Контролно по ЕАИ на тема автомати
зимен семестър 2015/2016г.

27.11.2015г.

Първа задача

Условие:

Да се намери минимален детерминиран автомат за регулярния израз $c^*(ab^* + ba^*)^*$.

Решение:

След прилагането на стандартните конструкции за построяване на автомат по регулярен израз се получава първоначалния недетерминиран автомат:

	a	b	c
$\rightarrow$ 0	1	2	0
1	1	1,2	-
2	1,2	2	-

След детерминиране, резултатът е:

	a	b	c
$\rightarrow \alpha$	β	γ	α
β	β	ξ	-
γ	ξ	γ	-
ξ	ξ	ξ	-

А накрая минималния автомат е:

	a	b	c
$\rightarrow Q_2$	Q_3	Q_3	Q_2
Q_3	Q_3	Q_3	-

Критерий за оценка:

За задачата се дават общо 4 точки. 2 точки струва построяването на първоначалния недетерминиран автомат. По 1 точка са операциите за детерминиране и минимизиране.

Втора задача

Условие:

Дадени са регулярните езици L_1 и L_2. Нека L е езикът, който се състои от инфиксите на L_1, които са или думи от L_2, или техните огледални думи са от L_2:

$$L = \{ \ \alpha \mid \ \text{има } \beta, \gamma \text{ такива, че } \beta\alpha\gamma \in L_1, \text{ и } \alpha \in L_2 \text{ или } \alpha^R \in L_2 \ \}.$$

Да се докаже, че L също е регулярен език.

Решение 1:

Първо ще отбележим, че е в сила равенството $L = inf(L_1) \cap (L_2^R \cup L_2)$, където $inf(L_1)$ е езика от инфиксите на L_1, а L_2^R е огледалния език на L_2. Т.к. L_2 е регулярен, то тогава и L_2^R също е регулярен. Остава да покажем, че и $inf(L_1)$ е регулярен и това ще гарантира, че L е такъв, т.к. той се получава от $inf(L_1)$, L_2^R и L_2 чрез операциите сечение и обединение.
Т.к. L_1 е регулярен, то тогава има автомат $A = \langle \Sigma, Q, q, F, \delta \rangle$, който го разпознава (т.е. $L_1 = L(A)$). Тогава нека разгледаме следния автомат $A^{\text{inf}} = \langle \Sigma, Q, I^{\text{inf}}, F^{\text{inf}}, \delta \rangle$, където $I^{\text{inf}} = F^{\text{inf}} = \{ \ q' \in Q \mid q' \text{ се намира на път от } q \text{ до } f \text{ за някое } f \in F \ \}$. Автоматът A^{inf} разпознава точно инфиксите на L_1, което показва, че $inf(L_1)$ е регулярен.

Решение 2:

Подобно на предното решение, изразяваме $L = inf(L_1) \cap (L_2^R \cup L_2)$. Само че, регулярността на $inf(L_1)$ показваме с равенството $inf(L_1) = pref(suf(L_1))$. А и $inf(L_1) = suf(pref(L_1))$ също върши работа.

Критерий за оценка:

За задачата се дават общо 3 точки. За правилно доказателство, че $inf(L_1)$ е регулярен, се дава 1 точка. За показване, че $L = inf(L_1) \cap (L_2^R \cup L_2)$ (или алтернативно доказателство), се дава още 1 точка, а за правилно цитиране на известни факти за запазване на регулярност при операции се дава останалата точка.

Трета задача

Условие:

Нека имаме езбуката $\Sigma = \{ \ a, b \ \}$ и нека $\alpha \in \Sigma^*$. Тогава с $N_a(\alpha)$ и $N_b(\alpha)$ ще означаваме съответно:

$$\begin{aligned} N_a(\alpha) &= \text{ броя на срещанията на буквата } a \text{ в } \alpha, \\ N_b(\alpha) &= \text{ броя на срещанията на буквата } b \text{ в } \alpha. \end{aligned}$$

Да се докаже, че следния език не е регулярен:

$$L = \{ \ \alpha \in \Sigma^* \mid |N_a(\alpha) - N_b(\alpha)| \leq 3 \ \}.$$

Решение 1:

Нека допуснем, че езика е регулярен. Ще покажем противоречие с допускането, посредством Лемата за разрастване.
Нека разгледаме думата $a^n b^{n+3}$, където n е числото за L от Лемата за разрастване. Имаме, че $a^n b^{n+3} \in L$. Тогава по Лемата за разрастване получаваме, че тази дума може да се представи във вида $a^n b^{n+3} =$

uvw, където $|uv| \leq n$ и $|v| > 0$. Следователно $u = a^*$, $v = a^+$ и $w = a^*b^{n+3}$. Т.е. v съдържа само символи a. От Лемата имаме, че при $i = 0$, $uv^iw = uw \in L$. Но за uw получаваме, че $N_b(uw) - N_a(uw) > 3$ (т.к. $uw = a^{n-|v|}b^{n+3}$ и така сме намалили броя на символите a), което е противоречие с дефиницията на L.

Решение 2:

Подобно на предното решение, показваме противоречие чрез Лемата за разрастване.
Противоречието се получава с дума $a^{n+3}b^n$ при $i = 2$: $uv^2w = uvvw = a^{n+3+|v|}b^n \notin L$.

Критерий за оценка:

За задачата се дават общо 3 точки. 1т. се дава за правилно подбрана дума и формулиране на условието на Лемата. Още една точка се дава за правилно определяне на вида на v и правилно подбрано i. Последната точка се дава за показване, че $uv^iw \notin L$.