

```
(define (derive f dx)
  (lambda (x) (/ (- (f (+ x dx)) (f x)) dx)))
```

- `(define 2* (derive square 0.01))`
- `(2* 5)` $\longrightarrow$ `10.009999999999764`
- `((derive square 0.0000001) 5)` $\longrightarrow$ `10.00000116860974`

Намиране на производна

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ за малки } \Delta x$$

```
(define (derive f dx)
  (lambda (x) (/ (- (f (+ x dx)) (f x)) dx)))
```

- `(define 2* (derive square 0.01))`
- `(2* 5)` $\longrightarrow$ `10.009999999999764`
- `((derive square 0.0000001) 5)` $\longrightarrow$ `10.000000116860974`
- `((derive (derive (lambda (x) (* x x x)) 0.001) 0.001) 3)` $\longrightarrow$ `?`

Намиране на производна

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{за малки } \Delta x$$

```
(define (derive f dx)
  (lambda (x) (/ (- (f (+ x dx)) (f x)) dx)))
```

- `(define 2* (derive square 0.01))`
- `(2* 5)` $\longrightarrow$ `10.009999999999764`
- `((derive square 0.0000001) 5)` $\longrightarrow$ `10.00000116860974`
- `((derive (derive (lambda (x) (* x x x)) 0.001) 0.001) 3)` $\longrightarrow$ `18.006000004788802`

Повторено прилагане

Да се намери n-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Повторено прилагане

Да се намери n-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

Повторено прилагане

Да се намери n-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Повторено прилагане

Да се намери *n*-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Решение №2: $f^0 = id, f^n = f \circ f^{n-1}$

Повторено прилагане

Да се намери n-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Решение №2: $f^0 = id, f^n = f \circ f^{n-1}$

```
(define (repeated f n)
  (if (= n 0) id (compose f (repeated f (- n 1)))))
```

Повторено прилагане

Да се намери *n*-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Решение №2: $f^0 = id, f^n = f \circ f^{n-1}$

```
(define (repeated f n)
  (if (= n 0) id (compose f (repeated f (- n 1)))))
```

Решение №3: $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} \circ id$

Повторено прилагане

Да се намери *n*-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Решение №2: $f^0 = id, f^n = f \circ f^{n-1}$

```
(define (repeated f n)
  (if (= n 0) id (compose f (repeated f (- n 1)))))
```

Решение №3: $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} \circ id$

```
(define (repeated f n)
  (accumulate ? ? ? ? ? ?))
```

Повторено прилагане

Да се намери n-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Решение №2: $f^0 = id, f^n = f \circ f^{n-1}$

```
(define (repeated f n)
  (if (= n 0) id (compose f (repeated f (- n 1)))))
```

Решение №3: $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} \circ id$

```
(define (repeated f n)
  (accumulate compose ? ? ? ? ?))
```

Повторено прилагане

Да се намери n-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Решение №2: $f^0 = id, f^n = f \circ f^{n-1}$

```
(define (repeated f n)
  (if (= n 0) id (compose f (repeated f (- n 1)))))
```

Решение №3: $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} \circ id$

```
(define (repeated f n)
  (accumulate compose id ? ? ? ?))
```

Повторено прилагане

Да се намери n-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Решение №2: $f^0 = id, f^n = f \circ f^{n-1}$

```
(define (repeated f n)
  (if (= n 0) id (compose f (repeated f (- n 1)))))
```

Решение №3: $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} \circ id$

```
(define (repeated f n)
  (accumulate compose id 1 ? ? ?))
```

Повторено прилагане

Да се намери n-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Решение №2: $f^0 = id, f^n = f \circ f^{n-1}$

```
(define (repeated f n)
  (if (= n 0) id (compose f (repeated f (- n 1)))))
```

Решение №3: $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} \circ id$

```
(define (repeated f n)
  (accumulate compose id 1 n ? ?))
```

Повторено прилагане

Да се намери n-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Решение №2: $f^0 = id, f^n = f \circ f^{n-1}$

```
(define (repeated f n)
  (if (= n 0) id (compose f (repeated f (- n 1)))))
```

Решение №3: $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} \circ id$

```
(define (repeated f n)
  (accumulate compose id 1 n (lambda (i) f) ?))
```

Повторено прилагане

Да се намери *n*-кратното прилагане на дадена функция.

