Домашно № 1 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, I поток, зимен семестър на 2015/2016 уч. г. в СУ, ФМИ

Домашните работи се предават на съответния асистент по време на упражненията през седмицата 9.–13. ноември 2015 г. (шестата седмица от семестъра).

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Общо
получени точки							
максимум точки	*6*	*6*	*6*	*6*	*6*	*6*	*36*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Да означим с p съждението $(\forall n \in \mathbb{N})\,(n^2 - 3n + 7 < 0 \;\rightarrow\; 3^n > 902\,n)$.
а) Запишете отрицанието на съждението p с помощта на формален израз, в който не участва операцията логическо отрицание. **(3 точки)**
б) Съждението p вярно ли е? **(3 точки)**

Задача 2. Докажете по два начина, че ако $A \subseteq B$, то $\Big((C \cup A) \setminus B \Big) \cap A = \varnothing$:
а) чрез табличния метод; **(3 точки)**
б) чрез разсъждения, използващи определенията на операциите. **(3 точки)**

Задача 3. Съществува ли множество A, за което сечението $A \cap 2^{A^2}$ е непразно? Ако да — приведете пример. Ако не — дайте доказателство за несъществуване. **(6 точки)**

Задача 4. Докажете, че $1\,.\,4 + 2\,.\,7 + 3\,.\,10 + \ldots + n\,.\,(3n+1) = n\,.\,(n+1)^2$ за всяко цяло число $n \geq 1$. **(6 точки)**

Задача 5. За точките на декартовата равнина $\mathbb{R}^2$ дефинираме релация ρ по следния начин:

$$(x_1\,,\,y_1)\;\rho\;(x_2\,,\,y_2) \iff x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2\,.$$

а) Докажете, че ρ е релация на еквивалентност. **(3 точки)**
б) Какво представляват класовете на еквивалентност на релацията ρ, разглеждани като геометрични фигури? **(3 точки)**

Задача 6. Правоъгълник и триъгълник имат поне една обща вътрешна точка (контурите им може да се пресичат, а може едната фигура да се съдържа в другата). Постройте биекция между контурите на двете фигури. **(6 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Последователно преобразуваме отрицанието на съждението p, докато изчезне операцията логическо отрицание:

$\urcorner p \equiv$

$\urcorner\,(\forall n\in\mathbb{N})\,(n^2-3n+7<0 \;\to\; 3^n>902\,n) \equiv$

$$\boxed{\text{по закона } \urcorner\,(\forall x)\,\Big(F(x)\Big) \equiv (\exists x)\,\Big(\urcorner\,F(x)\Big)}$$

$(\exists n\in\mathbb{N})\,\Big(\urcorner\,(n^2-3n+7<0 \;\to\; 3^n>902\,n)\Big) \equiv$

$$\boxed{\text{по закона } \urcorner\,(r\to s) \equiv r\wedge\urcorner\,s}$$

$(\exists n\in\mathbb{N})\,\Big(n^2-3n+7<0 \quad\wedge\quad \urcorner\,(3^n>902\,n)\Big) \equiv$

$$\boxed{\text{по формулата } \urcorner\,(a>b) \equiv a\le b}$$

$(\exists n\in\mathbb{N})\,(n^2-3n+7<0 \quad\wedge\quad 3^n\le 902\,n)\,.$

Отговор: Отрицанието на съждението p гласи:
$(\exists n\in\mathbb{N})\,(n^2-3n+7<0 \quad\wedge\quad 3^n\le 902\,n)\,.$

б) Най-напред решаваме неравенството $n^2-3n+7<0$. Дискриминантата е отрицателна, старшият коефициент е положителен. Следователно неравенството няма решения в $\mathbb{R}$, а значи и в $\mathbb{N}$. По-нататък можем да продължим по различни начини.

Първи начин: Щом антецедентът $n^2-3n+7<0$ е неистинен за $\forall n\in\mathbb{N}$, то по определение импликацията $n^2-3n+7<0 \;\to\; 3^n>902\,n$ е истинна за $\forall n\in\mathbb{N}$, т.е. p е вярно съждение.

Втори начин: Да разгледаме отрицанието на съждението p. В предишното подусловие установихме, че отрицанието на p гласи, че съществува естествено число n, за което са изпълнени едновременно двете неравенства $n^2-3n+7<0$ и $3^n\le 902\,n$. Но по-горе видяхме, че първото неравенство няма решение. Толкова повече и системата, образувана от двете неравенства, няма решение. Следователно отрицанието на съждението p е невярно. Значи p е вярно.

