Дървета за търсене

Трифон Трифонов

Структури от данни и програмиране,
спец. Компютърни науки, 2 поток, 2015/16 г.

11 декември 2015 г.

Дървета за търсене

- Организация, която позволява бързо намиране на елементи в дървото
- Разчита на **линейна наредба** на елементите
- Основни операции:
  - `create()` — създаване на празно дърво за търсене
  - `insert(x)` — включване на елемент
  - `remove(x)` — изключване на елемент
  - `search(x)` — търсене на елемент
- Обикновено елементите са двойки (ключ,стойност)
- Елементите са наредени относно ключовете си
- Стойностите носят данните на елемента

Двоично дърво за търсене

Дефиниция (Двоично дърво за търсене)

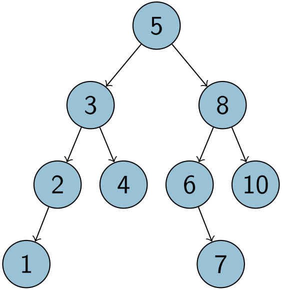
- Празното дърво $\perp$ е ДДТ
- (X, L, R) е ДДТ, ако
  - X е по-голямо от от всички елементи в L
  - X е по-малко от от всички елементи в R
  - L и R също са ДДТ

Двоично дърво за търсене

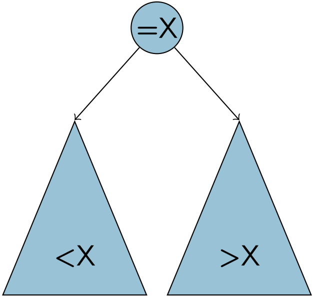
Дефиниция (Двоично дърво за търсене)

- Празното дърво $\perp$ е ДДТ
- (X, L, R) е ДДТ, ако
  - X е по-голямо от от всички елементи в L
  - X е по-малко от от всички елементи в R
  - L и R също са ДДТ

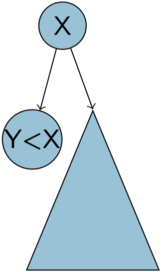
Пример:



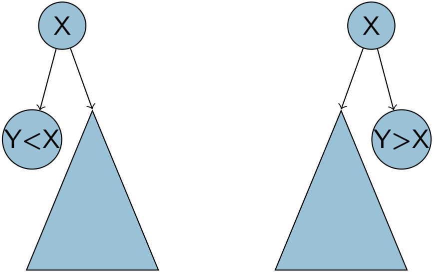
Търсене на елемент



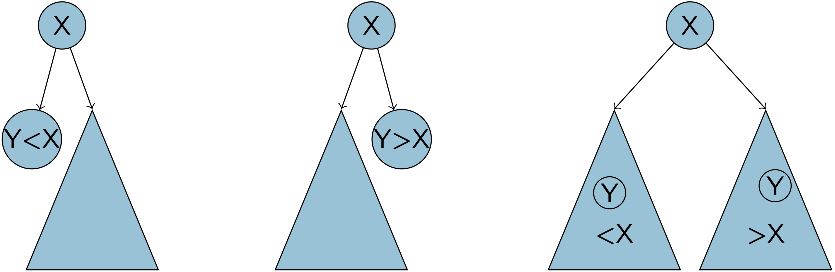
Включване на елемент



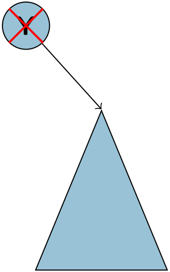
Включване на елемент



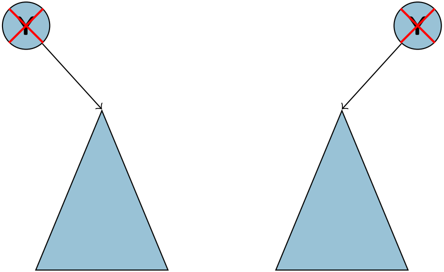
Включване на елемент



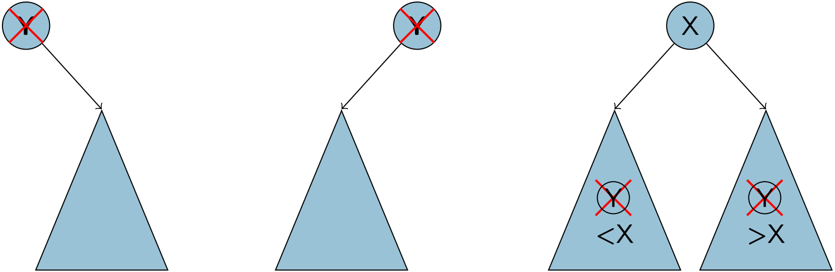
Изключване на елемент



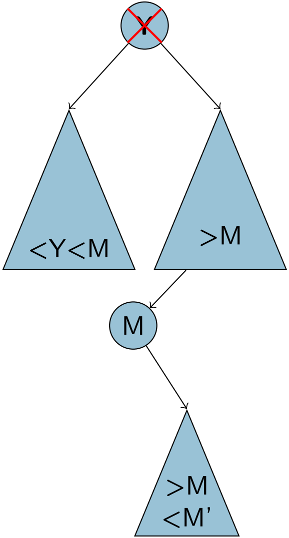
Изключване на елемент



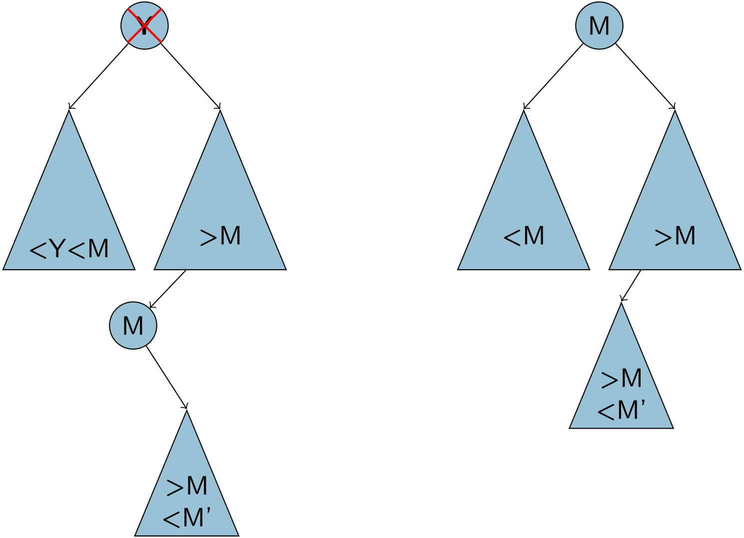
Изключване на елемент



Изключване на елемент — общ случай



Изключване на елемент — общ случай



Оптимална височина на дърво

Сложността на всички операции за двоично дърво до търсене е $O(h)$, където h е височината на дървото.

Знаем, че $\log_2(n+1) \leq h \leq n$.

- $h = n \leftrightarrow$ дървото е изродено до списък
- $h = \log_2(n+1)$, когато дървото е пълно
- само тогава ли?

Балансирано дърво

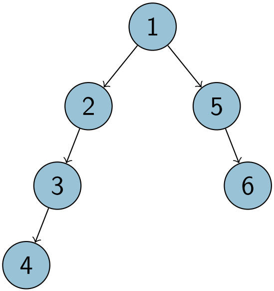
Дефиниция (Балансирано дърво)

- Празното дърво $\perp$ е балансирано
- (X, L, R) е балансирано, ако
  - $|h(L) - h(R)| \leq 1$
  - L и R също са балансирани

Балансирано дърво

Дефиниция (Балансирано дърво)

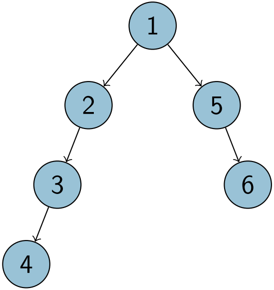
- Празното дърво $\perp$ е балансирано
- (X, L, R) е балансирано, ако
  - $|h(L) - h(R)| \leq 1$
  - L и R също са балансирани