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n}(x))\ldots)))$$

Решение №1: $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$

```
(define (repeated f n)
  (lambda (x) (if (= n 0) x (f ((repeated f (- n 1)) x)))))
```

Решение №2: $f^0 = id, f^n = f \circ f^{n-1}$

```
(define (repeated f n)
  (if (= n 0) id (compose f (repeated f (- n 1)))))
```

Решение №3: $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} \circ id$

```
(define (repeated f n)
  (accumulate compose id 1 n (lambda (i) f) 1+))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

```
(define (derive-n f n dx)
  (repeated ? n))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

```
(define (derive-n f n dx)
  (repeated (lambda (f) (derive f dx)) n))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((repeated (lambda (f) (derive f dx)) n) f))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((repeated (lambda (f) (derive f dx)) n) f))
```

Решение №3: $^{(n)} = \underbrace{'\circ'\circ\ldots\circ'}_{n}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((accumulate ? ? ? ? ? ?) f))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((repeated (lambda (f) (derive f dx)) n) f))
```

Решение №3: $^{(n)} = \underbrace{{}'\circ{}'\circ\ldots\circ{}'}_{n}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((accumulate compose ? ? ? ? ?) f))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((repeated (lambda (f) (derive f dx)) n) f))
```

Решение №3: $^{(n)} = \underbrace{'\circ'\circ\ldots\circ'}_{n}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((accumulate compose id ? ? ? ?) f))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((repeated (lambda (f) (derive f dx)) n) f))
```

Решение №3: $^{(n)} = \underbrace{'\circ'\circ\ldots\circ'}_{n}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((accumulate compose id 1 ? ? ?) f))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((repeated (lambda (f) (derive f dx)) n) f))
```

Решение №3: $^{(n)} = \underbrace{'\circ'\circ\ldots\circ'}_{n}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((accumulate compose id 1 n ? ?) f))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((repeated (lambda (f) (derive f dx)) n) f))
```

Решение №3: ${}^{(n)} = \underbrace{{}'\circ{}'\circ\ldots\circ{}'}_{n}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((accumulate compose id 1 n
               (lambda (i) (lambda (f) (derive f dx))) ?) f))
```

n-та производна

Да се намери n-та производна на дадена функция.

Решение №1: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

```
(define (derive-n f n dx)
  (if (= n 0) f (derive (derive-n f (- n 1) dx) dx)))
```

Решение №2: $f^{(n)} = f^{\overbrace{''''\ldots''}^{n}}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((repeated (lambda (f) (derive f dx)) n) f))
```

Решение №3: $^{(n)} = \underbrace{'\circ'\circ\ldots\circ'}_{n}$

```
(define (derive-n f n dx)
  ((accumulate compose id 1 n
               (lambda (i) (lambda (f) (derive f dx))) 1+) f))
```

All you need is λ

Специалната форма `lambda` е достатъчна за реализацията на всички останали конструкции в Scheme!

All you need is λ — `let`

Специалнната форма `lambda` е достатъчна за реализацията на всички останали конструкции в Scheme!

Симулация на `let`:

```
(let ((<символ> <израз>)) <тяло>)
```

$$\longleftrightarrow$$

```
((lambda (<символ>) <тяло>) <израз>)
```

All you need is λ — `let`

Специалната форма `lambda` е достатъчна за реализацията на всички останали конструкции в Scheme!

Симулация на `let`:

(let ((<символ> <израз>)) <тяло>)

$\longleftrightarrow$

((lambda (<символ>) <тяло>) <израз>)

(let ((<символ$_1$> <израз$_1$>)
      (<символ$_2$> <израз$_2$>)
      ...
      (<символ$_n$> <израз$_n$>)
      <тяло>)

$\longleftrightarrow$

((lambda (<символ$_1$> ...<символ$_n$>) <тяло>)
      <израз$_1$> ...<израз$_n$>)

All you need is λ — булева логика

Симулация на булеви стойности и `if`:

