Примерни решения на изпита-задачи по Дискретни Структури, КН, II поток, 01.02.2016 г.

Задача 1 В тази задача знакът "$\times$" означава обикновеното умножение на числа. Да дефинираме безкрайната редица $C_0, C_1, C_2, \ldots$ от *числа на Catalan* чрез индуктивна дефиниция:

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \times C_{n-1-i} \text{ за } n > 0 \tag{1}$$

10 т. **Подзадача 1.а)** *Добре скобуван израз* ще наричаме всеки стринг x над азбуката $\Sigma = \{(,)\}$, такъв че

- броят на левите и десните скоби в x е равен и
- ако $x = x_1x_2\cdots x_m$ (което значи, че x има дължина m), за всяко i, такова че $1 \leq i \leq m$, броят на левите скоби в $x_1x_2\cdots x_i$ е по-голям или равен от броя на десните скоби в $x_1x_2\cdots x_i$.

Докажете по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}$, броят на добре скобуваните изрази с дължина $2n$ е точно C_n, използвайки рекурентното отношение (1).

Решение.
База: Да разгледаме случая $n = 0$. От една страна, множеството от добре скобуваните изрази с дължина 0 има само един елемент – празният стринг. От друга страна, $C_0 = 1$ по дефиниция. Твърдението е вярно.
Индуктивно предположение: Да допуснем, че за за някое $n > 0$, за всички стойности на аргумента между 0 и $n-1$ включително, твърдението е вярно.
Индуктивна стъпка: Разглеждаме произволен добре скобуван израз $x = x_1x_2\cdots x_{2n}$. Дефинираме функция $f : \{1, 2, \ldots, 2n\} \in \mathbb{Z}$ така: $f(i)$ е броят на левите скоби минус броя на десните скоби в подстринга $x_1\cdots x_i$. Забелязваме, че $f(i)$ е неотрицателно за всяко i, и за поне едно i, а именно $i = 2n$, $f(i) = 0$. Нека $k = \min\{i \in \{1, 2, \ldots, 2n\} \,|\, f(i) = 0\}$. Но k е четно число, защото $x_1\cdots x_k$ съдържа равен брой леви и десни скоби. Нещо повече, $x_1\cdots x_k$ е добре скобуван израз, защото броят на левите и десните скоби е един и същи и във всеки префикс левите са поне колкото десните (ако не беше така, целият x нямаше да е добре скобуван израз). Нещо повече:

- $x_1 = ($, защото всеки добре скобуван израз започва с лява скоба, и
- $x_k =)$, защото x_k е най-лявата позиция, на която е изпълнено $f(k) = 0$, от което следва, че $f(k-1) = 1$; ако x_k е (, то $f(k)$ би било 2.

Щом $x_1 = ($ и $x_k =)$, стрингът $x_2\cdots x_{k-1}$ е добре скобуван израз: можем да дефинираме функция f', аналогична на f, за него чрез изваждане на единица от стойностите на f върху него; тъй като $f(i) > 0\ \forall i \in \{2, \ldots, k-1\}$, то $f'(i) \geq 0\ \forall i \in \{2, \ldots, k-1\}$, и освен това $f'(k-1) = 0$.

След като показахме, че $x_2\cdots x_{k-1}$ е добре скобуван израз, прилагаме индуктивното предположение за него. Дължината на $x_2\cdots x_{k-1}$ е $k-1-2+1 = k-2$: четно число, което може да е най-малко 0 и най-много $2n-2$. Ако означим с i половината от дължината на $x_2\cdots x_{k-1}$, то $i \in \{0, \ldots, n-1\}$; очевидно $i = \frac{k}{2} - 1$. Съгласно индуктивното предположение, броят на добре скобуваните изрази с дължина $2i$ е C_i. И така, има C_i възможности за $x_2\cdots x_{k-1}$.