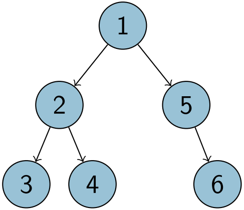


Балансирано дърво

Дефиниция (Балансирано дърво)

- Празното дърво $\perp$ е балансирано
- (X, L, R) е балансирано, ако
  - $|h(L) - h(R)| \leq 1$
  - L и R също са балансирани





Оптимална височина на балансирано дърво

Теорема

За балансирани дървета височината е възможно най-малка

Оптимална височина на балансирано дърво

Теорема

За балансирани дървета височината е възможно най-малка, т.е.
$h = \lceil log_2(n+1) \rceil$.

Оптимална височина на балансирано дърво

Теорема

За балансирани дървета височината е възможно най-малка, т.е. $h = \lceil log_2(n+1) \rceil$.

Обратното вярно ли е?

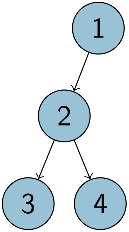
Оптимална височина на балансирано дърво

Теорема

За балансирани дървета височината е възможно най-малка, т.е. $h = \lceil log_2(n+1) \rceil$.

Обратното вярно ли е?

Не!



Идеално балансирано дърво

Дефиниция (Идеално балансирано дърво)

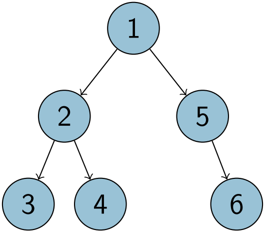
- Празното дърво $\perp$ е идеално балансирано
- (X, L, R) е идеално балансирано, ако
  - $|s(L) - s(R)| \leq 1$, където $s(T)$ означава броя на възлите в T
  - L и R също са идеално балансирани

Идеално балансирано дърво

Дефиниция (Идеално балансирано дърво)

- Празното дърво $\perp$ е идеално балансирано
- (X, L, R) е идеално балансирано, ако
  - $|s(L) - s(R)| \leq 1$, където $s(T)$ означава броя на възлите в T
  - L и R също са идеално балансирани

Пример:



Балансирани и идеално балансирани дървета

Каква е връзката между балансирани и идеално балансирани дървета?

Балансирани и идеално балансирани дървета

Каква е връзката между балансирани и идеално балансирани дървета?

Теорема

Всяко идеално балансирано дърво е балансирано.

Балансирани и идеално балансирани дървета

Каква е връзката между балансирани и идеално балансирани дървета?

Теорема

Всяко идеално балансирано дърво е балансирано.

Доказателство.

Индукция по височината на дървото. □

Балансирани и идеално балансирани дървета

Каква е връзката между балансирани и идеално балансирани дървета?

Теорема

Всяко идеално балансирано дърво е балансирано.

Доказателство.

Индукция по височината на дървото. $\square$

Обратното вярно ли е?

Балансирани и идеално балансирани дървета

Каква е връзката между балансирани и идеално балансирани дървета?

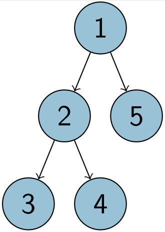
Теорема

Всяко идеално балансирано дърво е балансирано.

Доказателство.

Индукция по височината на дървото. □

Обратното вярно ли е? Не:



Построяване на идеално балансирано дърво

По даден сортиран списък можем да построим идеално балансирано двоично дърво за търсене.

Строим рекурсивно:

- Избираме за корен X "средния" елемент на списъка
- Лявото поддърво строим от подсписъка вляво от "средния" елемент
- Дясното поддърво строим от подсписъка вдясно от "средния" елемент
- Двата подсписъка имат приблизително равни дължини
- Рекурсията ни гарантира идеална балансираност

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12