Контролно №1 по Дискретни Структури, спец. Компютърни науки, 24.11.2016г.

РЕШЕНИЯ

Име .... ф№.......... гр....

Задача	1	2	3	4	5	6	Макс.
получени точки							
от максимално	21	20	9	12	15	20	85

Задача 4: (12т.) Разгледайте следните твърдения и формулирайте всяко твърдение на езика на предикатната логика. Образувайте и отрицанията на двете твърдения, като при това никъде във формулировката да не се среща знакът за отрицание $\neg$.

а) (5т.) Всяко цяло число, кратно на 4, може да се представи като сума от квадратите на две цели числа;

Решение:

$\forall x \in \mathbb{Z}((4|x) \to \exists y, z \in \mathbb{Z}(x = y^2 + z^2))$

$\neg(\forall x \in \mathbb{Z}((4|x) \to \exists y, z \in \mathbb{Z}(x = y^2 + z^2))) \equiv$
$\exists x \in \mathbb{Z}\neg((4|x) \to \exists y, z \in \mathbb{Z}(x = y^2 + z^2)) \equiv$
$\exists x \in \mathbb{Z}\neg(\neg(4|x) \vee \exists y, z \in \mathbb{Z}(x = y^2 + z^2)) \equiv$
$\exists x \in \mathbb{Z}((4|x) \wedge \neg(\exists y, z \in \mathbb{Z}(x = y^2 + z^2))) \equiv$
$\exists x \in \mathbb{Z}((4|x) \wedge \forall y, z \in \mathbb{Z}\neg(x = y^2 + z^2)) \equiv$
$\exists x \in \mathbb{Z}((4|x) \wedge \forall y, z \in \mathbb{Z}(x \neq y^2 + z^2))$

б) (7т.) За всяко реално число $x \geq -1$ и за всяко естествено число n е в сила неравенството $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Решение:

$\forall x \in \mathbb{R}\forall n \in \mathbb{N}((x > -1) \to ((1 + x)^n \geq 1 + nx))$

$\neg(\forall x \in \mathbb{R}\forall n \in \mathbb{N}((x > -1) \to ((1 + x)^n \geq 1 + nx))) \equiv$
$\exists x \in \mathbb{R}\neg(\forall n \in \mathbb{N}((x > -1) \to ((1 + x)^n \geq 1 + nx))) \equiv$
$\exists x \in \mathbb{R}\exists n \in \mathbb{N}\neg((x > -1) \to ((1 + x)^n \geq 1 + nx)) \equiv$
$\exists x \in \mathbb{R}\exists n \in \mathbb{N}\neg(\neg(x > -1) \vee ((1 + x)^n \geq 1 + nx)) \equiv$
$\exists x \in \mathbb{R}\exists n \in \mathbb{N}((x > -1) \wedge \neg((1 + x)^n \geq 1 + nx)) \equiv$
$\exists x \in \mathbb{R}\exists n \in \mathbb{N}((x > -1) \wedge ((1 + x)^n < 1 + nx)) \equiv$

Задача 5: (15т.) Да се докаже по индукция, че всяко естествено число $n \geq 1$ има представяне от вида $n = d_1 1! + d_2 2! + ... + d_r r!$, където $d_i \in \{0, 1, ..., i\}$.

Решение: По метода на силната индукция ще докажем:
$\forall n \in \mathbb{N}^+(P(n))$, където $P(n)$ е следният предикат:
n има представяне от вида $\sum_{i=1}^{r} d_i i!, d_i \in \{0, 1, ..., i\}$

1. *База:* $1 = 1.1!$ Следователно $P(1)$ е в сила.

2. *Индукционно предположение:* Нека $k \geq 1$ и $P(i)$ е вярно за всяко $1 \leq i \leq k$

3. *Индукционна стъпка:* Ще докажем P(k+1)

   Да означим с r най-голямото цяло число, за което е изпълнено $r! \leq k+1 < (r+1)!$

   - Ако $k+1 = r!$, то $k+1$ има представяне от искания вид.

   - Ако $k+1 > r!$ да разгледаме $k' = k+1-r!$. Тъй като $1 \leq k' \leq k$, то за k' е в сила индукционното предположение, т.е. $k' = \sum_{i=1}^{s} d_i i!, d_i \in \{0,1,...,i\}$. Да разгледаме възможните случаи за стойностите на s и d_s.

   i) $s < r \Rightarrow k+1 = k' + r! = \sum_{i=1}^{s} d_i i! + r! = \sum_{i=1}^{r} d_i i!, d_i \in \{0,1,...,i\}$

   ii) $s = r \wedge d_s = d_r < r \Rightarrow d_r + 1 \leq r \Rightarrow k+1 = k' + r! = \sum_{i=1}^{r} d_i i!, d_i \in \{0,1,...,i\}$

   iii) $s = r \wedge d_s = d_r = r$. Но този случай е невъзможен, защото тогава

   $$k+1 = k' + r! \geq d_r r! + r! = r.r! + r! = (r+1)!$$

   което противоречи на първоначалното допускане за r.

   С това P(k+1) е доказано.

4. *Заключение:* Твърдението е вярно за всяко естествено число $n \geq 1$.

Задача 6: (20т.) Дадени са функциите $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

а) (4т.) Нека $f(x) = 2x+1$ и $g(x) = x^3 - x$. Определете всяка от следващите функции:
- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = f(x) + g(x)$
- $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, q(x) = g(f(x))$

Решение:
Функцията $p(x) = (2x+1) + (x^3 - x) = x^3 + x + 1$, а функцията $q(x) = g(2x+1) = (2x+1)^3 - (2x+1) = 8x^3 + 12x^2 + 4x$.

б) (6т.) Дайте пример на две функции $f(x)$ и $g(x)$, които са биекции, но функцията $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = f(x) + g(x)$ не е биекция

Решение:
Функциите $f(x) = x$ и $g(x) = -x$ са биекции, но функцията $p(x) = x - x = 0$ не е биекция.

в)(10т.) Докажете, че ако $f(x)$ и $g(x)$ са биекции, то функцията $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, q(x) = g(f(x))$ е биекция

Решение:
Функцията $q(x)$ е биекция, ако е инекция и сюрекция.
а) Функцията $q(x)$ е инекция, ако $\forall x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}, q(x_1) \neq q(x_2)$.
Доказателство: Нека $x_1 \neq x_2$. От това, че $f(x)$ е инекция следва, че $f(x_1) \neq f(x_2)$. От това, че $g(x)$ е инекция следва, че $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. От $q(x_1) = g(f(x_1))$ и $q(x_2) = g(f(x_2))$ следва, че $q(x_1) \neq q(x_2)$. Следователно, $q(x)$ е инекция.
б) Функцията $q(x)$ е сюрекция, ако $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}, q(x) = y$.
Доказателство: Нека $c \in \mathbb{R}$. От това, че $g(x)$ е сюрекция следва, че съществува $b \in \mathbb{R}$, такова че $g(b) = c$. От това, че $f(x)$ е сюрекция следва, че съществува $a \in \mathbb{R}$, такова че $f(a) = b$. От $q(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ следва, че съществува $a \in \mathbb{R}$, такова че $q(a) = c$. Следователно, $q(x)$ е сюрекция.
Следователно, $q(x)$ е биекция.