Домашно №4 по Дискретни Структури, спец. Компютърни науки, зимен семестър 2015/2016г.

---

# ТЕМА: РЕКУРЕНТНИ ОТНОШЕНИЯ. ГРАФИ. ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ

---

| **Задача** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **Макс.** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *получени точки* | | | | | | |
| *от максимално* | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 | 65 |

**Задача 1:** (15т.) Намерете рекурентно отношение и начални условия за броя на думите с дължина $n$ над азбуката $A = \{a, b, c\}$ за произволно $n \in \mathbb{N}$, всяка от които съдържа нечетен брой букви $a$. Решете полученото рекурентно отношение. Определете броя на тези думи с дължина $n = 10$.

Решение:

Нека $n \in \mathbb{N}$, $W_n$ е множеството от думи над азбуката $A$ с дължина $n$, $S_n \subseteq W_n$ - множеството от думи, всяка от които съдържа нечетен брой букви $a$, $|S_n| = a_n$ и $\varepsilon$ е празната дума. Тогава:

$a_0 = 0$, защото $W_0 = \{\varepsilon\}$, от което следва, че $S_0 = \emptyset$

$a_1 = 1$, защото $W_1 = \{a, b, c\}$, от което следва, че $S_1 = \{a\}$

$a_2 = 4$, защото $W_2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$, от което следва, че $S_2 = \{ab, ac, ba, ca\}$

Нека $n \geq 2$. Всяка дума $\delta$ от $S_n$ е от един от следните три вида:

а) $\delta = \omega b, \omega \in S_{n-1}$

б) $\delta = \omega c, \omega \in S_{n-1}$

в) $\delta = \omega a, \omega \in W_{n-1}$ и съдържа четен брой букви $a$

Следователно, $S_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, където $A_1 \subseteq S_n$ - множеството от думи от вида а), $A_2 \subseteq S_n$ - множеството от думи от вида б), $A_3 \subseteq S_n$ - множеството от думи от вида в), като множествата са непресичащи се и съгласно принципа на събирането $|S_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$, където:

$|A_1| = |S_{n-1}|$, защото на всяка дума $\delta \in A_1$ еднозначно съответства дума $\omega \in S_{n-1}$,

$|A_2| = |S_{n-1}|$, защото на всяка дума $\delta \in A_2$ еднозначно съответства дума $\omega \in S_{n-1}$,

$|A_3| = |W_{n-1}| - |S_{n-1}|$, съгласно принципа на изваждането.

И така, получихме следното линейно нехомогенно рекурентно отношение: $a_n - a_{n-1} = 3^{n-1}$.

Решаване на рекурентното отношение:

1. Определяне на общото решение на съответното линейно хомогенно рекурентно отношение $a_n - a_{n-1} = 0$:

1.1. Определяне на корените на характеристичното уравнение и съответните им кратности: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ с кратност 1

1.2. Представяне на общото решение: $a_n^c = A \cdot 1^n$

2. Определяне на частно решение на линейното нехомогенно рекурентно отношение: $a_n^p = B \cdot 3^n$

3. Събиране на решенията от т.1 и т.2 и получаване на решението в общ вид: $a_n = A + B \cdot 3^n$

4. Използване на началните условия за определяне на константите от т.3

$A + B = 0$

$A + 3B = 1 \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow B = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A = -\dfrac{1}{2}$

Следователно, $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Съгласно формулата, броят на думите с дължина $n = 10$, всяка от които съдържа нечетен брой букви $a$, е $a_{10} = \dfrac{3^{10} - 1}{2} = 29524$.

Същият брой се получава, използвайки полученото рекурентно отношение, както се вижда от следващата таблица.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^{n-1}$ | | 1 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 | 6561 | 19683 |
| $a_n$ | 0 | 1 | 4 | 13 | 40 | 121 | 364 | 1093 | 3280 | 9841 | 29524 |

**Задача 2:** (15т.) Докажете, че ако $G(V, E), |V| \geq 3$ е Хамилтонов граф, то той няма *срязващ връх*. Срязващ връх е всеки връх, такъв че при отстраняването на него и отстраняването на ребрата, инцидентни с него, броят на свързаните компоненти се увеличава.