Трети начин: Нека $A=\Big\{n\in\mathbb{N}\;\Big|\;n^2-3n+7<0\Big\}$ и $B=\Big\{n\in\mathbb{N}\;\Big|\;3^n>902\,n\Big\}$.
Съждението p всъщност твърди, че A е подмножество на B. Това е така, защото A е празното множество, а то е подмножество на всяко множество. Следователно p е вярно.

Отговор: Съждението p е вярно.

Забележка: Аналогично се доказва, че са верни съжденията от вида "Всички S са P." с празно множество от допустими стойности на субекта S, независимо от предиката P. (Например вярно е, че всички нечетни числа, завършващи на нула, се делят на седем.)

Задача 2. Тази задача може да се реши по два начина.

а) Чрез табличния метод.

A	B	C	$C \cup A$	$(C \cup A) \setminus B$	$\Big((C \cup A) \setminus B \Big) \cap A$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

Тъй като A е подмножество на B, следва, че е невъзможна комбинацията $x \in A \ \wedge \ x \notin B$ (единица в колонката A и нула в колонката B). Затова петият и шестият ред от таблицата са оставени празни. Понеже всички попълнени клетки в последната колонка съдържат нули, то следва, че множеството $\Big((C \cup A) \setminus B \Big) \cap A$ няма елементи, т.е. то е празно.

б) Чрез разсъждения.

Ако $x \in (C \cup A) \setminus B$, то $x \notin B$ (според определението за разлика на множества);
а тъй като $A \subseteq B$, то $x \notin A$ (според определението за подмножество).
С други думи, множеството $(C \cup A) \setminus B$ няма общи елементи с множеството A.
Следователно сечението им е празно.

Задача 3. Ще докажем, че съществува множество A, за което сечението $A \cap 2^{A^2}$ е непразно. Ще дадем конструктивно доказателство, т.е. ще построим множество A с желаното свойство. Съществена психологическа трудност, която трябва да преодолеем в тази задача, е навикът да извършваме операции само върху вече готови, т.е. напълно определени, множества. Тук, напротив, е удобно да строим множеството A стъпка по стъпка.

Първи начин: За да бъде сечението непразно, необходимо е и множеството A да е непразно, тоест $A = \Big\{ a, \ \dots \Big\}$, където a е някакъв елемент на A, а многоточието означава, че множеството A може да съдържа (но може и да не съдържа) други елементи. Следователно $A^2 = \Big\{ (a, a), \ \dots \Big\}$, $2^{A^2} = \Big\{ \{ (a, a) \}, \ \dots \Big\}$. Добавянето на множеството $\{ (a, a) \}$ като нов елемент на A гарантира, че сечението $A \cap 2^{A^2}$ е непразно: $A \cap 2^{A^2} = \Big\{ \{ (a, a) \}, \ \dots \Big\}$, стига множеството A да е от вида $A = \Big\{ a, \ \{ (a, a) \}, \ \dots \Big\}$. Най-малкото множество A от този вид има два елемента: $A = \Big\{ a, \ \{ (a, a) \} \Big\}$.

Втори начин: Тъй като $2^{A^2} = \Big\{ \varnothing, \ \dots \Big\}$, то достатъчно е да вземем $A = \Big\{ \varnothing, \ \dots \Big\}$, за да гарантираме, че сечението е непразно: $A \cap 2^{A^2} = \Big\{ \varnothing, \ \dots \Big\}$. Най-малкото множество A от този вид има един елемент: $A = \Big\{ \varnothing \Big\}$.

Задача 4 също може да се реши по различни начини.

Първи начин: с помощта на математическа индукция.

База: $n = 1$. В този случай лявата страна на доказваното равенство съдържа само едно събираемо: $1\,.\,4 = 4$. Дясната страна е равна на $1\,.\,(1+1)^2 = 1\,.\,2^2 = 4$. Тогава равенството приема вида $4 = 4$, което е очевидно вярно.

Индуктивна стъпка: Нека k е произволно цяло положително число и доказваното равенство е изпълнено за $n = k$, т.е. $1\,.\,4 + 2\,.\,7 + 3\,.\,10 + \ldots + k\,.\,(3k+1) = k\,.\,(k+1)^2$. Ще докажем, че то важи и за $n = k+1$, т.е. $1\,.\,4 + 2\,.\,7 + 3\,.\,10 + \ldots + k\,.\,(3k+1) + (k+1)\,.\,(3k+4) = (k+1)\,.\,(k+2)^2$.

