

ТЕМА: ИНДУКЦИЯ. РЕЛАЦИИ. ФУНКЦИИ.  
КОМБИНАТОРИКА

Задача	1	2	3	4	5	6	Макс.
получени точки							
от максимално	15	20	10	12	15	12	80

**Задача 1:** (15т.) Дадено е множеството  $S \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , дефинирано по следния начин:

1. Базов случай:  $(0, 0) \in S$ ;
2. Стъпка: изпълнено е  $(a, b) \in S \rightarrow (a + 2, b + 3) \in S$  и  $(a, b) \in S \rightarrow (a + 3, b + 2) \in S$

3. Множеството не съдържа други елементи, освен изброените в т. 1 и получените чрез прилагане на операциите от т. 2.

Докажете, че  $\forall (a, b) \in S(5|a + b)$

**Задача 2:** (20т.) Нека  $n \in \mathbb{N}^+$  и  $f : J_2^n \rightarrow J_{n+1}, f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ .

а)(5т.) Докажете, че релацията

$$R \subseteq J_2^n \times J_2^n = \{(\alpha = (a_1, \dots, a_n), \beta = (b_1, \dots, b_n)) \in R \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta)\}$$

е релация на еквивалентност.

б)(5т.) Определете класовете на еквивалентност на релацията  $R$

в)(5т.) Определете броя на класовете на еквивалентност на релацията  $R$

г)(5т.) Напишете в явен вид класовете на еквивалентност на релацията  $R$  за  $n = 4$

**Задача 3:** (10т.) Дадени са релациите

$$R_{<} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) \in R_{<} \Leftrightarrow a < b\},$$

$$R_{>} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) \in R_{>} \Leftrightarrow a > b\},$$

$$R_{=} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) \in R_{=} \Leftrightarrow a = b\}.$$

Докажете, че фамилията от множества  $\{R_{<}, R_{>}, R_{=}\}$  е разбиване на множеството  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

**Задача 4:** (12т.) Нека  $f : A \rightarrow B$  е функция, а  $X, Y \subseteq A$  и  $S, T \subseteq B$  са множества. Да означим с  $f(M)$  образа на множеството  $M$ , а с  $f^R(M)$  първообраза на множеството  $M$  относно функцията  $f$ . Да се докаже, че:

- а) (3т.)  $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
- б) (3т.)  $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$
- в) (3т.)  $f^R(S \cap T) = f^R S \cap f^R T$
- г) (3т.)  $X \subseteq f^R(f(X))$

**Задача 5:** (15т.) Дадена е окръжност  $R$ , на която са отбелязани последователно 12 точки -  $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ . Намерете броя на:

- а) (3т.) различните хорди с краища две от указаните точки;
- б) (3т.) различните триъгълници с върхове три от точките;
- в) (3т.) изпъкналите четириъгълници с върхове измежду дадените точки;
- г) (3т.) триъгълниците с върхове в дадените точки, чиито страни не се пресичат с правата, определена от точките  $a_2$  и  $a_8$ ;
- д) (3т.) триъгълниците с върхове измежду указаните точки, чиито страни се пресичат с правата през точките  $a_1$  и  $a_5$ .

**Задача 6:** (12т.) Биномни коефициенти:

- а) (4т.) Представете във вид на полином  $\left(x + \frac{y}{2}\right)^5$
- б) (4т.) Определете коефициента пред  $x^{10} \cdot y^5$  в  $(3x + 2y)^{15}$ , като обосновайте отговора си
- в) (4т.) Определете коефициента пред  $x^{20}$  в  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{100}$ , като обосновайте отговора си