Сега разглеждаме $x_{k+1}\cdots x_n$. Очевидно това също е добре скобуван израз. Дължината му е $2n-k$, което е четно число. Половината му е $n-\frac{k}{2} = n-(i+1) = n-1-i$. Съгласно индуктивното предположение, броят на добре скобуваните изрази с дължина $2(n-i-1)$ е C_{n-i-1}. И така, има C_{n-i-1} възможности за $x_{k+1}\cdots x_{2n}$.

Съгласно принципа на умножението, спрямо дадено i, общо има $C_i \times C_{n-1-i}$ възможности за Декартовото произведение на добре скобуваните изрази $x_2\cdots x_{k-1}$ с $x_{k+1}\cdots x_{2n}$. Тъй като при различните стойности на i получаваме различни добре скобувани изрази $x_1\cdots x_{2n}$, то можем да приложим принципа на разбиването и общо

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \times C_{n-1-i}$$

10 т. **Подзадача 1.б)** *Триангулация на правилен n-ъгълник*, за $n \geq 3$, се нарича всяко поставяне на $n-3$ диагонала в него, които не се пресичат, освен може би в крайните си точки.
Докажете по индукция, че броят на триангулациите на правилен n-ъгълник е C_{n-2}.

Решение. Нека броят на триангулациите е T_n.
База: Да разгледаме случая $n = 2$. В някакъв тривиален смисъл, отсечката може да бъде наречена 2-ъгълник, който има една триангулация, така че $T_0 = 1$. От друга страна, $C_{2-2} = C_0 = 1$ по дефиниция. Твърдението е вярно
Индуктивно предположение: Да допуснем, че за някое $n > 2$, за всички стойности на аргумента от 2 до $n-1$ включително, твърдението е вярно.
Индуктивна стъпка: Разглеждаме произволен правилен n-ъгълник M. Разглеждаме произволна негова страна AB, краищата на която са върховете A и B. Нека останалите върхове са X_1, X_2, $\ldots$, X_{n-2}, разположени в този ред от A към B по периферията. Очевидно за всяка триангулация на M е вярно, че точно един от X_1, X_2, $\ldots$, X_{n-2}, да кажем X_i, е противоположен на AB в смисъл, че AX_iB е триъгълник в триангулацията. Също така е очевидно, че множеството от триангулациите на M се разбива на $n-2$ множества по това, кой е противоположният връх на AB. За всеки избор на противоположен връх X_i, да дефинираме многоъгълниците M_i' и M_i'', където M_i' е многоъгълникът $AX_1X_2 \cdots X_i$, а M_i'' е многоъгълникът $BX_{i+1}X_{i+2} \cdots X_{n-2}$. Забележете, че е възможно M_i' или M_i'' да е 2-ъгълник. Съгласно принципа на умножението, броят на триангулациите на M, в които X_i е противоположен на AB е произведението от броя на всички триангулации на M_i' и всички триангулации на M_i''. Ако M_i' има i върха, където $2 \leq i \leq n-1$, то M_i'' има $n+1-i$ върха, защото общо M_i' и M_i'' имат $n+1$ върха (X_i е връх и в двата!).

От тези съображения следва, че

$$T_n = \sum_{i=2}^{n-1} T_i \times T_{n+1-i}$$

Но от индуктивното предположение знаем, че $T_i = C_{i-2}$ и $T_{n+1-i} = C_{n+1-i-2} = C_{n-1-i}$. Тогава

$$T_n = \sum_{i=2}^{n-1} C_{i-2} \times C_{n-1-i}$$

Щом $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$, то $i-2 \in \{0, 1, \ldots, n-3\}$. Можем да запишем

$$T_n = \sum_{i-2=0}^{n-3} C_{i-2} \times C_{n-1-i}$$

Тъй като $n-1-i = n-3-(i-2)$, можем да запишем

$$T_n = \sum_{i-2=0}^{n-3} C_{i-2} \times C_{n-3-(i-2)}$$

Сега можем да сменим индекса на сумирането, минавайки от $i-2$ към i:

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-3} C_i \times C_{n-3-i}$$

Но по дефиниция, изразът вдясно е равен на C_{n-2}. Което и искахме да докажем.