Действително, като преобразуваме лявата страна посредством индуктивното предположение, получаваме следния резултат:

$$\underbrace{1\,.\,4 + 2\,.\,7 + 3\,.\,10 + \ldots + k\,.\,(3k+1)} + (k+1)\,.\,(3k+4) \quad = \quad k\,.\,(k+1)^2 + (k+1)\,.\,(3k+4) \quad =$$

$$(k+1)\,.\,\Big(k\,.\,(k+1) + (3k+4)\Big) \quad = \quad (k+1)\,.\,(k^2 + k + 3k + 4) \quad = \quad (k+1)\,.\,(k^2 + 4k + 4) \quad =$$

$(k+1)\,.\,(k+2)^2$, което трябваше да се докаже.

Втори начин: Като използваме наготово известните формули

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \quad = \quad \frac{n\,.\,(n+1)}{2} \qquad \text{и} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \quad = \quad \frac{n\,.\,(n+1)\,.\,(2n+1)}{6},$$

получаваме:

$$1\,.\,4 + 2\,.\,7 + 3\,.\,10 + \ldots + n\,.\,(3n+1) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} k\,.\,(3k+1) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + k) \quad =$$

$$3\,.\,\sum_{k=1}^{n} k^2 \;+\; \sum_{k=1}^{n} k \quad = \quad 3\,.\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \;+\; (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \quad =$$

$$3 \cdot \frac{n\,.\,(n+1)\,.\,(2n+1)}{6} + \frac{n\,.\,(n+1)}{2} \quad = \quad \frac{n\,.\,(n+1)\,.\,(2n+1)}{2} + \frac{n\,.\,(n+1)}{2} \quad =$$

$$\frac{n\,.\,(n+1)}{2} \cdot \Big((2n+1) + 1\Big) \quad = \quad \frac{n\,.\,(n+1)}{2} \cdot (2n+2) \quad = \quad \frac{n\,.\,(n+1)}{2}\,.\,2\,.\,(n+1) \quad =$$

$$n\,.\,(n+1)\,.\,(n+1) \quad = \quad n\,.\,(n+1)^2.$$

Трети начин: Нека $f(n) = n\,.\,(n+1)^2$. Разглеждаме разликата $f(n) - f(n-1)$:
$f(n) - f(n-1) = n\,.\,(n+1)^2 - (n-1)\,.\,n^2 = n\,.\,\Big((n+1)^2 - (n-1)\,.\,n\Big) = n\,.\,(n^2 + 2n + 1 - n^2 + n)$,
т.е. $f(n) - f(n-1) = n\,.\,(3n+1)$. Заместваме n с $n-1$, $n-2$ и т.н. до 1 вкл. Получаваме:
$f(n-1) - f(n-2) = (n-1)\,.\,(3n-2)$,
....

$$\begin{aligned} f(3) - f(2) &\quad = \quad 3\,.\,10, \\ f(2) - f(1) &\quad = \quad 2\,.\,7, \\ f(1) - f(0) &\quad = \quad 1\,.\,4. \end{aligned}$$

Събираме тези n равенства. В лявата страна се унищожават всички събираеми без $f(n)$ и $f(0)$; остава $f(n) - f(0) = n\,.\,(n+1)^2 - 0\,.\,1^2 = n\,.\,(n+1)^2$.
В дясната страна се получава търсената сума: $1\,.\,4 + 2\,.\,7 + 3\,.\,10 + \ldots + n\,.\,(3n+1)$.
Така равенството приема желания вид: $1\,.\,4 + 2\,.\,7 + 3\,.\,10 + \ldots + n\,.\,(3n+1) = n\,.\,(n+1)^2$.

Задача 5. Най-напред преформулираме определението на релацията ρ:

$(x_1\,,\,y_1)\;\rho\;(x_2\,,\,y_2) \quad\Leftrightarrow\quad x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2 \quad\Leftrightarrow\quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \quad\Leftrightarrow\quad f(x_1\,,\,y_1) = f(x_2\,,\,y_2)$,

където за краткост сме положили $f(x\,,\,y) = x^2 + y^2$.