Решение:

Допускаме противното, че $G$ има срязващ връх $v_1 \in V$. Нека $G'(V', E')$, където $V' = V \setminus \{v_1\}$ и $E' \subset E$, е графът, получен от $G$ чрез отстраняването на $v_1$ и ребрата, инцидентни с него. Графът $G'$ има $k \geq 2$ свързани компоненти $G_1(V_1, E_1), ..., G_k(V_k, E_k)$. Нека $v_1, v_2, v_3, ..., v_n, v_1$ е Хамилтонов цикъл на графа $G$ и $v_2 \in V_1$. От $v_2 \neq v_1$ и $v_3 \neq v_1$ следва, че $(v_2, v_3) \in E$, а от последното следва, че $v_3 \in V_1$. Аналогично получаваме, че $v_4 \in V_1, ..., v_n \in V_1$. Следователно, $G'$ има една свързана компонента - противоречие.

Следователно, Хамилтоновият граф $G$ няма срязващ връх.

**Задача 3:** (15т.) Дадени са формулите

$\mathfrak{A} = (x \vee \overline{y}) \downarrow (\overline{x} \rightarrow (y \rightarrow z)) \vee xz$

$\mathfrak{B} = (y \rightarrow (x \vee z)) \oplus xz \oplus 1$

а) Докажете, че формулите са еквивалентни

Решение:

За всяка от формулите ще намерим стълба на функцията, представена със съответната формула.

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \vee \overline{y}$ | $\overline{x} \to (y \to z)$ | $xz$ | $\mathfrak{A}$ | $y \to (x \vee z)$ | $xz \oplus 1$ | $\mathfrak{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Очевидно формулите $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ представят една и съща функция, следователно са еквивалентни.

б) Намерете стълба на функцията, представена с горните формули

Решение:

$f(x, y, z) = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$

в) Определете съвършената дизюнктивна нормална форма на функцията

Решение:

$f(x, y, z) = \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xyz$

г) Представете функцията с полином на Жегалкин

Решение:

$f(x, y, z) = xyz \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus y$

**Задача 4:** (15т.) Булевата функция $f(\widetilde{x}^n)$ се нарича симетрична точно тогава, когато $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n})$ за всяка пермутация на променливите. Намерете броя на симетричните булеви функции на $n$ променливи.

Решение:

Нека $f(x_1, x_2, ..., x_n) : J_2^n \to J_2$ е симетрична булева функция на $n$ променливи. Да разгледаме произволен вектор от дефиниционното ѝ множество $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Тъй като функцията е симетрична, то $f(\widetilde{\alpha}) = f(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_n})$, за всеки вектор $\alpha' = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_n})$, получен чрез пермутация на елементите на вектора $\widetilde{\alpha}$.

И така, ако определим стойността на функцията в един вектор, то тя се доопределя върху всички вектори със същото тегло. Различните възможни тегла на вектори в $J_2^n$ са $n + 1$, следователно броят на търсените функции е $2^{n+1}$.

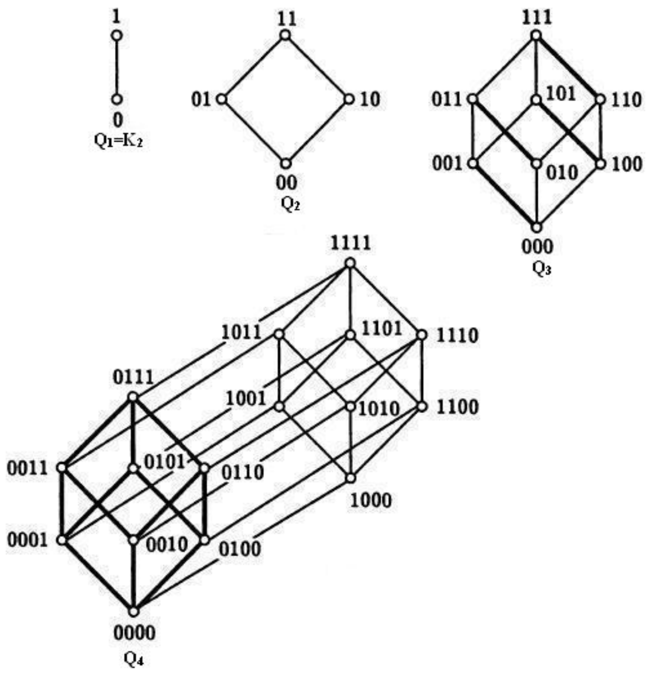
**Задача 5:** (15т.) Операцията *декартово произведение на графи* се дефинира по следния начин. Нека $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ са произволни графи. Декартовото произведение $G_1 \times G_2$ е графът $G = (V, E)$, където $V = V_1 \times V_2$, а всеки два върха $(u_1, u_2)$ и $(v_1, v_2)$ на $G$ са съседни тогава и само тогава, когато $((u_1 = v_1)$ и $(u_2, v_2) \in E_2)$ или $((u_2 = v_2)$ и $(u_1, v_1) \in E_1)$.

