

Име: _____, ФН: _____, Група: _____

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Задача 1. Докажете, че $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$ за всяко цяло $n \geq 1$.

Задача 2. Разглеждаме релации, дефинирани над множеството на целите положителни числа. Известно е, че n -местните релации ($n \geq 3$) често могат да се представят като конюнкция (сечение) на бинарни релации. Пример:

$$\text{числата } x, y \text{ и } z \text{ са наредени в нарастващ ред} \Leftrightarrow (x < y) \wedge (y < z).$$

Обаче не винаги има такова представяне. Докажете, че не съществува бинарна релация R , за която да е в сила представянето

$$x^y \text{ дели } z \Leftrightarrow xRy \wedge yRz.$$

Задача 3. Студентска конференция по висша математика се провежда в три секции — алгебра, геометрия и математически анализ. На конференцията присъстват общо 450 студенти от първи до четвърти курс, от различни университети. Измежду всеки осем студенти има поне двама от един и същ университет. Докажете, че в някоя от секциите на конференцията присъстват поне шестима студенти от един и същи курс на един и същ университет.

Упътване: Използвайте принципа на Дирихле.

Задача 4. Десет приятели искат да играят на футбол.

- По колко начина могат да се разделят на два отбора по пет души?
- Колко стават вариантите, ако всеки отбор си избира вратар и капитан?

Забележка: Пресметнете отговорите докрай.

Задача 5. Нека $A = \{p, q, r, s, t\}$, $B = \{x, y, z, u, v, w\}$, $C = A \cup B$. Намерете броя на релациите на строга линейна наредба в C , такива, че $a < b$ за $\forall a \in A$ и $\forall b \in B$.

Забележка: Изчислете отговора докрай.

Задача 6. Постройте биекция между контурите на кръг и трапец, ако контурите и вътрешните области на двете фигури нямат обща точка.

РЕШЕНИЯ

Задача 1 се решава с принципа на математическата индукция.

База: $n = 1$. Трябва да проверим неравенството $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$, тоест $\frac{13}{12} > 1$, което е очевидно вярно.

Индуктивна стъпка: Нека неравенството е изпълнено при $n = k$ за някое $k \geq 1$, т.е. нека $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+1} > 1$. Ще докажем, че в такъв случай неравенството важи

и при $n = k + 1$, т.е. $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \dots + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} > 1$.

За целта е достатъчно да установим, че разликата на левите страни е неотрицателна:

$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} > 0$. Това неравенство може да се провери чрез преобразуване в поредица от равносилни неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \frac{1}{k+1} - \frac{1}{3k+3} &\iff \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \frac{3}{3k+3} - \frac{1}{3k+3} \iff \\ \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \frac{2}{3k+3} &\iff (3k+3)(3k+4) + (3k+3)(3k+2) > 2(3k+2)(3k+4) \iff \\ (3k+3)[(3k+4) + (3k+2)] > 2(3k+2)(3k+4) &\iff (3k+3)(6k+6) > 2(3k+2)(3k+4) \iff \\ (3k+3)(3k+3) > (3k+2)(3k+4) &\iff 9k^2 + 18k + 9 > 9k^2 + 18k + 8 \iff 9 > 8, \end{aligned}$$

което е безспорно.

Задача 2. Да допуснем противното: че съществува бинарна релация R , за която

$$x^y \text{ дели } z \iff xRy \wedge yRz.$$

Заместваме $x = 1$. Тъй като $1^y = 1$ дели z , то $1Ry \wedge yRz$, откъдето следва, че yRz за всички цели положителни числа y и z . Тогава xRy за всички цели положителни x и y . Ето защо $xRy \wedge yRz$, следователно x^y дели z за всички цели положителни числа x , y и z . Но това не е вярно: например $2^3 = 8$ не дели 7. Полученото противоречие води до извода, че направеното допускане е неправилно. Тоест търсената бинарна релация не съществува.

Задача 3. Прилагаме принципа на Дирихле два пъти.

Първи път: щом измежду всеки осем студенти има поне двама от един и същ университет, то следва, че на конференцията са представени най-много седем университета.

Втори път: считаме наредените тройки $\langle \text{секция, университет, курс} \rangle$ за “чекмеджета”. Според правилото за умножение броят на тези тройки е не по-голям от $3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$. Да поставим всеки студент в съответното му “чекмедже”. Тъй като $450 : 84 = 5$ и остатък 30, то ще се намери “чекмедже” с поне шестима студенти. Те са от един и същ университет, от един и същи курс и докладват в една и съща секция.

Задача 4.

- а) Това подусловие допуска разнообразни решения. Например посочваме един от играчите по произволен начин и го оставяме да си избере четирима съотборници; това може да стане по $C_9^4 = 126$ начина. Друг подход: ние избираме петима играчи за единия отбор, за което разполагаме с $C_{10}^5 = 252$ възможности. Обаче всяка комбинация и нейното допълнение, например $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, задават едно и също разпределение на играчите по отбори. Затова броят на възможните разпределения по отбори е половината от броя на комбинациите 5 от 10, т.е. $252 : 2 = 126$.

Отговор: Играчите могат да се разпределят на отбори по 126 начина.

- б) Всяка от наредените двойки $\langle \text{вратар}, \text{капитан} \rangle$ представлява вариация без повторение на два елемента от пет (играчите от един отбор). Броят на тези вариации е $V_5^2 = 20$, тоест всеки отбор може да избере вратар и капитан по 20 различни начина. За двата отбора общо начините са $20 \cdot 20 = 400$. Тези 400 начина съответстват на едно разпределение на играчите по отбори. От всичките 126 разпределения се получават $126 \cdot 400 = 50400$ варианта.

