Домашно №1 по Дискретни Структури, спец. Компютърни науки, зимен семестър 2015/2016г.

ТЕМА: МНОЖЕСТВА. ЛОГИКА. ИНДУКЦИЯ РЕШЕНИЯ

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Макс.**
получени точки							
от максимално	15	20	12	12	15	15	80

Задача 1: (12т.) Дадени са множествата A и B.

1. Нека $A = \{a, b\}$ и $B = \{0, 1\}$. Напишете в явен вид всяко множество:

   а) (2т.) $\{A, A \times B\}$

   Решение: $\{A, A \times B\} = \{\{a, b\}, \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\}\}$

   б) (2т.) $A \cup (A \times B) \cup (A \times B \times A)$

   Решение:

   $A \cup (A \times B) \cup (A \times B \times A) = \{a, b, (a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1),$
   $(a, 0, a), (a, 0, b), (a, 1, a), (a, 1, b), (b, 0, a), (b, 0, b), (b, 1, a), (b, 1, b)\}$

   в) (2т.) $2^{A\times B} \cup \{\emptyset, A, A \times B\}$

   Решение:

   $2^{A\times B} \cup \{\emptyset, A, A \times B\} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{(a, 0)\}, \{(a, 1)\}, \{(b, 0)\}, \{(b, 1)\},$
   $\{(a, 0), (a, 1)\}, \{(a, 0), (b, 0)\}, \{(a, 0), (b, 1)\},$
   $\{(a, 1), (b, 0)\}, \{(a, 1), (b, 1)\}, \{(b, 0), (b, 1)\},$
   $\{(a, 0), (a, 1), (b, 0)\}, \{(a, 0), (a, 1), (b, 1)\},$
   $\{(a, 0), (b, 0), (b, 1)\}, \{(a, 1), (b, 0), (b, 1)\},$
   $\{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\}\}$

2. Нека A е множество с m елемента и B е множество с n елемента, $n > m$. Определете минималния и максималния брой елементи за всяко от следващите три множества и при какви условия за A и B те се достигат:

а) (3т.) $A \cap B$

Решение:

Ако $A \cap B = \emptyset$, броят на елементите в сечението е 0 и това е минималният брой.

Ако $A \subset B$, броят на елементите в сечението е m, защото $A \cap B = A$, и това е максималният брой.

б) (3т.) $A \cup B$

Решение:

Ако $A \subset B$, броят на елементите в обединението е n, защото $A \cup B = B$, и това е минималният брой.

Ако $A \cap B = \emptyset$, броят на елементите в обединението е $m + n$ и това е максималният брой.

в) (3т.) $B \setminus A$

Решение:

Ако $A \subset B$, броят на елементите в разликата е $n - m$ и това е минималният брой.

Ако $A \cap B = \emptyset$, броят на елементите в разликата е n, защото $B \setminus A = B$, и това е максималният брой.

Задача 2: (20т.) Докажете или опровергайте, че:

а) (5т.) $\mathbb{N} = \{a + b | a \in \mathbb{N} \land b \in \mathbb{N}\}$

Решение:

Ще докажем, че $\forall x(x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \{a + b | a \in \mathbb{N} \land b \in \mathbb{N}\})$:

1. Доказателство, че $\forall x(x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{a + b | a \in \mathbb{N} \land b \in \mathbb{N}\})$:

Нека $n \in \mathbb{N}$. От $n \in \mathbb{N} \land 0 \in \mathbb{N}$ следва, че $n + 0 = n \in \{a + b | a \in \mathbb{N} \land b \in \mathbb{N}\}$.

2. Доказателство, че $\forall x(x \in \{a + b | a \in \mathbb{N} \land b \in \mathbb{N}\} \Rightarrow x \in \mathbb{N})$:

Нека $p + q \in \{a + b | a \in \mathbb{N} \land b \in \mathbb{N}\})$. От $p \in \mathbb{N} \land q \in \mathbb{N}$ следва, че $p + q \in \mathbb{N}$.

б) (5т.) $\forall A, B, C, D \subseteq U, (A \cap C) \cup (B \cap D) \subseteq (A \cup B) \cap (C \cup D)$

Решение:

Ще докажем, че $\forall x(x \in (A \cap C) \cup (B \cap D) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (C \cup D))$.

Доказателство:

Нека $x \in (A \cap C) \cup (B \cap D)$.

1. $x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in A \land x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \land x \in (C \cup D) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (C \cup D)$

2. $x \in (B \cap D) \Rightarrow x \in B \wedge x \in D \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (C \cup D) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (C \cup D)$

в) (10т.) $\forall A, B, C \subseteq U, A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (таблично **и** чрез разсъждения/контрапример)

Решение:

Доказателство, че твърдението не е вярно:

Вариант 1 (табличен метод):

A	B	C	$B \cap C$	$A \setminus (B \cap C)$	$A \setminus B$	$A \setminus C$	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0

Заключение: За $(1, 0, 1)$ съответните стойности 1 и 0 в колоните $A \setminus (B \cap C)$ и $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ са различни. Следователно, твърдението не е вярно.

Вариант 2 (чрез контрапример): Нека $A = \{1, 2\}, B = \{1\}, C = \{2\}$. Тогава: $A \setminus (B \cap C) = \{1, 2\} \neq (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \emptyset$.

Задача 3: (12т.) За всеки от следващите логически изрази проверете дали е тавтология, противоречие или условност. Обосновете отговора си.