Докажете по индукция, че $n$-мерният хиперкуб $Q_n$ има диаметър $n$. За целта използвайте следната рекурсивна дефиниция на $n$-мерен хиперкуб:

1. $Q_1 = K_2$
2. $Q_{n+1} = K_2 \times Q_n$

*Пример:* На следващата рисунка са показани графите:

$$Q_1 = K_2 = (\{0,1\}, \{(0,1)\})$$
$$Q_2 = K_2 \times Q_1$$
$$Q_3 = K_2 \times Q_2$$
$$Q_4 = K_2 \times Q_3$$




Решение: Ще докажем по индукция следното твърдение:
$P(n)$ : Диаметърът на графа $Q_n(V_n, E_n)$ е $n$.

1. База: n=1
$P(1)$ : Диаметърът на графа $Q_1$ е 1
Твърдението очевидно е истина.

2. Индукционно предположение:
$P(k)$ е истина за някое $k \geq 1$.

3. Ще докажем $P(k+1)$ : Диаметърът на графа $Q_{k+1}(V_{k+1}, E_{k+1})$ е $k+1$.

Първо ще проверим, че разстоянието между произволни два върха на графа е най-много $k+1$.

Нека $u, v \in V_{k+1}$, $u = (x, u'), v = (y, v')$ където $x, y$ са двата върна на $K_2; u', v' \in V_k$. Да означим с $p = u', w_1, w_2, ..., w_r, v'$ най-късия път между върховете $u'$ и $v'$ в графа $Q_k$. Съгласно индукционното предположение, диаметърът на графа $Q_k$ е $k$, следователно разстоянието между върховете $u'$ и $v'$ е най-много $k$, т.е. $|p| \leq k$.

Ще разгледаме два случая:

1. $x = y$

Съгласно дефиницията на графа $Q_{k+1}$, редицата от негови върхове:

$p' = (x, u'), (x, w_1), (x, w_2), ..., (x, w_r), (x, v')$ формира път между върховете $u$ и $v$ в този граф и неговата дължина е $|p'| = |p| \leq k$. Ако допуснем, че между $u$ и $v$ има по-къс път $q' = (x, u'), (x, z_1), (x, z_2), ..., (x, z_s), (x, v')$ , то тогава пътят $q = u', z_1, z_2, ..., z_s, v'$ в $Q_k$ ще бъде по-къс от $p$, което е противоречие с избора на $p$.

2. $x \neq y$

Да разгледаме върха $t = (x, v') \in V_{k+1}$. Сега да използваме отново пътя $p$ в графа $Q_k$ и да образуваме пътя от връх $u$ до връх $v$ през връх $t$ в графа $Q_{k+1}$: $p'' = (x, u'), (x, w_1), (x, w_2), ..., (x, w_r), (x, v'), (y, v')$ Този път има дължина най-много $k+1$, тъй като $|p''| = |p'| + 1 \leq k + 1$. Допускането, че $p''$ не е най-късият път между $u$ и $v$ отново ще ни доведе до противоречието с избора на пътя $p$.

Следователно, разстоянието между произволно избрани върхове в графа $Q_{k+1}$ не надминава $k+1$, т.е. диаметърът на графа не надминава $k+1$.

Остава да докажем, че в графа има два върха на разстояние $k+1$. За целта да разгледаме два върха от графа $Q_k$, които са на разстояние $k$. Такива има, защото диаметърът на графа е $k$. Нека това са върховете $u'$ и $v'$, а най-късият път между тях е $p = u', w_1, w_2, ..., w_s, v'$ с дължина $|p| = k$. Тогава редицата от върхове на графа $Q_{k+1}$: $p' = (x, u'), (x, w_1), (x, w_2), ..., (x, w_s), (x, v'), (y, v')$ формира път в графа и има дължина $k+1$.

С това твърдението на задачата е доказано.