Домашно № 2 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, I поток, зимен семестър на 2015/2016 уч. г. в СУ, ФМИ

Домашните работи се предават на съответния асистент по време на упражненията през седмицата 30. ноември – 02. декември 2015 г. (деветата седмица от семестъра).

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	*10*	*10*	*10*	*7*	*7*	*20*	*64*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

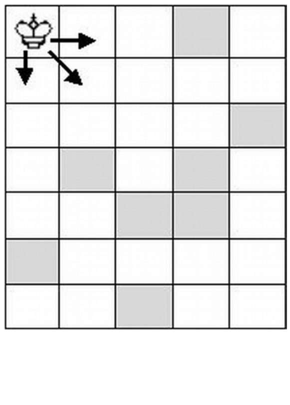
Задача 1. Десет приятели ежедневно играят следната игра. Всеки от тях съчинява загадка, написва я на листче и пуска листчето в урна. Щом десетте листчета бъдат пуснати в урната, всеки от приятелите тегли по едно листче и се опитва да реши загадката, която му се е паднала. В какъв процент от игрите се случва някой да изтегли загадката, която е съчинил?

Задача 2. За 9а клас се планират седем учебни часа в сряда. Възможни предмети:
— с висока трудност: математика, информатика и езици (български, английски и немски);
— със средна трудност: философия, физика, химия, биология, география;
— с ниска трудност: физическо възпитание, музика, изобразително изкуство.
Според изискванията за оптимална работоспособност предметите трябва да се подредят така: първия и седмия час — средна трудност; втория, третия и четвъртия час — висока трудност; петия час — висока или средна трудност; шестия час — ниска трудност. Седемте предмета трябва да са различни. Колко възможности има за учебното разписание на 9а клас в сряда?

Задача 3. Да се докаже комбинаторното тъждество: $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{m+n}{p}$.

Задача 4. Във физиката е установено, че светлината се състои от неделими порции енергия (т. нар. кванти). По колко начина 12 порции енергия могат да се разпределят между 5 осцилатора? Осцилаторите (атоми, молекули и т.н.) са различими, а квантите — не. (Тоест може да се пита кой осцилатор колко порции енергия притежава, но не и кои порции.)

Задача 5. По колко начина шахматният цар може да стигне от горния ляв до долния десен ъгъл, ако на всеки ход се премества с една клетка надолу, надясно или по диагонал надолу и надясно и няма право да стъпва в забранена клетка? (Забранените клетки са оцветени в сиво.)



Задача 6. По колко начина можем да направим гердан от едно оранжево, едно зелено, четири жълти, четири бели и две червени мъниста, ако оранжевото и зеленото мъниста не бива да бъдат едно до друго?

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Да номерираме играчите с числата от 1 до 10. Нека a_i е номерът на играча, дал загадката, изтеглена от i-ия играч. Тоест $a_i = j$ тогава и само тогава, когато i-ият играч е изтеглил загадката, дадена от j-ия играч. При тези обозначения твърдението, че i-ият играч е изтеглил собствената си загадка, се записва така: $a_i = i$.

Числата $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ са две по две различни, защото всяка загадка се пада само на един от играчите. С други думи, редицата $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ е пермутация на числата $1, 2, \ldots, 10$. Във всяка игра се осъществява една пермутация. (Възможно е в различни игри да се осъществи една и съща пермутация.)

Една пермутация се нарича *разбъркване* (англ. *derangement*), когато никой елемент не си е на мястото. За пермутациите от вида, който разглеждаме, това означава, че $a_i \neq i$ за всяко i, т.е. никой играч не е изтеглил собствената си загадка.

В задачата се търси процентът на пермутациите, които не са разбърквания, от всички пермутации на 10 елемента. За целта трябва първо да пресметнем броя на тези пермутации.