```
(define #t (lambda (x y) x))
(define #f (lambda (x y) y))
(define (lambda-if b x y) (b x y))
```

All you need is λ — булева логика

Симулация на булеви стойности и `if`:

```
(define #t (lambda (x y) x))
(define #f (lambda (x y) y))
(define (lambda-if b x y) ((b x y)))
```

All you need is λ — булева логика

Симулация на булеви стойности и `if`:

```
(define #t (lambda (x y) x))
(define #f (lambda (x y) y))
(define (lambda-if b x y) ((b x y)))
```

Примери:

- `(lambda-if #t (lambda () (+ 3 5)) (lambda () (/ 4 0)))` $\longrightarrow$ 8

All you need is λ — булева логика

Симулация на булеви стойности и `if`:

```
(define #t (lambda (x y) x))
(define #f (lambda (x y) y))
(define (lambda-if b x y) ((b x y)))
```

Примери:

- `(lambda-if #t (lambda () (+ 3 5)) (lambda () (/ 4 0)))` ⟶ `8`
- `(lambda-if #f (lambda () +) (lambda () "abc"))` ⟶ `"abc"`

All you need is λ — булева логика

Симулация на булеви стойности и `if`:

```
(define #t (lambda (x y) x))
(define #f (lambda (x y) y))
(define (lambda-if b x y) ((b x y)))
```

Примери:

- `(lambda-if #t (lambda () (+ 3 5)) (lambda () (/ 4 0)))` $\longrightarrow$ `8`
- `(lambda-if #f (lambda () +) (lambda () "abc"))` $\longrightarrow$ `"abc"`
- `(define (not b) (lambda (x y) (b y x)))`

All you need is λ — числа

Симулация на естествени числа (*нумерали на Чърч*)
Идея: представяне на числото n като $\lambda f, x\ f^n(x)$

All you need is λ — числа

Симулация на естествени числа (*нумерали на Чърч*)
Идея: представяне на числото n като $\lambda f, x\ f^n(x)$

- `(define c3 (lambda (f x) (f (f (f x)))))`

All you need is λ — числа

Симулация на естествени числа (*нумерали на Чърч*)
Идея: представяне на числото n като $\lambda f, x\ f^n(x)$

- `(define c3 (lambda (f x) (f (f (f x)))))`
- `(define c5 (lambda (f x) (f (f (f (f (f x)))))))`

All you need is λ — числа

Симулация на естествени числа (*нумерали на Чърч*)
Идея: представяне на числото n като $\lambda f, x\ f^n(x)$

- `(define c3 (lambda (f x) (f (f (f x)))))`
- `(define c5 (lambda (f x) (f (f (f (f (f x)))))))`
- `(define c1+ (lambda (a) (lambda (f x) (f (a f x)))))`

All you need is λ — числа

Симулация на естествени числа (*нумерали на Чърч*)
Идея: представяне на числото n като $\lambda f, x\ f^n(x)$

- `(define c3 (lambda (f x) (f (f (f x)))))`
- `(define c5 (lambda (f x) (f (f (f (f (f x)))))))`
- `(define c1+ (lambda (a) (lambda (f x) (f (a f x)))))`
- `(define c+ (lambda (a b) (lambda (f x) (a f (b f x)))))`

All you need is λ — рекурсия

Комбинатор `Y` за намиране на най-малка неподвижна точка (fixpoint combinator)

```
(define Y (lambda (f)
            ((lambda (x) (f (lambda (n) ((x x) n))))
             (lambda (x) (f (lambda (n) ((x x) n)))))))
```

All you need is λ — рекурсия

Комбинатор `Y` за намиране на най-малка неподвижна точка (fixpoint combinator)

```
(define Y (lambda (f)
           ((lambda (x) (f (lambda (n) ((x x) n))))
            (lambda (x) (f (lambda (n) ((x x) n)))))))

(define fact-body (lambda (f)
                   (lambda (n) (if (= n 0) 1
                                   (* n (f (- n 1)))))))
(define fact (Y fact-body))
```