Контролно №1 по Дискретни Структури, спец. Компютърни науки, 24.11.2016г.
РЕШЕНИЯ

Име .... ф№.......... гр....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Макс.**
получени точки							
от максимално	21	20	9	12	15	20	85

Задача 1: (21т.) Всяко от целите числа от 1 до 100 е написано върху картонче (общо 100 картончета).

а) (2т.) По колко начина може да се наредят всичките картончета в редица?
Решение:
Броят е 100!.

б) (5т.) По колко начина избрани 20 картончета, от които 4 с четни числа и 16 с нечетни числа, може да се наредят в 4 реда по 5 картончета в ред, така че във всеки ред да има точно едно картонче с четно число?
Решение:
Във всеки ред една позиция за картонче с четно число може да се избере по 5 начина. За всяка избрана четворка от позиции картончетата с четни числа може да се наредят в тях по 4! начина и картончетата с нечетни числа може да се наредят в останалите 16 позиции по 16! начина. Следователно, броят на исканите разполагания на избраните картончета е $5^4 \cdot 4! \cdot 16!$.

в) (2т.) По колко начина от всичките картончета може да се изберат 38 картончета?
Решение:
Броят е $\binom{100}{38} = \dfrac{100!}{38! \cdot 62!}$.

г) (5т.) По колко начина от всичките картончета може да се изберат 4 картончета, такива че сумата на числата върху тях да е четно число?
Решение:
Нека U е множеството от комбинаторни конфигурации с исканото свойство. Всеки елемент на U е от един от следните три вида:
а) 4 картончета с четни числа
б) 2 картончета с четни числа и 2 картончета с нечетни числа
в) 4 картончета с нечетни числа
Тогава $U = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, където $A_1 \subseteq U$ - множеството от елементи от вида а), $A_2 \subseteq U$ - множеството от елементи от вида б), $A_3 \subseteq U$ - множеството от елементи от вида в). Следователно, $|U| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$. Броят на картончетата с четни числа е равен на този с нечетни числа. Следователно, $|U| = \binom{50}{4} + \binom{50}{2} \cdot \binom{50}{2} + \binom{50}{4} = 2 \cdot \dfrac{50!}{4! \cdot 46!} + \left(\dfrac{50!}{2! \cdot 48!}\right)^2$.

д) (7т.) По колко начина от всичките картончета могат да се изберат 17 картончета така, че измежду числата върху тях да няма съседни?

Решение:

Нека едно множество съдържа 17 числа от интервала $[1, 100]$, измежду които няма съседни. Да разгледаме характеристичния вектор на такова множество: той съдържа 17 единици, 83 нули и никои две единици не са съседни. Както вече е доказано, броят на тези вектори е C_{84}^{17} (Упражнение 4: Индукция, Функции, Комбинаторика, зад.20).

Следователно броят на начините да се направи изборът, описан в д) е:

$C_{84}^{17} = \binom{84}{17} = 255485622301674660$

Задача 2: (20т.) Релацията $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ е дефинирана по следния начин:
$(x, y) \in R \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}(x = qy)$

а) (9т.) Докажете, че R е релация на еквивалентност;

Решение: Трябва да докажем, че R е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

1. *Рефлексивност:* $\forall x \in \mathbb{R} : x = 1.x$ (1)

   $$1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \qquad (2)$$

   От (1) и (2) следва, че релацията е рефлексивна.

2. *Симетричност:* Нека $x, y \in \mathbb{R}$ и $(x, y) \in R \Rightarrow$

   $$\exists q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}(x = q.y) \Rightarrow$$
   $$1/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \wedge y = (1/q).x \Rightarrow$$
   $$(y, x) \in R$$

   Следователно релацията е симетрична.

3. *Транзитивност:* Нека $x, y, z \in \mathbb{R}$ и $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow$

   $$\exists q' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}(x = q'.y) \wedge \exists q'' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}(y = q''.z) \Rightarrow$$
   $$q = q'.q'' \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \wedge x = q.z \Rightarrow$$
   $$(x, z) \in R$$

   Следователно релацията е транзитивна.

От 1., 2. и 3. следва, че R е релация на еквивалентност.

б) (6т.) Опишете класа, който съдържа числото 17/9;

Решение:

1. Нека $x \in R_{[17/9]} \Rightarrow x = q.(17/9), q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

2. Нека $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow q = (9/17).x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x = q.(17/9) \Rightarrow x \in R_{[17/9]}$

От 1. и 2. следва, че класът, съдържащ числото 17/9 се състои от всички рационални числа, различни от нула.

в) (5т.) Покажете, че релацията $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, дефинирана като
$$(x, y) \in R \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q}(x = qy)$$
не е релация на еквивалентност.

Решение: В този случай релацията отново е рефлексивна и транзитивна, но е нарушено свойството симетрия.

Да разгледаме реалните числа $x = 0$ и $y = 1$.

$x = 0.1 \wedge 0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x, y) \in R$

$\forall q \in \mathbb{Q}(y \neq q.x) \Rightarrow (y, x) \notin R$

Следователно релацията не е симетрична, а от тук следва, че не е релация на еквивалентност.

Задача 3: (9т.) Проверете, кои от следващите три релации са функции. Ако са функции, определете от кой вид са (частични или тотални). Обосновете отговорите си.

а) (3т.) $R_1 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow |x| = |y|\}$

Решение:

Релацията R_1 не е функция, защото съществува $x \in \mathbb{R}$, например 7, за което има две числа $y_1 = 7 \in \mathbb{R}$ и $y_2 = -7 \in \mathbb{R}$, такива че двойките (x, y_1) и (x, y_2) принадлежат на R_1.

б) (3т.) $R_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in R_2 \Leftrightarrow |x| = y\}$

Решение:

Релацията R_2 е тотална функция, защото за всяко $x \in \mathbb{R}$ има точно едно $y = |x| \in \mathbb{R}$, такова че $(x, y) \in R_2$.

в) (3т.) $R_3 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in R_3 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} = y\}$

Решение:

Релацията R_3 е частична функция, защото за всяко $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ има точно едно $y = \dfrac{x}{x-1} \in \mathbb{R}$, такова че $(x, y) \in R_3$ и за $x = 1 \in \mathbb{R}$ не същесвува $y \in \mathbb{R}$, такова че $(x, y) \in R_3$.