Една пермутация на числата $1, 2, \ldots, 10$ не е разбъркване тогава и само тогава, когато $a_i = i$ за някое i от 1 до 10 вкл. Нека A_i е множеството на пермутациите, за които $a_i = i$. Тогава $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{10}$ е тъкмо множеството на пермутациите, които не са разбърквания. Броят им се пресмята с помощта на принципа за включване и изключване:

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{10} \right| =$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq 10} \left| A_i \right| - \sum_{1 \leq i < j \leq 10} \left| A_i \cap A_j \right| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 10} \left| A_i \cap A_j \cap A_k \right| - \ldots +$$

$$+ \ldots - \ldots + \ldots - \left| A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10} \right| .$$

Пресмятаме поотделно всяко от събираемите в дясната страна.

Пермутациите от множеството A_i имат един фиксиран елемент — i-ия ($a_i = i$), т.е. при тях се разместват свободно само 9 елемента. Затова броят на тези пермутации е $\left| A_i \right| = P_9 = 9!$. Индексът i може да приема 10 възможни стойности, затова $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq 10} \left| A_i \right| = 10 \,.\, 9! = 10!$.

Пермутациите от множеството $A_i \cap A_j$ имат два фиксирани елемента — i-ия и j-ия, т.е. разместват се свободно само 8 елемента. Броят на тези пермутации е $\left| A_i \cap A_j \right| = P_8 = 8!$. Броят на ненаредените двойки от индекси $\left\{ i, j \right\}$ е равен на $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!\,8!}$, откъдето следва, че $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq 10} \left| A_i \cap A_j \right| = \frac{10!}{2!\,8!} \cdot 8! = \frac{10!}{2!}$.

Аналогично пресмятаме $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j < k \leq 10} \left| A_i \cap A_j \cap A_k \right| = C_{10}^3 \,.\, P_7 = \frac{10!}{3!\,7!} \cdot 7! = \frac{10!}{3!}$

и т.н. до $\left| A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10} \right| = 1$ (има единствена пермутация, чиито елементи всички са фиксирани; тя съответства на игра, в която всеки играч изтегля загадката, която е съчинил). Заместваме в принципа за включване и изключване:

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{10} \right| = 10! - \frac{10!}{2!} + \frac{10!}{3!} - \ldots + \ldots - 1 =$$

$$= 10! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \ldots - \frac{1}{10!} \right) .$$

Процентът на пермутациите, които не са разбърквания, се пресмята, като полученото число се раздели на $P_{10} = 10\,!$ (т.е. на броя на всички пермутации). Резултатът

$$1 - \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} - \frac{1}{4\,!} + \frac{1}{5\,!} - \frac{1}{6\,!} + \frac{1}{7\,!} - \frac{1}{8\,!} + \frac{1}{9\,!} - \frac{1}{10\,!}$$

е процентът на игрите, в които някой играч изтегля загадката, която е съчинил.

Този аритметичен израз може да се изчисли по различни начини.

Първи начин: Ако имаме компютър или калкулатор, можем да сметнем всяко събираемо и цялата сума с голяма точност: $1 - 0,5 + 0,1666667 - 0,0416667 + 0,0083333 - 0,0013889 + {}$ $+ \, 0,0001984 - 0,0000248 + 0,0000028 - 0,0000003 \;=\; 0,6321205 \;\approx\; 0,63 \;=\; 63\,\%$.

Втори начин: Ако искаме да изчислим търсения процент ръчно, можем да съобразим, че е достатъчна точност до стотни. Понеже $5\,! = 120$ и $6\,! = 720$, то петото събираемо е от порядъка на една стотна, а шестото е от порядъка на една хилядна. Следователно можем да пренебрегнем всички събираеми след петото; търсената стойност е приблизително равна на

$$1 - \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} - \frac{1}{4\,!} + \frac{1}{5\,!} \;=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \;\approx\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{25} + \frac{1}{100} \;=$$

$$=\; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{4}{100} + \frac{1}{100} \;\approx\; 1 - 0,5 + 0,17 - 0,04 + 0,01 \;=\; 0,64 \;=\; 64\,\%.$$