Задача 2 Азбуката е множеството $\{А, Б, \ldots, Я\}$ от 30 букви.

5 т. а) Колко стринга с дължина 60 има над азбуката?

Решение. $30^{60} = 42\,391\,158\,275\,216\,203\,514\,294\,433\,201 \times 10^{60} \approx 10^{88}$.

8 т. **б)** Колко стринга с дължина 60 има над азбуката, в които всяка буква се появява поне веднъж?

Решение. Толкова, колкото са сюрекциите от 60-елементен домейн (позициите) в 30-елементен домейн (буквите), а именно:

$$\sum_{k=0}^{30} (-1)^k \binom{30}{k} (30-k)^{60} =$$
$$253675337871019966806111584740292631860808960551836253734781188290689065235251 2 \times 10^8 \approx 10^{86}$$

8 т. **в)** Колко стринга с дължина 60 има над азбуката, в които всяка буква се появява точно два пъти?

Решение.

$$\frac{60!}{2^{30}} = 77495231411805284621904987685599639328026455488171982807 04 \times 10^{14} \approx 10^{72}$$

20 т. ***г), БОНУС*** *Колко стринга с дължина 60 има над азбуката, в които всяка буква се появява точно два пъти и няма две съседни еднакви букви?*

Решение. От отговора на **в)** трябва да извадим броя на стринговете, в които има съседни еднакви букви. Това ще направим съгласно принципа на вкючването и изключването. Нека A_Z е множеството от стринговете с дължина 60 и точно две букви от всеки вид, в които буквата Z е "нарушител", тоест двете букви от този вид са една до друга; и тази нотация е в сила за всяка буква $Z \in \{А, Б, \dots, Я\}$. Ако $Z_1, \dots, Z_k$ са k различни букви от азбуката за някое $k \in \{1, \dots, 30\}$, то

$$|A_{Z_1} \cap A_{Z_2} \cap \dots \cap A_{Z_k}| = \binom{60-k}{k} k! \frac{(60-2k)!}{2^{30-k}} \tag{2}$$

Защо? Тези k букви-нарушители се явяват по двойки една до друга и можем да мислим за тях като за k блокчета, всяко с големина 2. Да си представим, че първо ще сложим блокчетата, а после ще запълним по всевъзможните начини останалите свободни позиции с останалите букви.

Ще обосновем множителя $\binom{60-k}{k}$. Ако k е 1, то има $59 = \binom{60-1}{1}$ позиции за блокчето. Ако k е 2, то възможните места за слагане на двете блокчета, така че да не се "настъпват", са $\binom{60-2}{2} = \binom{58}{2}$ на брой. И изобщо, $\binom{60-k}{k}$ е броят на местата, k на брой, на които може да бъдат сложени k блокчета, които не се настъпват.

Множителят $k!$ отразява различните начини да сложим блокчетата на заделените вече места.

Щом сложим k блокчета, ние сме сложили $2k$ букви и остават още $60-2k$ букви за слагане на свободните места. Тези останали $60-2k$ букви също са две по две еднакви, така че броят начини да бъдат сложени е $\frac{(60-2k)!}{2^{30-k}}$: използаме същото основание, като в подусловие **в)**.

След като сме се убедили, че (2) е вярно, да приложим принципа на включването и изключването. Търсеният отговор е:

$$\frac{60!}{2^{30}} - \sum_{k=1}^{30} (-1)^k \binom{30}{k} \binom{60-k}{k} k! \frac{(60-2k)!}{2^{30-k}} =$$
$$\sum_{k=0}^{30} (-1)^k \binom{30}{k} \binom{60-k}{k} k! \frac{(60-2k)!}{2^{30-k}} =$$
$$2826835800663497539505794693256798298806660761830390688964888494 08 \times 10^7 \approx 10^{72}$$

---

15 т. **Зад. 3** Нека $G = (V, E)$ е двуделен граф. Нека за някакво число p и някакъв връх $u \in V$ е изпълнено $\forall v \in V \setminus \{u\} : d(v) = p$. Докажете, че $d(u)$ е число, кратно на p.