а) ρ е релация на еквивалентност, защото равенството е такава релация. По-подробно:

— Рефлексивността на ρ следва от рефлексивността на равенството:

$(x\,,\,y)\;\rho\;(x\,,\,y)$, защото $f(x\,,\,y) = f(x\,,\,y)$ за $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall y \in \mathbb{R}$.

— Симетричността на ρ следва от симетричността на равенството:

$(x_1\,,\,y_1)\;\rho\;(x_2\,,\,y_2) \Leftrightarrow f(x_1\,,\,y_1) = f(x_2\,,\,y_2) \Leftrightarrow f(x_2\,,\,y_2) = f(x_1\,,\,y_1) \Leftrightarrow (x_2\,,\,y_2)\;\rho\;(x_1\,,\,y_1)$.

— Транзитивността на ρ следва от транзитивността на равенството:

$(x_1\,,\,y_1)\;\rho\;(x_2\,,\,y_2) \quad\wedge\quad (x_2\,,\,y_2)\;\rho\;(x_3\,,\,y_3)$

$\Rightarrow\; f(x_1\,,\,y_1) = f(x_2\,,\,y_2) \quad\wedge\quad f(x_2\,,\,y_2) = f(x_3\,,\,y_3)$

$\Rightarrow\; f(x_1\,,\,y_1) = f(x_3\,,\,y_3)$

$\Rightarrow\; (x_1\,,\,y_1)\;\rho\;(x_3\,,\,y_3)$.

б) Тъй като $(x_1\,,\,y_1)\;\rho\;(x_2\,,\,y_2) \;\Leftrightarrow\; f(x_1\,,\,y_1) = f(x_2\,,\,y_2)$, то всеки клас на еквивалентност представлява множество от точки в равнината, за които f има една и съща стойност:

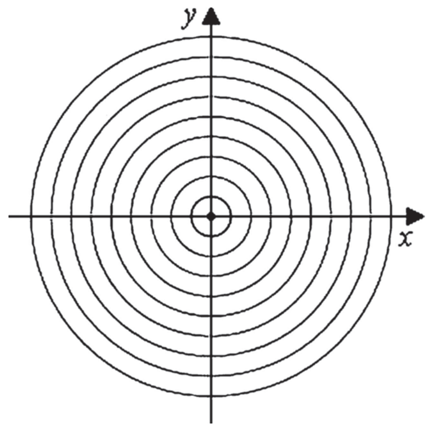
$F_c \;=\; \left\{\, (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x\,,\,y) = c \,\right\}$, тоест $F_c \;=\; \left\{\, (x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = c \,\right\}$.

Понеже сборът на два квадрата е неотрицателен, то $c \geq 0$. Всяка допустима стойност на c съответства на различен клас F_c. Поради това се казва, че класовете на еквивалентност образуват еднопараметрично семейство с параметър $c \in \left[\,0\,;\,+\infty\right)$.

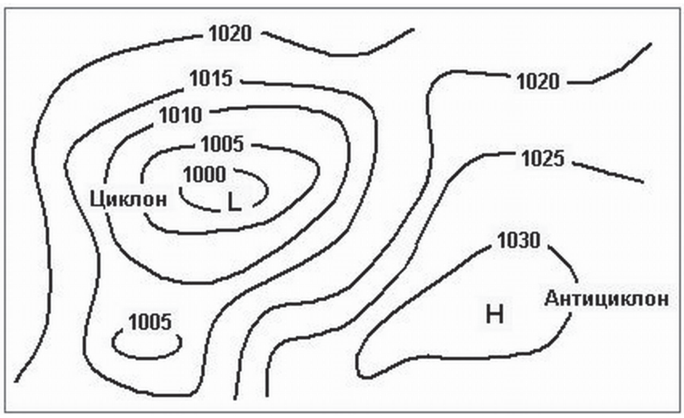
При $c = 0$ съответният клас на еквивалентност F_0 се състои от единствена точка: $O(0\,;\,0)$ — началото на координатната система Oxy, т.е. $F_0 = \left\{\,(0\,;\,0)\,\right\}$.

При $c > 0$ фигурата F_c с уравнение $x^2 + y^2 = c$ е окръжност с център т. $O(0\,;\,0)$ и радиус $\sqrt{c}$.

И така, разглеждани като геометрични фигури, класовете на еквивалентност са всички окръжности с център т. $O(0\,;\,0)$, както и самата точка $O(0\,;\,0)$.