Трети начин: От математическия анализ са известни развитията в степенен ред на най-често срещаните елементарни функции:

$$e^{x} \;=\; 1 + x + \frac{x^{2}}{2\,!} + \frac{x^{3}}{3\,!} + \frac{x^{4}}{4\,!} + \frac{x^{5}}{5\,!} + \ldots + \frac{x^{n}}{n\,!} + \ldots \qquad \text{за} \quad \forall x \in (-\infty;\; +\infty);$$

$$\sin x \;=\; x - \frac{x^{3}}{3\,!} + \frac{x^{5}}{5\,!} - \frac{x^{7}}{7\,!} + \ldots + \frac{(-1)^{n}\, x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + \ldots \qquad \text{за} \quad \forall x \in (-\infty;\; +\infty);$$

$$\cos x \;=\; 1 - \frac{x^{2}}{2\,!} + \frac{x^{4}}{4\,!} - \frac{x^{6}}{6\,!} + \ldots + \frac{(-1)^{n}\, x^{2n}}{(2n)\,!} + \ldots \qquad \text{за} \quad \forall x \in (-\infty;\; +\infty);$$

$$\frac{1}{1+x} \;=\; 1 - x + x^{2} - x^{3} + x^{4} - \ldots + (-1)^{n}\, x^{n} + \ldots \qquad \text{за} \quad \forall x \in (-1;\; +1);$$

и т.н.

Тези формули са важни както за самата математика, така и за нейните приложения. Например при съставяне на компютърна програма математическите функции се смятат по тези формули, тъй като в микропроцесора са заложени четирите аритметични действия, но не и по-сложни функции (такива има в копроцесорите, но различните семейства често са несъвместими).

За нашите цели е подходяща първата формула. Заместваме $x = -1$ и получаваме:

$$e^{-1} \;=\; \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2\,!} - \frac{1}{3\,!} + \frac{1}{4\,!} - \frac{1}{5\,!} + \ldots + \frac{(-1)^{n}}{n\,!} + \ldots$$

Умножаваме по -1, след което прибавяме единица:

$$1 - e^{-1} \;=\; 1 - \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} - \frac{1}{4\,!} + \frac{1}{5\,!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n\,!} + \ldots$$

Събираемите отдясно са безброй много, но обикновено се взимат краен брой. За сметка на това равенството става приблизително:

$$1 - \frac{1}{e} \;\approx\; 1 - \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} - \frac{1}{4\,!} + \frac{1}{5\,!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n\,!} \qquad \text{за всички достатъчно големи } n.$$

Като се има предвид колко бързо расте факториелът, то $n = 10$ вече е достатъчно голямо, т.е.

$$1 - \frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} - \frac{1}{4\,!} + \frac{1}{5\,!} - \frac{1}{6\,!} + \frac{1}{7\,!} - \frac{1}{8\,!} + \frac{1}{9\,!} - \frac{1}{10\,!} \;\approx\; 1 - \frac{1}{e} \;\approx\; 0,63 \;=\; 63\,\%.$$

Отговор: В около $63\,\%$ от игрите се случва някой да изтегли загадката, която е съчинил.

Задача 2. За петия час разглеждаме два случая.

Първи случай: През петия час се преподава предмет с висока трудност. Следователно от петте предмета с висока трудност трябва да изберем четири (за втория, третия, четвъртия и петия час). Щом избираме четири предмета от пет, и то в определен ред, значи имаме работа с вариации; те са без повторение, защото в условието се иска да изберем различни предмети. Броят на тези вариации е $V_5^4 = \dfrac{5\,!}{(5-4)\,!} = \dfrac{5\,!}{1\,!} = 120$, т.е. има 120 начина да изберем в определен ред четири от пет предмета с висока трудност.

Аналогично избираме два от общо пет предмета със средна трудност в определен ред (за първия и седмия час). Можем да направим това по $V_5^2 = \dfrac{5\,!}{(5-2)\,!} = \dfrac{5\,!}{3\,!} = 20$ начина.

Избираме един от трите предмета с ниска трудност по $V_3^1 = \dfrac{3\,!}{(3-1)\,!} = \dfrac{3\,!}{2\,!} = 3$ начина.

Можем да комплектоваме всеки избор на трудни предмети с всеки избор на средно трудни и лесни предмети. Прилагаме правилото за умножение: $120\ .\ 20\ .\ 3 = 7200$ са възможните варианти на учебната програма в този случай.

