Домашно №3 по Дискретни Структури, спец. Компютърни науки, зимен семестър 2015/2016г.

ТЕМА: КОМБИНАТОРИКА
РЕШЕНИЯ

Задача	1	2	3	4	5	Макс.
получени точки						
от максимално	15	15	15	15	15	70

Задача 1: (15т.) Дадена е група от n човека. Определете минималната стойност на n, за която поне 4 човека са родени в един и същи месец от годината и в един и същи ден от седмицата. Обосновете отговора си.

Решение:

Нека M = *{Януари, Февруари, Март, Април, Май, Юни, Юли, Август, Септември, Октомври, Ноември, Декември}* е множеството от месеци, а D = *{Понеделник, Вторник, Сряда, Четвъртък, Петък, Събота, Неделя}* е множеството от дни.

Нека A е множеството от хора, $B = \{(month, day) | month \in M \wedge day \in D\}$ и $f : A \to B, f(x) = (m, d)$, където m е месецът, а d е денят от седмицата от рождената дата на x. По условие $|A| = n$, а $|B| = |M \times D| = |M| \times |D| = 84$. Съгласно обобщения принцип на Дирихла, поне 4 човека са родени в един и същи месец от годината и в един и същи ден от седмицата, ако $|A| > 3 \cdot |B|$, т.е. $n > 3 \cdot 84 = 252$. Следователно, търсената стойност за n е 253.

Задача 2: (15т.) Докажете, че съществуват две различни естествени числа m и n, такива че числото $37^m - 37^n$ се дели на 10. Обосновете отговора си.

Решение:

Числото $37^m - 37^n$ се дели на 10, ако цифрата на единиците в неговия запис е 0 (завършва на 0). Следователно, ако числата 37^m и 37^n завършват на една и съща цифра, то числото $37^m - 37^n$ се дели на 10.

И така, решението на задачата се свежда до доказателство, че съществуват две различни естествени числа m и n, такива че числата 37^m и 37^n завършват на една и съща цифра.

Нека $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ е множеството от десетични цифри, $P = \{37^x | x \in \mathbb{N}\}$. Ще докажем, че за всяко множество $S \subset P, |S| = 11$, съществуват две различни числа от S с еднакви последни цифри.

Нека $A \subset P, |A| = 11$ и $f : A \to D, f(x)$ е последната цифра на x. От $|A| > |D|$, съгласно принципа на Дирихле следва, че има поне две числа $37^m \neq 37^n$ от множеството A , такива че $f(37^m) = f(37^n)$, или числата 37^m и 37^n завършват на една и съща цифра.

Следователно, съществуват $m \neq n \in \mathbb{N}$, такива че числото $37^m - 37^n$ се дели на 10.

Задача 3: (15т.) Намерете броя на пермутациите на числата от 1 до 20, които имат следното свойство: ако числото k се намира на позиция i в пермутацията, то едно от числата $k-1$ и $k+1$ се среща в някоя от позициите $1, 2, ..., i-1$.

Решение:

Да разгледаме построяването на една такава пермутация. Числото, което заема първа позиция, може да бъде избрано произволно. Да означим това число с p. Числото във втора позиция може да е $p-1$ или $p+1$. Изобщо, за да се осигури изпълнението на изискването от условието, изборът на следващото число трябва да става по следното правило: ако са избрани първите r елемента на пермутацията, то следващият елемент трябва да бъде с 1 по-малък от най-малкото включено число или с 1 по-голям от най-голямото включено вече число. Това означава, че при избор на числото p за първа позиция, построяването на пермутацията ще стане като $p-1$ пъти добавим число, с 1 по-малко от най-малкото и $20-p$ пъти добавим число с 1 по-голямо от най-голямото. Това може да се моделира с двоичен вектор, който съдържа $p-1$ нули и $20-p$ единици. Броят на тези вектори е $\binom{19}{p-1}$. Тъй като всяко от двадесетте числа може да бъде избрано за първи елемент, то общият брой на търсените пермутации е:

$$\sum_{i=1}^{20} \binom{19}{i-1} = \sum_{i=0}^{19} \binom{19}{i} = 2^{19} = \underline{524288}$$

Задача 4: (15т.) Нека $f(x)$ е функция със следното свойство $f(f(x)) = x$. Намерете броя на всички такива функции с домейн и кодомейн множеството J_n.

Решение:

Нека $f : J_n \to J_n$ е функция, със свойството $(*) f(f(x)) = x$.