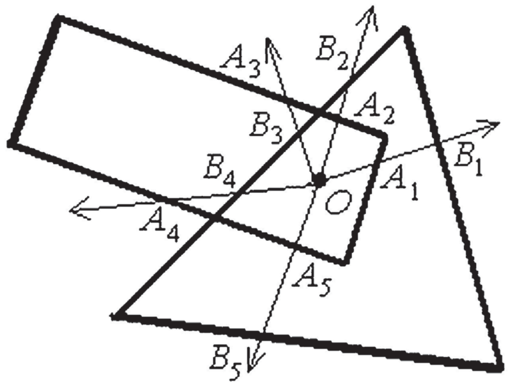


Забележка: В математиката и в другите науки често се налага изучаването на линии от вида $f(x\,,\,y) \;=\; c$. Те се наричат изолинии (линии на еднаква стойност на функцията). Такива са например линиите на надморската височина, линиите на еднаква температура, линиите на атмосферното налягане (така наречените изобари) и други. Изобарите ясно очертават областите с ниско (L) и с високо (H) налягане, където възникват съответно циклони и антициклони.



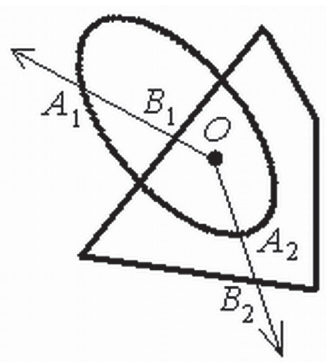
Задача 6 може да се реши по различни начини.

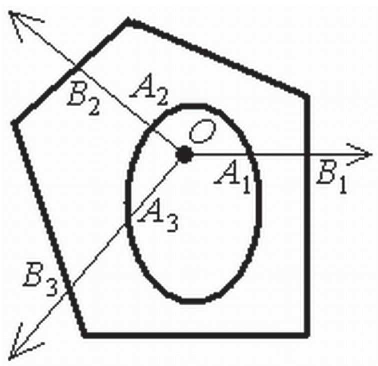
Първият начин е най-естествен: проектираме единия контур върху другия. Избираме за център на проекцията произволна точка O, вътрешна за двете фигури. На всяка т. A от единия контур съпоставяме онази т. B, в която лъчът $OA^{\rightarrow}$ пресича другия контур. Това, че всяка точка A има единствен образ B (т.е. изображението е коректно дефинирано), и това, че всяка точка B има единствен първообраз A (т.е. изображението е биекция), се дължи на следното свойство на ограничените изпъкналите фигури:

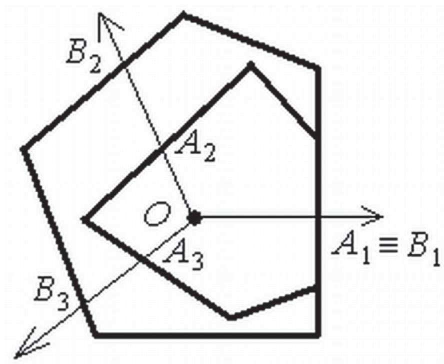


Свойство: *Всеки лъч с начало произволна вътрешна точка на ограничена изпъкнала фигура пресича контура на фигурата точно един път.*

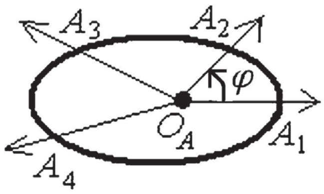
Въз основа на това свойство предложеното решение се пренася за произволни ограничени изпъкнали фигури с обща вътрешна точка. Решението важи както в случая, когато двете фигури се пресичат, така и в случая, когато едната фигура лежи във вътрешността на другата. Във втория случай решението важи и когато единият контур лежи изцяло във вътрешността на другия, и когато двата контура имат общ участък.

