Домашно №4 по Дискретни Структури, спец. Компютърни науки, зимен семестър 2015/2016г.

---

# ТЕМА: РЕКУРЕНТНИ ОТНОШЕНИЯ. ГРАФИ. ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

---

| **Задача** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **Макс.** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *получени точки* | | | | | | |
| *от максимално* | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 65 |

**Задача 1:** (15т.) Намерете рекурентно отношение и начални условия за броя на думите с дължина $n$ над азбуката $A = \{a, b, c\}$ за произволно $n \in \mathbb{N}$, всяка от които съдържа нечетен брой букви $a$. Решете полученото рекурентно отношение. Определете броя на тези думи с дължина $n = 10$.

**Задача 2:** (15т.) Докажете, че ако $G(V, E), |V| \geq 3$ е Хамилтонов граф, то той няма *срязващ връх*. Срязващ връх е всеки връх, такъв че при отстраняването на него и отстраняването на ребрата, инцидентни с него, броят на свързаните компоненти се увеличава.

**Задача 3:** (15т.) Дадени са формулите

$\mathfrak{A} = (x \vee \overline{y}) \downarrow (\overline{x} \rightarrow (y \rightarrow z)) \vee xz$

$\mathfrak{B} = (y \rightarrow (x \vee z)) \oplus xz \oplus 1$

а) Докажете, че формулите са еквивалентни;

б) Намерете стълба на функцията, представена с горните формули;

в) Определете съвършената дизюнктивна нормална форма на функцията;

г) Представете функцията с полином на Жегалкин.

**Задача 4:** (15т.) Булевата функция $f(\widetilde{x}^n)$ се нарича симетрична точно тогава, когато $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$ за всяка пермутация на променливите. Намерете броя на симетричните булеви функции на $n$ променливи.

**Задача 5:** (15т.) Операцията *декартово произведение на графи* се дефинира по следния начин. Нека $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ са произволни графи. Декартовото произведение $G_1 \times G_2$ е графът $G = (V, E)$, където $V = V_1 \times V_2$, а всеки два върха $(u_1, u_2)$ и $(v_1, v_2)$ на $G$ са съседни тогава и само тогава, когато $((u_1 = v_1)$ и $(u_2, v_2) \in E_2)$ или $((u_2 = v_2)$ и $(u_1, v_1) \in E_1)$.

Докажете по индукция, че $n$-мерният хиперкуб $Q_n$ има диаметър $n$. За целта използвайте следната рекурсивна дефиниция на $n$-мерен хиперкуб:

1. $Q_1 = K_2$
2. $Q_{n+1} = K_2 \times Q_n$

*Пример:* На следващата рисунка са показани графите:

$$\begin{aligned}
&Q_1 = K_2 = (\{0,1\}, \{(0,1)\}) \\
&Q_2 = K_2 \times Q_1 \\
&Q_3 = K_2 \times Q_2 \\
&Q_4 = K_2 \times Q_3
\end{aligned}$$