Втори случай: През петия час се преподава предмет със средна трудност. Следователно от петте предмета с висока трудност избираме три (за втория, третия и четвъртия час). Това може да стане по $V_5^3 = \dfrac{5\,!}{(5-3)\,!} = \dfrac{5\,!}{2\,!} = 60$ начина.

Избираме три от общо пет предмета със средна трудност (за първия, петия и седмия час). Можем да направим това по $V_5^3 = 60$ начина.

Избираме един от трите предмета с ниска трудност по $V_3^1 = \dfrac{3\,!}{(3-1)\,!} = \dfrac{3\,!}{2\,!} = 3$ начина.

Като комплектоваме изборите на предмети от трите вида по правилото за умножение, получаваме $60\ .\ 60\ .\ 3 = 10800$ варианта за учебната програма в този случай.

Тъй като всяка възможност попада или в първия, или във втория случай, прилагаме правилото за събиране: $7200 + 10800 = 18000$ варианта общо.

Отговор: За учебното разписание на 9а клас в сряда има 18000 възможности.

Забележка: За цялата седмица и за всички класове в училището броят на възможностите нараства до астрономически размери. Това поражда нужда от бързи и достатъчно интелигентни алгоритми за създаване на разписания, което е по-малкият проблем. Непреодолима засега трудност е формализирането на изключително разнообразните изисквания към разписанието — работно време на един или друг учител, придвижване на учениците от една сграда до друга (ако има такова), изисквания на други училища (например часовете по трудово обучение) и т.н. Затова до ден днешен учебните разписания се създават от хората, не от компютрите.

Задача 4. Тъй като порциите енергия са неразличими, то от значение е само кой осцилатор колко енергия притежава. Затова нека x_i е броят порции на i-ия осцилатор, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Числата x_i са цели неотрицателни и $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$. Търсим броя на решенията на това уравнение в цели неотрицателни числа: $\widetilde{C}\,_5^{12} = \dfrac{(12+5-1)\,!}{12\,!\,(5-1)\,!} = \dfrac{16\,!}{12\,!\,4\,!} = 1820$.

Отговор: 12 порции енергия могат да се разпределят между 5 осцилатора по 1820 начина.

Задача 3. Това равенство (като много други) може да се докаже по няколко начина.

Първи начин: Към тъждеството

$$(1+x)^n\,(1+x)^m \;=\; (1+x)^{m+n}$$

прилагаме формулата за Нютоновия бином:

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right]\left[\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\right] \;=\; \sum_{p=0}^{m+n}\binom{m+n}{p}x^p.$$

След разкриване на скобите в лявата страна получаваме

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{i}x^{k+i} \;=\; \sum_{p=0}^{m+n}\binom{m+n}{p}x^p.$$

Това равенство е изпълнено за всяко x, следователно коефициентът пред x^p е един и същ в лявата и в дясната страна.

В дясната страна коефициентът пред x^p е равен на $\dbinom{m+n}{p}$.

В лявата страна коефициентът пред x^p се получава след приведение на подобните едночлени. Подобни са тези едночлени, които съдържат една и съща степен на x, а именно x^p. За целта трябва $k+i = p$, т.е. $k=0$ и $i=p$ или $k=1$ и $i=p-1$, или $k=2$ и $i=p-2$; и т.н. до $k=p$ и $i=0$. С други думи, на всяко k от 0 до p включително съответства стойността $i = p-k$. След събиране на коефициентите на подобните едночлени получаваме $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$ за коефициента пред x^p в лявата страна.

Понеже в двете страни стои един и същи коефициент пред x^p, то следва, че

$\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k} \;=\; \binom{m+n}{p}$, което трябваше да се докаже.

Втори начин: Нека в една детска компания има n момичета и m момчета. По колко начина можем да изберем p деца? Очевидно отговорът е C_{m+n}^{p}.

От друга страна, можем да изберем 0 момичета и p момчета по $C_n^0\,.\,C_m^p$ начина или 1 момиче и $p-1$ момчета по $C_n^1\,.\,C_m^{p-1}$ начина, или 2 момичета и $p-2$ момчета по $C_n^2\,.\,C_m^{p-2}$ начина; и т.н. до p момичета и 0 момчета по $C_n^p\,.\,C_m^0$ начина.