Нека $x_1, x_2 \in J_n$. Ако $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow$$
$$x_1 = x_2$$

Следователно функцията е инекция, а тъй като домейнът и кодомейнът съвпадат, следва че тя е биекция.

За функционалните стойности има две възможности, които гарантират изпълнението на условието (*):

1. $f(x) = x$ Тогава $f(f(x)) = f(x) = x$

2. $f(x_1) = x_2 \to f(x_2) = x_1$ Тогава $f(f(x_1)) = f(x_2) = x_1$

Сега можем да преброим функциите със свойството (*). Да означим с $2k$ броят на елементите на J_n, за които $f(x) \neq x$. Както видяхме вече, той е винаги четен. Образа на първия от тези елементи можем да изберем по $2k - 1$ начина, на втория по $2k - 3$ начина и т.н. За образа на k-тия елемент има единствена възможност. И така, при фиксирани $2k$ елемента на J_n, за които $f(x) \neq x$, броят на търсените функции е

$(2k - 1)(2k - 3)...3.1 = (2k - 1)!!$

Сега остава да изберем тези $2k$ елемента по всички възможни начини и да оставим k да приема всички възможни стойности от 0 до $\lfloor n/2 \rfloor$ и получаваме $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}(2k - 1)!!$

Задача 5: (15т.) В час по Дискретни структури лекторът на втори поток прави кратко контролно, което се състои в решаване на една задача. След преглеждане на работите се оказва, че има 37 верни решения, като във всяка от четирите групи на потока има верно решение и никоя от групите не притежава повече от една трета от верните решения.

Колко са възможните разпределения на верните решения по групи така, че да са изпълнени горните условия.

Решение:

Тази задача може да се формулира по следния начин, по подобие на решавана на лекции задача:

Колко са решенията в естествени числа на уравнението

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 37$ (1)

$1 \leq x_i \leq 12, i \in I_4$

Задачата ще решим с прилагане на принципа за включване и изключване.

Множеството от всички решения на уравнението (1), без да отчитаме ограниченията за променливите, е точно множеството от комбинациите с повторение от 4 елемента, клас 37. За да отчетем ограничението $1 \leq x_i, i \in I_4$ можем да дадем по една "служебна"единица на всяка от четирите променливи, при което ще достигнем до еквивалентната задача:

$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 33$ (2)

$0 \leq x'_i \leq 11, i \in I_4$

Решенията на ураненеието (2) в естествени числа, без да се отчита ограничението за стойността на променливите, са всички комбинации с повторение от 4 елемента, клас 33. Ако означим с X множеството на тези решения, то техният брой е $|X| = S_4^{33} = C_{36}^{33}$

Сега остава да приложим принципа за включване и изключване, така че да се съобразим с допустимия максимум на променливите.

Да означим с X_i множеството от решения на (2), които не изпълняват условието $x'_i \leq 11$, т.е. изпълняват условията:

$12 \leq x'_i$

$0 \leq x'_j, j \neq i$

Така броят на решенията, който търсим, ще получим по формулата:

$$|\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3} \cap \overline{X_4}| = |X| - \sum_{i=1}^{4} |X_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |X_i \cap X_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |X_i \cap X_j \cap X_k| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4| \quad (3)$$

За да получим броя на елементите на X_i ще използваме следното представяне: $x'_i = x''_i + 12$. Тогава броят на елементите на X_i е равен на броя на решенията в естествени числа на уравнението:

$$x''_i + \sum_{j \neq i} x_j = 21$$

а това е точно броят на комбинациите с повторение от 4 елемента, клас 21, т.е. $S_4^{21} = C_{24}^{21} = C_{24}^{3}$.

Аналогично, броят на елементите на множеството $X_i \cap X_j$ е равен на броя на решенията на уравнението:

$$x''_i + x''_j + \sum_{k \neq i,j} x_k = 9$$

$$|X_i \cap X_j| = S_4^9 = C_{12}^9 = C_{12}^3$$

Останалите членове в сумата (3) са нули, тъй като повече от две променливи не могат да имат стойност по-голяма от 11.

$$\begin{aligned} |\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap \overline{X_3} \cap \overline{X_4}| &= S_4^{33} - 4S_4^{21} + 6S_4^9 \\ &= C_{36}^3 - 4C_{24}^3 + 6C_{12}^3 \\ &= \binom{36}{3} - 4\binom{24}{3} + 6\binom{12}{3} \\ &= 7140 - 4.2024 + 6.220 = \underline{364} \end{aligned}$$