Решение. Нека дяловете са V_1 и V_2. Без ограничение на общността, нека $u \in V_2$. Нека $|V_1| = n_1$ и $|V_2 \setminus \{u\}| = n_2$. Тъй като всяко ребро има един край във V_1 и всеки връх от V_1 е от степен p, то $m = pn_1$. Аналогично, $m = pn_2 + d(u)$. Оттук $pn_1 = pn_2 + d(u) \leftrightarrow d(u) = p(n_1 - n_2)$.

---

10 т. Зад. 4 Намерете полинома на Жегалкин на булевата функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1111\,1111\,1111\,1101\}$.

Решение. Да разгледаме $\overline{f} = (0000\,0000\,0000\,0010)$. Съвършената ДНФ на $\overline{f}$ е $x_1x_2x_3\overline{x_4}$. Лесно се вижда, че

$$x_1x_2x_3\overline{x_4} = x_1x_2x_3(1 \oplus x_4) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3x_4$$

Следователно, ПЖ на $\overline{f}$ е $x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3x_4$. Тогава ПЖ на f е $1 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3x_4$.

---

25 т. Зад. 5, БОНУС *Докажете, че $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.*

Упътване: припомнете си какво е "разходка в правоъгълна мрежа". Разгледайте правоъгълна мрежа M с размери $n \times n$. Нека долният ляв ъгъл е точка $(1, 1)$, а горният десен, (n, n). Всяка разходка започва в $(1, 1)$ и завършва в (n, n), правейки само ходове нагоре и надясно. Колко са всички разходки? Нека дефинираме лошият диагонал като следното множеството от точки в мрежата: $\{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-2, n-1), (n-1, n)\}$. Разбийте множеството от всички разходки на добри и лоши. Лошите разходки са тези, които имат поне една обща точка с лошия диагонал.

Изразете броя на добрите разходки чрез число на Catalan. След това намерете израз за броя на лошите разходки чрез биномен коефициент. Използвайте следното съображение: за произволна лоша разходка x, разгледайте първата ѝ обща точка $(k, k+1)$ с лошия диагонал. Представете си друга разходка y, която повтаря ходовете на x до достигането на $(k, k+1)$, а след това за всеки ход надясно на x прави ход нагоре, и за всеки ход надясно на x, прави ход нагоре. Разбира се, y не е разходка в M, а в мрежа с размери $(n-1) \times (n+1)$ (защо?). Намерете подходящо прилагане на комбинаторния принцип на биекцията, за да намерите броя на лошите разходки.

Решение. Упътването почти решава задачата.

Всички разходки са $\binom{2n}{n}$.

Добрите разходки са C_n. Това се вижда веднага, ако заместим ходовете нагоре с леви скоби и ходовете надясно с десни скоби – ще получим добре скобуваните стрингове с дължина $2n$, които C_n на брой съгласно първата задача.

Лошите разходки са $\binom{n-1+n+1}{n-1} = \binom{2n}{n-1}$. Съществува биекция между лошите разходки в дадената мрежа M и всички разходки в друга мрежа, която е с размери $(n-1) \times (n+1)$. Използвайки термините от упътването, на всяка лоша разходка x в M съответства разходка y в мрежа с размери $(n-1) \times (n+1)$. Геометрично, y се получава от x чрез рефлексия (спрямо правата, съдържаща лошия диагонал) на тази част от x, която е след първата среща с лошия диагонал.

Получаваме

$$\binom{2n}{n} = C_n - \binom{2n}{n-1} \leftrightarrow C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

Но

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!(n+1)}{(n+1)!n!} - \frac{(2n)!n}{(n+1)!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$