Събираме всички начини и получаваме:

$$C_n^0\,.\,C_m^p \;+\; C_n^1\,.\,C_m^{p-1} \;+\; C_n^2\,.\,C_m^{p-2} \;+\;\dots\;+\; C_n^p\,.\,C_m^0 \;=\; C_{m+n}^{p},$$

т.е. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} C_n^k\,.\,C_m^{p-k} \;=\; C_{m+n}^{p}$. Заменяме броя на комбинациите с биномни коефициенти и извеждаме желаното равенство: $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k} \;=\; \binom{m+n}{p}$.

Забележка: Има и други начини, например с математическа индукция по m или n. В индуктивната стъпка се използва формулата, по която се строи триъгълникът на Паскал.

Задача 5. Тази задача се решава чрез правилото за събиране. За целта във всяка клетка попълваме по едно цяло число — броя на пътищата от избраната клетка до долния десен ъгъл. Тези числа се пресмятат по следната схема:
— Забранените клетки попълваме с нули.
— Разрешените клетки попълваме една по една отдолу нагоре и отдясно наляво. В долния десен ъгъл поставяме единица, а във всяка друга разрешена клетка пишем сбора на числата от трите клетки — отдолу, отдясно и по диагонал.

44 ♔	12	4	0	0
27	5	3	1	0
21	1	1	1	0
20	0	0	0	1
12	8	0	0	1
0	4	4	3	1
0	0	0	1	1

В горния ляв ъгъл се получава числото $27 + 12 + 5 = 44$. То е отговорът на задачата.

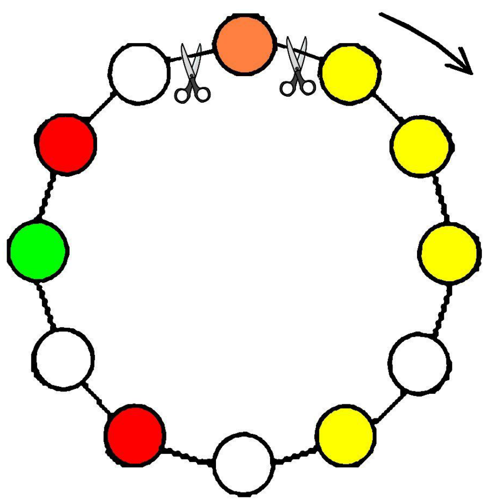
Отговор: От горния ляв до долния десен ъгъл царят може да стигне по 44 начина.

Забележка: Приложеният от нас метод се нарича *динамично програмиране*. Появата му предхожда изобретяването на компютъра, така че тук терминът "програмиране" отначало е бил използван в смисъла на "планиране" (всеки план е програма за действие). Понастоящем названието на метода не е променено, тъй като той намира все по-голямо приложение при създаването на компютърни програми. Някои от най-бързите алгоритми са получени именно чрез средствата на динамичното програмиране. Същият метод с успех се използва и при решаване на оптимизационни задачи (тогава той се нарича *динамично оптимиране*). Названието "динамично" напомня, че методът може да се използва за оптимално управление на многостадийни процеси. Например в конкретната задача движението на царя е процес, съставен от отделни ходове, т.е. всеки ход е един етап. Задачата се решава отзад напред — от последния към първия етап.

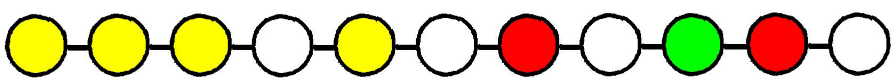
Задача 6. Задачата се решава на няколко стъпки, на всяка от които се прилага определен трик.

Първият проблем е, че герданът е кръг, а не редица. Всяко подреждане в редица е пермутация (с повторение, понеже между мънистата има еднакви), а за броя на пермутациите имаме формула, но за броя на подредбите в кръг няма просто правило.

