Домашно №2 по Дискретни Структури, спец. Компютърни науки, зимен семестър 2015/2016г.

ТЕМА: ИНДУКЦИЯ. РЕЛАЦИИ. ФУНКЦИИ. КОМБИНАТОРИКА
РЕШЕНИЯ

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Макс.**
получени точки							
от максимално	15	20	10	12	15	12	80

Задача 1: (15т.) Дадено е множеството $S \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, дефинирано по следния начин:

1. Базов случай: $(0,0) \in S$;
2. Стъпка: изпълнено е $(a,b) \in S \rightarrow (a+2, b+3) \in S$ и
$$(a,b) \in S \rightarrow (a+3, b+2) \in S$$
3. Множеството не съдържа други елементи, освен изброените в т. 1 и получените чрез прилагане на операциите от т. 2.

Докажете, че $\forall (a,b) \in S (5 | a+b)$

Решение:

Ще докажем, че всяка наредена двойка (a,b), която е елемент на множеството S, удовлетворява следния предикат: $P((a,b)) : 5|a+b$

1. Базов случай: $P((0,0))$ е истина, тъй като $5|0+0$.
2. Нека елементът $(a,b) \in S$ е от вида $(a'+2, b'+3)$, където $(a',b') \in S$.
$(a',b') \in S \Rightarrow 5|a'+b' \Rightarrow 5|a'+2+b'+3 \Rightarrow P((a,b))$ е истина.
Нека елементът $(a,b) \in S$ е от вида $(a'+3, b'+2)$, където $(a',b') \in S$.
$(a',b') \in S \Rightarrow 5|a'+b' \Rightarrow 5|a'+3+b'+2 \Rightarrow P((a,b))$ е истина.
3. Следователно $P((a,b))$ е истина за всеки елемент (a,b) на множеството S.

Задача 2: (20т.) Нека $n \in \mathbb{N}^+$ и $f : J_2^n \rightarrow J_{n+1}, f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

а)(5т.) Докажете, че релацията

$R \subseteq J_2^n \times J_2^n = \{(\alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n)) \in R \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta)\}$
е релация на *еквивалентност.*

Решение:

1. Релацията е рефлексивна, ако $\forall \alpha \in J_2^n, (\alpha, \alpha) \in R$.

   Доказателство: Нека $\alpha \in J_2^n$. Тогава: $f(\alpha) = f(\alpha) \Rightarrow (\alpha, \alpha) \in R$. Следователно, релацията е рфлексивна.

2. Релацията е симетрична, ако $\forall \alpha, \beta \in J_2^n, (\alpha, \beta) \in R \Rightarrow (\beta, \alpha) \in R$.

   Доказателство: Нека $\alpha, \beta \in J_2^n, (\alpha, \beta) \in R$. Тогава: $(\alpha, \beta) \in R \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow f(\beta) = f(\alpha) \Rightarrow (\beta, \alpha) \in R$. Следователно, релацията е симетрична.

3. Релацията е транзитивна, ако $\forall \alpha, \beta, \gamma \in J_2^n$, $(\alpha, \beta) \in R \wedge (\beta, \gamma) \in R \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in R$.

   Доказателство: Нека $\alpha, \beta, \gamma \in J_2^n$, $(\alpha, \beta) \in R, (\beta, \gamma) \in R$.Тогава: $(\alpha, \beta) \in R \wedge (\beta, \gamma) \in R \Rightarrow f(\alpha) = f(\beta) \wedge f(\beta) = f(\gamma) \Rightarrow f(\alpha) = f(\gamma) \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in R$. Следователно, релацията е транзитивна.