а) (4т.)$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$

Решение:

		(1)	(2)	(3)
p	q	$p \vee \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$
F	F	T	F	F
F	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	T	T	F	F

Заключение: Съждението, представено с израза е *противоречие*, тъй като в колона (3) се съдържа само стойност ЛЪЖА.

б) (4т.)$((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

Решение:

				(1)			(2)	(3)
p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	$(1) \leftrightarrow (2)$
F	F	F	F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T

Заключение: Съждението, представено с израза е *тавтология*, защото колона (3) съдържа само стойности ИСТИНА.

в)(4т.) $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow r)$

Решение:

			(1)	(2)	(3)	(4)
p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow r)$
F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T	F
T	T	F	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T

Заключение: Съждението, представено с израза е *условност*, тъй като в колона (4) се съдържат както стойности ИСТИНА, така и стойности ЛЪЖА.

Задача 4: (12т.) Преобразувайте следните изрази така, че отрицанието да се среща само пред предикати, т.е. да няма отрицание пред квантор или пред израз, съдържащ логически съюз:

а) (3т.)$\neg \forall x \exists y P(x, y)$

Решение:

$$\begin{aligned}\neg \forall x \exists y P(x, y) &\equiv \exists x \neg \exists y P(x, y)\\ &\equiv \exists x \forall y \neg P(x, y)\end{aligned}$$

б) (4т.)$\neg \forall x \forall y(\neg P(x, y) \wedge Q(x, y))$

Решение:

$$\begin{aligned}
\neg\forall x\forall y(\neg P(x,y)\wedge Q(x,y)) &\equiv \exists x\neg\forall y(\neg P(x,y)\wedge Q(x,y))\\
&\equiv \exists x\exists y\neg(\neg P(x,y)\wedge Q(x,y))\\
&\equiv \exists x\exists y(\neg\neg P(x,y)\vee \neg Q(x,y))\\
&\equiv \exists x\exists y(P(x,y)\vee \neg Q(x,y))
\end{aligned}$$

в) (5т.)$\neg\exists x\exists y(P(x,y)\vee Q(x)\to T(x,y))$

Решение:

$$\begin{aligned}
\neg\exists x\exists y(P(x,y)\vee Q(x)\to T(x,y)) &\equiv \forall x\neg\exists y(P(x,y)\vee Q(x)\to T(x,y))\\
&\equiv \forall x\forall y\neg(P(x,y)\vee Q(x)\to T(x,y))\\
&\equiv \forall x\forall y\neg(\neg(P(x,y)\vee Q(x))\vee T(x,y))\\
&\equiv \forall x\forall y((P(x,y)\vee Q(x))\wedge\neg T(x,y))
\end{aligned}$$

Задача 5: (15т.) Дадена е редицата $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$, където $a_1 = 1; a_2 = 8$; $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, n \geq 3$. Използвайте метода на силната индукция за да докажете, че $a_n = 3.2^{n-1} + 2(-1)^n, n \in \mathbb{N}^+$.

Решение: Ще доказваме следното твърдение:
$P(n) : a_n = 3.2^{n-1} + 2(-1)^n$

1. Базови случаи:

   $P(1) : 1 = 3.2^0 + 2(-1)^1$

   $P(2) : 2 = 3.2^1 + 2(-1)^2$

   Твърдението е вярно и в двата случая.

2. Индуктивно предположение:

   За някое естествено число $k \geq 2$ и за всяко число $i \in \{1, \ldots, k\}$ е изпълнено:

   $P(i) : a_i = 3.2^{i-1} + 2(-1)^i$

3. Индуктивна стъпка: Ще докажем верността на

   $P(k+1) : a_{k+1} = 3.2^k + 2(-1)^{k+1}$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + 2a_{k-1} && \text{съгласно дефиницията}\\
&= 3.2^{k-1} + 2(-1)^k + 2(3.2^{k-2} + 2(-1)^{k-1}) && \text{съгласно ИП}\\
&= 3(2^{k-1} + 2^{k-1}) + 2((-1)^k + 2(-1)^{k-1})\\
&= 3.2^k + 2(-1)^{k-1}(-1+2)\\
&= 3.2^k + 2(-1)^{k-1}\\
&= 3.2^k + 2(-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

4. Заключение: Твърдението е вярно за всяко естествено число $n \geq 1$.

Задача 6: (15т.) Докажете по индукция, че всяко естествено число $n \in \mathbb{N}^+$ може да се представи като сума от различни степени на 2.

<u>Решение:</u> Нека $P(n)$: *n може да се представи като сума от различни степени на 2.*

1. Доказателство, че $P(1)$: *1 може да се представи като сума от различни степени на 2* е вярно: $1 = 2^0$ - вярно

2. Допускаме, че за някое естествено число $m > 1$ е вярно $P(k)$: *k може да се представи като сума от различни степени на 2* за всяко k, такова че $m > k \geq 1$.

3. Доказателство, че $P(m)$: *m може да се представи като сума от различни степени на 2* е вярно:

   Нека $m = 2a + b$, като $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \{0, 1\}$. От $m > 1$ следва, че $m > a \geq 1$ и съгласно допускането $P(a)$: *a може да се представи като сума от различни степени на 2* е вярно. Следователно, $2a$ може да се представи като сума от различни степени на 2, като в нея не участва 2^0. Тогава:

   а) Ако m е четно, то $m = 2a$

   б) Ако m е нечетно, то $m = 2a + 1 = 2a + 2^0$

   И в двата случая m може да се представи като сума от различни степени на 2.

Следователно, $P(n)$ е вярно за всяко естествено число $n \in \mathbb{N}^+$.