Затова да срежем гердана (кръга) на определено място, например да махнем оранжевото мънисто. Останалите 11 мъниста, взети, да кажем, по посока на часовниковата стрелка, образуват редица (т.е. пермутация) на 11 елемента. Например от този гердан (кръг)



след срязване се получава следната верижка (редица):



Редиците са пермутации с повторение на 11 елемента и броят им се пресмята по формулата

$$\widetilde{P}_{11}^{\,1;2;4;4} = \frac{11!}{1!2!4!4!} = \frac{\cancel{1}\,.\,\cancel{2}\,.\,\cancel{3}\,.\,\cancel{4}\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9\,.\,10\,.\,11}{1\,.\,(1\,.\,2)\,.\,(\cancel{1}\,.\,\cancel{2}\,.\,\cancel{3}\,.\,\cancel{4})\,.\,(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4)} =$$

$$= \frac{5\,.\,\cancel{6}\,.\,7\,.\,\cancel{8}\,.\,9\,.\,10\,.\,11}{\cancel{2}\,.\,\cancel{2}\,.\,\cancel{3}\,.\,\cancel{4}} = 5\,.\,7\,.\,9\,.\,10\,.\,11 = 34650.$$

Второ, трябва да вземем предвид, че в кръга оранжевото и зеленото мънисто не бива да бъдат едно до друго. За редиците, получени след срязването на кръга, забраната звучи така: зеленото мънисто не бива да бъде нито в началото, нито в края на редицата.

Да преброим забранените редици. Ако зеленото мънисто стои на първо място, то останалите 10 мъниста могат да се разместват свободно, т.е. тези редици са пермутации с повторение на 10 елемента и броят им е равен на

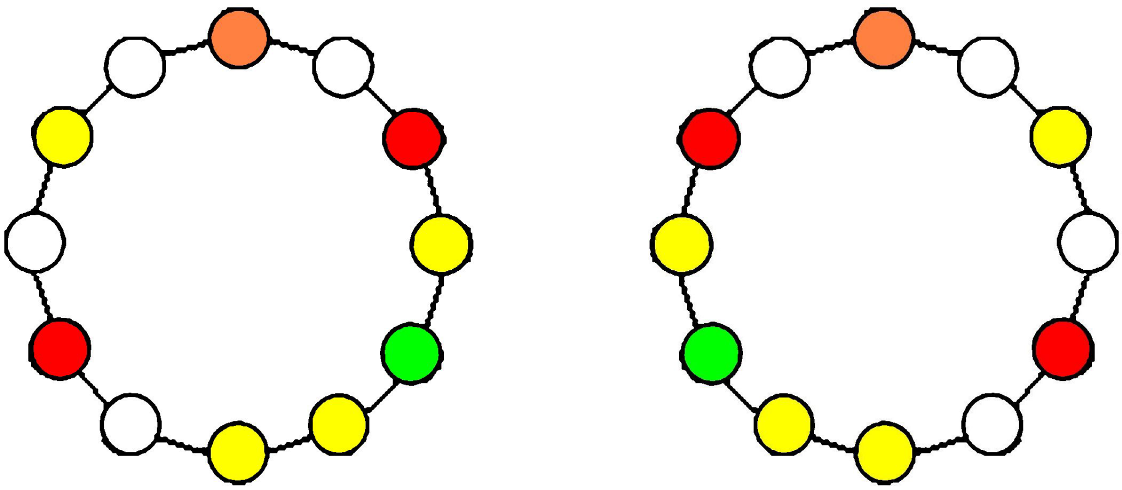
$$\widetilde{P}_{10}^{\,2;4;4} = \frac{10!}{2!4!4!} = \frac{\cancel{1}\,.\,\cancel{2}\,.\,\cancel{3}\,.\,\cancel{4}\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9\,.\,10}{(1\,.\,2)\,.\,(\cancel{1}\,.\,\cancel{2}\,.\,\cancel{3}\,.\,\cancel{4})\,.\,(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4)} =$$

$$= \frac{5\,.\,\cancel{6}\,.\,7\,.\,\cancel{8}\,.\,9\,.\,10}{\cancel{2}\,.\,\cancel{2}\,.\,\cancel{3}\,.\,\cancel{4}} = 5\,.\,7\,.\,9\,.\,10 = 3150.$$