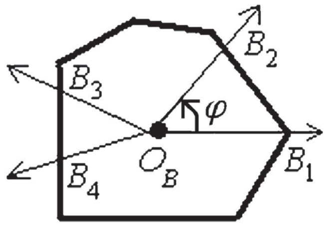




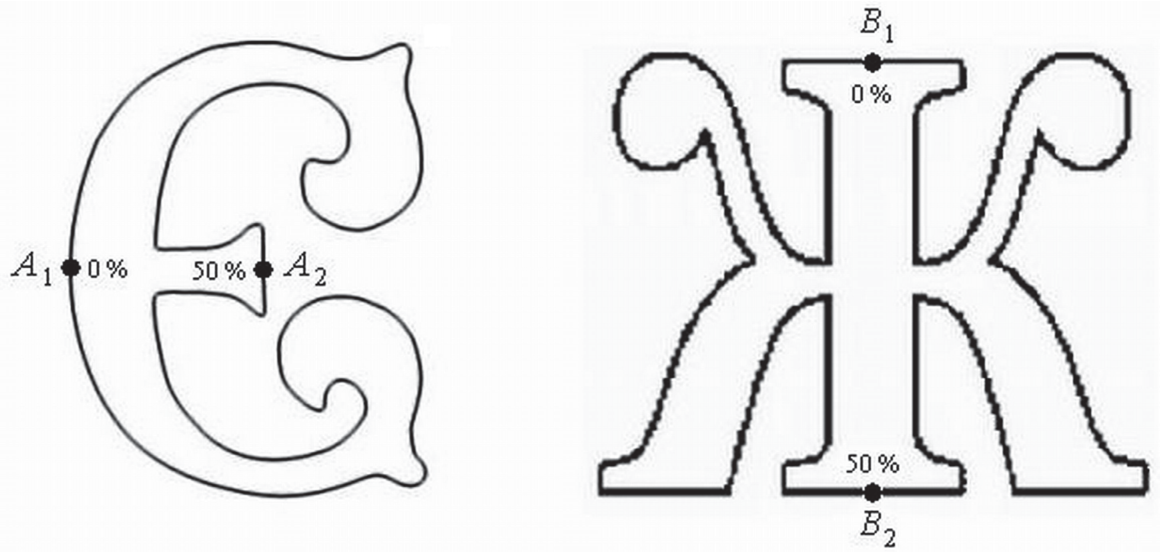


Вторият начин е малко по-общ: той се отнася за ограничени изпъкнали фигури, които може да имат, а може и да нямат обща вътрешна точка. За всяка от двете фигури избираме по една вътрешна точка — съответно O_A и O_B. На всяка точка A_i от първия контур (съответно на всяка точка B_i от втория контур) съпоставяме мярката $\varphi \in \big[0\,;\,2\pi\big)$ на ъгъла между лъча $O_A\,A_i^{\rightarrow}$ $\Big($респ. $O_B\,B_i^{\rightarrow}\Big)$ и посоката надясно, като ъгълът се мери от посоката надясно до текущото положение на лъча обратно на движението на часовниковата стрелка. Съответствието между точка от контура и мярка на ъгъла е биекция; това следва от свойството по-горе. Т.е. има две биекции: първи контур $\leftrightarrow \big[0\,;\,2\pi\big) \leftrightarrow$ втори контур. Тяхната композиция е биекция между двата контура, която на всяка точка A_i съпоставя точка B_i така, че съответните ъгли да имат една и съща мярка φ. С други думи, двата лъча $O_A\,A_i^{\rightarrow}$ и $O_B\,B_i^{\rightarrow}$ са еднопосочни.





Третият начин е най-общ: той дава решение за всички ограничени изпъкнали фигури и за много от ограничените неизпъкнали фигури (чийто контур е една линия). Без значение е дали двете дадени фигури имат обща вътрешна точка.



Идеята е следната: за всеки от двата контура избираме произволна отправна точка, от която започваме да обикаляме контура в избрана от нас посока (например обратно на движението на часовниковата стрелка); на всяка точка от контура съпоставяме онова число между 0 и 1 (в проценти: между $0\,\%$ и $100\,\%$), което показва каква част от дължината на целия контур сме изминали до момента. Така получаваме биекция между всеки контур и интервала $\big[0\,;\,1\big)$; общо две биекции — по една за всеки от двата контура. Тяхната композиция е търсената биекция между контурите; на всяка точка от единия контур тя съпоставя онази точка от другия контур, която се намира на същото относително разстояние от избраното начало на контура (например средите на контурите са образ и първообраз при тази биекция).

Нека отбележим, че последното решение, макар и най-общо от трите предложени, все пак не е универсално. То важи само за т. нар. ректифицируеми криви (т.е. линии с крайна дължина). Съществуват нeректифицируеми криви, които ограждат ограничена равнинна област, обаче са толкова нагънати, че не само дължината на цялата крива е безкрайна, но е безкрайна също и дължината на всяка нейна дъга. Пример за такава крива е снежинката на Кох. Тя и други подобни обекти се изучават във фракталната геометрия.