Следователно, релацията е релация на *еквивалентност.*

б)(5т.) Определете класовете на еквивалентност на релацията R
Решение:
Нека $\alpha \in J_2^n, f(\alpha) = y \in J_{n+1}$. Тогава:
$[\alpha] = \{\beta \in J_2^n | (\alpha, \beta) \in R\} = \{\beta \in J_2^n | f(\alpha) = f(\beta) = y\}$.
Следователно, класовете на еквивалентност са:
$A_0 = \{\alpha \in J_2^n | f(\alpha) = 0\}$
$A_1 = \{\alpha \in J_2^n | f(\alpha) = 1\}$
$A_2 = \{\alpha \in J_2^n | f(\alpha) = 2\}$
...
$A_n = \{\alpha \in J_2^n | f(\alpha) = n\}$

в)(5т.)Определете броя на класовете на еквивалентност на релацията R

Решение:

Всяко число $y \in J_{n+1}$ определя един клас на еквивалентност. Следователно, броят на класовете на еквивалентност е $|J_{n+1}| = n + 1$.

г)(5т.) Напишете в явен вид класовете на еквивалентност на релацията R за $n = 4$

Решение:
Класовете на еквивалентност са:
$A_0 = \{\alpha \in J_2^n | f(\alpha) = 0\} = \{(0, 0, 0, 0)\}$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\alpha \in J_2^n | f(\alpha) = 1\} = \{(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,0,0),(1,0,0,0)\}\\
A_2 &= \{\alpha \in J_2^n | f(\alpha) = 2\} = \{(0,0,1,1),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(1,0,0,1),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1,0,1,0),(1,1,0,0)\}\\
A_3 &= \{\alpha \in J_2^n | f(\alpha) = 3\} = \{(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}\\
A_4 &= \{\alpha \in J_2^n | f(\alpha) = 4\} = \{(1,1,1,1)\}
\end{aligned}
$$

Задача 3: (10т.) Дадени са релациите

$R_< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b) \in R_< \Leftrightarrow a < b\}$,

$R_> \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b) \in R_> \Leftrightarrow a > b\}$,

$R_= \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b) \in R_= \Leftrightarrow a = b\}$.

Докажете, че фамилията от множества $\{R_<, R_>, R_=\}$ е разбиване на множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Решение:

1. Всяко от множествата $R_<, R_>, R_=$ е различно от празното множество

2. Сечението на всеки две множества от множествата $R_<, R_>, R_=$ е празното множество

3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = R_< \cup R_> \cup R_=$, защото $\forall (a,b) : (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Leftrightarrow$

   $a < b \vee a > b \vee a = b \Leftrightarrow$

   $(a,b) \in R_< \vee (a,b) \in R_> \vee (a,b) \in R_= \Leftrightarrow$

   $(a,b) \in R_< \cup R_> \cup R_=$

   Следователно, фамилията от множества $\{R_<, R_>, R_=\}$ е разбиване на множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Задача 4: (12т.) Нека $f : A \to B$ е функция, а $X, Y \subseteq A$ и $S, T \subseteq B$ са множества. Да означим с $f(M)$ образа на множеството M, а с $f^R(M)$ първообраза на множеството M относно функцията f. Да се докаже, че:

а) (3т.) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

Решение:

1. Нека $z \in f(X \cup Y) \Rightarrow$

   $\exists a \in X \cup Y (f(a) = z) \Rightarrow$

   $(a \in X \wedge f(a) = z) \vee (a \in Y \wedge f(a) = z) \Rightarrow$

   $z \in f(X) \vee z \in f(Y) \Rightarrow$

   $z \in f(X) \cup f(Y)$

2. Нека $z \in f(X) \cup f(Y) \Rightarrow$

$$z \in f(X) \vee z \in f(Y) \Rightarrow$$

$$\exists a \in X(f(a) = z) \vee \exists b \in Y(f(b) = z) \Rightarrow$$

$$z \in f(X) \vee z \in f(Y) \Rightarrow$$

$$z \in f(X) \cup f(Y)$$

От 1. и 2. следва $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

б) (3т.) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$
Решение:

1. Нека $z \in f(X \cap Y) \Rightarrow$

$$\exists a \in X \cap Y(f(a) = z) \Rightarrow$$

$$a \in X \wedge a \in Y \wedge f(a) = z \Rightarrow$$

$$z \in f(X) \wedge z \in f(Y) \Rightarrow$$

$$z \in f(X) \cap f(Y) \Rightarrow$$

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$$

2. Ще покажем, че съществува функция $f : A \to B$ и множества $X, Y \subseteq A$, за които обратното включване не е изпълнено, т.е.

$$f(X \cap Y) \not\supseteq f(X) \cap f(Y)$$

Да разгледаме функцията $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, b, c, d\}$, зададена със следната таблица:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	a	b	d	c	d

и множествата $X = \{2, 3, 4\}, Y = \{4, 5\}$.

$f(X \cap Y) = f(\{2, 3, 4\} \cap \{4, 5\}) = f(\{4\}) = \{c\}$

$f(X) \cap f(Y) = f(\{2, 3, 4\}) \cap f(\{4, 5\}) = \{b, c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\}$

Следователно $f(X \cap Y) \not\supseteq f(X) \cap f(Y)$

в) (3т.) $f^R(S \cap T) = f^R(S) \cap f^R(T)$
Решение:

1. Нека $a \in f^R(S \cap T) \Rightarrow$

   $\exists z \in S \cap T(f(a) = z) \Rightarrow$

   $z \in S \wedge z \in T \wedge f(a) = z \Rightarrow$

   $a \in f^R(S) \wedge a \in f^R(T) \Rightarrow$

   $a \in f^R(S) \cap f^R(T)$

2. Нека $a \in f^R(S) \cap f^R(T) \Rightarrow$

   $a \in f^R(S) \wedge a \in f^R(T) \Rightarrow$

   $\exists s \in S(f(a) = s) \wedge \exists t \in T(f(a) = t) \Rightarrow$ *тъй като f е функция*

   $\exists z \in S \cap T(f(a) = z) \Rightarrow$ $z = s = t$

   $a \in f^R(S \cap T)$

   От 1. и 2. следва $f^R(S \cap T) = f^R(S) \cap f^R(T)$

г) (3т.) $X \subseteq f^R(f(X))$
Решение:

1. Нека $a \in X \Rightarrow$

   $\exists z \in f(X)(f(a) = z) \Rightarrow$

   $a \in f^R(f(X)) \Rightarrow$

   $X \subseteq f^R(f(X))$

2. Ще покажем, че съществува функция $f : A \rightarrow B$ и множество $X \subseteq A$, за което обратното включване не е изпълнено, т.е.

   $X \not\supseteq f^R(f(X))$

   За целта ще ни послужат функцията f и множеството X, дефинирани в подточка б).

   $X = \{2, 3, 4\}$

   $f(X) = \{b, c, d\}$

   $f^R(f(X)) = \{2, 3, 4, 5\}$

   Следователно $X \not\supseteq f^R(f(X))$

Задача 5: (15т.) Дадена е окръжност R, на която са отбелязани последователно 12 точки - $a_1, a_2, ..., a_{12}$. Намерете броя на:
а) (3т.) различните хорди с краища две от указаните точки;

Решение: Всяка хорда се определя от двете точки, които са нейни краища. Така броят на различните хорди е равен на броя на ненаредените двойки точки: $C_{12}^2 = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!10!} = 66$

б) (3т.) различните триъгълници с върхове три от точките;

Решение: Всеки триъгълник се определя от три точки, не лежащи на една права, които са негови върхове. Тъй като дванадесетте точки, от които правим избор, лежат на една окръжност, то никои три от тях не лежат на една права. Така броят на триъгълниците е равен на броя на триелементните подмножества на множеството от 12 точки:

$C_{12}^3 = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!9!} = 220$

в) (3т.) изпъкналите четириъгълници с върхове измежду дадените точки;

Решение: Ако се изберат четири от дванадесетте точки върху окръжността, то от тях може да се формира само един изпъкнал четириъгълник. Така броят на въпросните четириъгълници е равен на броя на четириелементните подмножества на множеството от точките:

$C_{12}^4 = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = 495$

г) (3т.) триъгълниците с върхове в дадените точки, чиито страни не се пресичат с правата, определена от точките a_2 и a_8;

Решение: За да се избегне пресичането на страна на триъгълника с правата, определена от точките a_2 и a_8, трябва трите върха на триъгълника да са от една и съща страна на правата. Така за всеки триъгълник върховете му могат да бъдат избирани от две непресичащи се множества - $A = \{a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ и $B = \{a_1, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$. Трите върха можем да изберем от едно от множествата A или B по C_5^3 начина. Така общият брой на търсените триъгълници е $2\binom{5}{3} = 2\frac{5!}{3!2!} = 20$.

д) (3т.) триъгълниците с върхове измежду указаните точки, чиито страни се пресичат с правата през точките a_1 и a_5.

Решение: За да е изпълнено това условие трябва триъгълникът да има върхове от двете страни на правата, определена от точките a_1 и a_5. Това означава, че върховете на триъгълника трябва да се избират от множествата $A = \{a_2, a_3, a_4\}$ и $B = \{a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$.

Първи случай: два от върховете на триъгълника са избрани от множеството A, третият от множеството B. Този избор може да стане по $C_3^2.C_7^1 = \binom{3}{2}\binom{7}{1} = 3.7 = 21$ начина.

Втори случай: един връх се избира от множеството A, два от множеството B. Това може да стане по $C_3^1.C_7^2 = \binom{3}{1}\binom{7}{2} = 3.21 = 63$ начина.

Така общият брой на описаните триъгълници е
$\binom{3}{2}\binom{7}{1} + \binom{3}{1}\binom{7}{2} = 21 + 63 = 84$

Задача 6: (12т.) Биномни коефициенти:

а) (4т.) Представете във вид на полином $\left(x + \frac{y}{2}\right)^5$

Решение:

$$\left(x + \frac{y}{2}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot x^k \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{5-k} =$$
$$= \binom{5}{0} \cdot x^0 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot x^1 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^3 +$$
$$+ \binom{5}{3} \cdot x^3 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot x^4 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot x^5 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^0 =$$
$$= \frac{5!}{0! \cdot 5! \cdot 2^5} \cdot y^5 + \frac{5!}{1! \cdot 4! \cdot 2^4} \cdot x \cdot y^4 + \frac{5!}{2! \cdot 3! \cdot 2^3} \cdot x^2 \cdot y^3 +$$
$$+ \frac{5!}{3! \cdot 2! \cdot 2^2} \cdot x^3 \cdot y^2 + \frac{5!}{4! \cdot 1! \cdot 2^1} \cdot x^4 \cdot y + \frac{5!}{5! \cdot 0! \cdot 2^0} \cdot x^5 =$$
$$= \frac{1}{2^5} \cdot y^5 + \frac{5}{2^4} \cdot x \cdot y^4 + \frac{5!}{2! \cdot 3! \cdot 2^3} \cdot x^2 \cdot y^3 +$$
$$+ \frac{5!}{3! \cdot 2! \cdot 2^2} \cdot x^3 \cdot y^2 + \frac{5}{2} \cdot x^4 \cdot y + x^5$$

б) (4т.) Определете коефициента пред $x^{10} \cdot y^5$ в $(3x + 2y)^{15}$, като обосновете отговора си

Решение:

$(3x + 2y)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \cdot (3x)^k \cdot (2y)^{15-k}$. Следователно, коефициентът е $\binom{15}{10} \cdot 3^{10} \cdot 2^5 = \frac{15!}{10! \cdot 5!} \cdot 3^{10} \cdot 2^5$.

в) (4т.) Определете коефициента пред x^{20} в $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{100}$, като обосновете отговора си

Решение:

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \cdot x^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{100-k} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \cdot x^{2k-100}$. От $2k - 100 = 20$ следва, че $k = 60$. Следователно, коефициентът е $\binom{100}{60} = \frac{100!}{60! \cdot 40!}$.