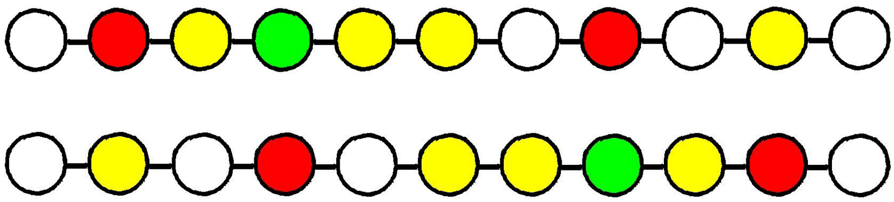
Още 3150 забранени редици се получават, когато зеленото мънисто е на последно място. Така забранените редици стават общо $3150 + 3150 = 6300$.

Остават $34650 - 6300 = 28350$ възможни редици.

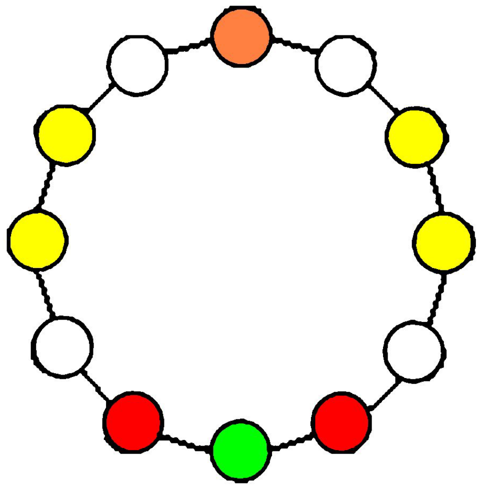
Трето, герданчето може да се завърта в пространството около кой да е свой диаметър, в това число диаметъра през оранжевото мънисто. Например тези две картинки показват едно и също герданче, гледано от различни страни (отпред и отзад):



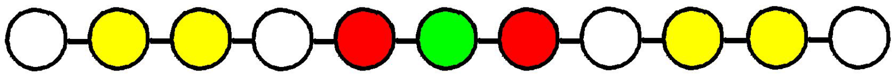
На тези две гледни точки съответстват (след срязване на герданчето) две редици, които са огледален образ една на друга:



Обаче би било грешка, ако просто разделим на две броя на редиците: не от всяко герданче се получават две редици. Ако герданчето е симетрично относно някой свой диаметър (такъв може да е само диаметърът през оранжевото и зеленото мънисто; за целта те трябва да бъдат едно срещу друго), то двата образа на герданчето (отпред и отзад) съвпадат, а съответната редица е симетрична (т.е. тя е огледален образ сама на себе си). Например от този гердан



след срязване се получава само една редица:



Симетричните редици можем да преброим така: зеленото мънисто трябва да бъде по средата, лявата половина трябва да съдържа едно червено, две жълти и две бели мъниста, а дясната половина трябва да е огледален образ на лявата. Следователно всяка симетрична редица се определя напълно от своята лява половинка, която на свой ред е пермутация с повторения на пет елемента. Броят на тези пермутации е равен на

$$\widetilde{P}_5^{\,1;2;2} = \frac{5!}{1!2!2!} = \frac{\cancel{1}\,.\,\cancel{2}\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{1\,.\,(1\,.\,2)\,.\,(\cancel{1}\,.\,\cancel{2})} = \frac{3\,.\,4\,.\,5}{2} = 30.$$

И така, 30 редици от мъниста са симетрични. От всяка симетрична редица се получава едно герданче (също симетрично). Това прави всичко 30 симетрични герданчета.

Останалите $28350 - 30 = 28320$ редици от мъниста са несиметрични. Те се групират по две: всяка редица — със своя огледален образ. От всяка двойка редици се получава по едно герданче; всичко $28320 : 2 = 14160$ несиметрични герданчета.

Всички герданчета (симетрични и несиметрични) са общо $14160 + 30 = 14190$.

Отговор: От дадените 12 мъниста можем да направим гердан по 14190 различни начина.