Отговор: Има 50400 варианта играчите да се разпределят на два отбора и всеки отбор да си избере вратар и капитан.

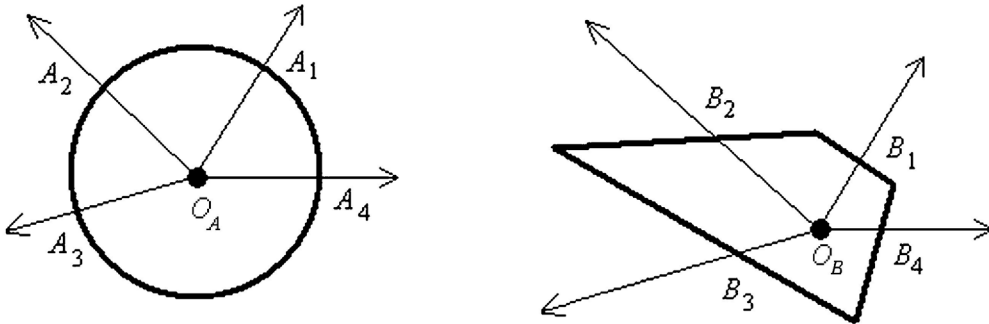
Забележка: В условието на задачата се подразбира, че вратарят и капитанът са двама различни играчи, затова вариациите са без повторение. Ако се допуска възможността вратарят да е капитан, тогава вариациите ще бъдат със повторение и броят им ще бъде $\widetilde{V}_5^2 = 25$. За двата отбора вариантите ще бъдат $25 \cdot 25 = 625$, а за всички разпределения на играчите по отбори ще има $126 \cdot 625 = 78750$ възможности. При новото тълкуване този отговор също може да се приеме за верен.

Задача 5. Всяка релация на строга линейна наредба представлява едно възможно подреждане на елементите на множеството $C = A \cup B$ в редица. По същество търсим броя на всички редици от елементи на C , в които редици елементите на A предхождат елементите на B . Тоест елементите на A заемат първите пет места, а елементите на B — последните шест места. Всяко разместване на елементите на A по местата им е пермутация на пет елемента. Броят на тези пермутации е $P_5 = 5! = 120$. Аналогично, всяко разместване на елементите на B по местата им е пермутация на 6 елемента. Броят на тези пермутации е $P_6 = 6! = 720$. По правилото за умножение получаваме $120 \cdot 720 = 86400$ за броя на възможните релации.

Отговор: Има 86400 релации на строга линейна наредба в C , такива, че $a < b$ за $\forall a \in A$ и $\forall b \in B$.

Задача 6. Има два начина за решаването на тази задача. И двата използват едно и също свойство на изпъкналите фигури: лъч, чието начало е вътрешна точка за дадена изпъкнала фигура, пресича контура на фигурата точно веднъж.

Първи начин: Избираме две точки: O_A — вътрешна за кръга; O_B — вътрешна за трапеца. На всяка точка A от контура на кръга съпоставяме мярката на ъгъла, който лъчът $O_AA \rightarrow$ сключва с посоката хоризонтално надясно (ъгълът се мери от посоката “хоризонтално надясно” към лъча $O_AA \rightarrow$ обратно на движението на часовниковата стрелка). Така дефинираното изображение от контура на кръга към интервала $[0; 2\pi)$ е биекция; това твърдение следва от цитираното свойство на изпъкналите фигури.



Аналогично, ако $\varphi \in [0; 2\pi)$, то съществува единствен лъч с начало точката O_B , който сключва ъгъл φ с посоката “хоризонтално надясно” (ъгълът се мери, както бе обяснено по-горе). Този лъч пресича контура на трапеца в единствена точка B . По такъв начин е дефинирано изображение от интервала $[0; 2\pi)$ към контура на трапеца; то също представлява биекция, понеже и трапецът е изпъкнала фигура.

Композицията на двете биекции е биекция от контура на кръга към контура на трапеца. Ако точките B и A са съответно образ и първообраз при тази биекция, то лъчите $O_AA \rightarrow$ и $O_BB \rightarrow$ са еднопосочни, понеже сключват един и същ ъгъл φ с посоката “хоризонтално надясно”. Това наблюдение ни позволява да дефинираме биекцията между двата контура по-кратко (без композиция): за всяка точка A от контура на кръга единственият лъч с начало т. O_B , който е еднопосочен с лъча $O_AA \rightarrow$, пресича контура на трапеца в единствена точка B , която по определение е образът на точката A . Обратно, за всяка точка B от контура на трапеца единственият лъч с начало т. O_A , който е еднопосочен с лъча $O_BB \rightarrow$, пресича контура на кръга в единствена точка A , която е първообразът на B . Твърденията за единственост на пресечните точки следват от цитираното свойство на изпъкналите фигури. От това, че всяка точка A има единствен образ B , следва, че изображението е коректно дефинирано. От това, че всяка точка B има единствен първообраз A , следва, че изображението е биекция.

Втори начин: Извършваме транслация на едната фигура така, че вътрешните области на фигурите да получат някаква обща точка O . На всяка точка A от контура на кръга съпоставяме единствената точка B , в която лъчът $OA \rightarrow$ пресича контура на трапеца. Това изображение е биекция, защото всяка точка B от контура на трапеца има единствен първообраз — онази точка A , в която лъчът $OB \rightarrow$ пресича контура на кръга.

