Изпит по "Дискретни структури" за КН, първи поток, 03. 02. 2016 г., СУ, ФМИ

Име: ____________________________________ ФН: ________ Група: ____

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	20	30	30	30	110

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1. Може ли матрица 2016×2016 да се попълни с числата $+1, -1$ и 0 така, че всички сборове по редове, по стълбове и по двата диагонала да са различни?

Задача 2. Числовата редица $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява уравнението $a_{n+2} = 56\, a_n - a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

а) Намерете формулата за общия член (с неопределени коефициенти). (15 точки)

б) Ако членовете на редицата са положителни числа, докажете, че тя е геометрична прогресия и намерете нейното частно. (15 точки)

Задача 3. Даден е ориентиран граф G с шест върха v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 , v_6 . Между всеки два различни върха v_i и v_j $(i < j)$ има ребро от v_i към v_j с тегло $(i - j)^2$.

а) Постройте дървото на най-късите пътища в G от върха v_1 . Кой алгоритъм прилагате? Начертайте дървото и опишете реда на включване на ребрата. (10 точки)

б) Хамилтонов граф ли е G ? (Отговорът да се обоснове!) (10 точки)

в) Планарен граф ли е G ? (Отговорът да се обоснове!) (10 точки)

Задача 4. За двоичната функция $f(x, y, z)$, определена с таблицата по-долу, намерете:

а) съвършената дизюнктивна нормална форма; (5 точки)

б) минималната дизюнктивна нормална форма; (15 точки)

в) полинома на Жегалкин. (10 точки)

БОНУС: Шеферова функция ли е f ? (15 точки)

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Матрицата не може да се попълни по описания начин, защото редовете, стълбовете и диагоналите са общо $2\ .\ 2016 + 2 = 4034$ на брой, а възможните стойности на сборовете са от -2016 до $+2016$, т.е. 4033 броя. Тъй като $4034 > 4033$, от принципа на Дирихле следва, че поне два от сборовете ще бъдат равни.

Задача 2. Дадената числова редица е определена с хомогенно линейно-рекурентно уравнение. Съответното характеристично уравнение е $x^{n+2} = 56\,x^{n} - x^{n+1}$, което е равносилно (при $x \neq 0$) на квадратното уравнение $x^2 + x - 56 = 0$ с корени $x_1 = 7$ и $x_2 = -8$. Оттук получаваме формулата за общия член: $a_n = C_1\ .\ 7^n + C_2\ .\ (-8)^n$.

От $|-8| > |7|$ следва, че ако $C_2 > 0$, то $a_n < 0$ за всички достатъчно големи нечетни n; ако пък $C_2 < 0$, то $a_n < 0$ за всички достатъчно големи четни n. Следователно, ако всички членове на редицата са положителни числа, то $C_2 = 0$ (и $C_1 > 0$); тогава $a_n = C_1\ .\ 7^n$, т.е. редицата е геометрична прогресия с частно 7.

Задача 3. а) Дървото на най-късите пътища в G от върха v_1 съдържа единствен клон — пътя $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_6$, образуван от всички ребра с тегло 1. Дървото се получава по алгоритъма на Дейкстра, а ребрата се включват в следния ред: $(v_1\,,\,v_2)$, $(v_2\,,\,v_3)$, $(v_3\,,\,v_4)$, $(v_4\,,\,v_5)$, $(v_5\,,\,v_6)$.

б) По условие всички ребра сочат от връх с по-малък номер към връх с по-голям номер. Затова графът G не съдържа никакъв цикъл, в това число и хамилтонов цикъл. Следователно G не е хамилтонов граф.

в) Тъй като $G \equiv K_6 \supset K_5$, то G не е планарен граф.

Задача 4. а) От таблицата на f съставяме съвършената дизюнктивна нормална форма:
$f \;=\; \overline{x}\;\overline{y}\;\overline{z} \;\vee\; \overline{x}\;\overline{y}\;z \;\vee\; \overline{x}\;y\;z \;\vee\; x\;\overline{y}\;z \;\vee\; x\;y\;\overline{z}\,.$

в) За да получим полинома на Жегалкин, преобразуваме дизюнтивната нормална форма: първо заместваме включващата дизюнкция с изключваща (понеже тази дизюнктивна форма е съвършена), после заместваме отрицанието със събиране с 1 (истина) и разкриваме скобите:

$$f \;=\; (x+1)\,(y+1)\,(z+1) \;+\; (x+1)\,(y+1)\,z \;+\; (x+1)\,y\,z \;+\; x\,(y+1)\,z \;+\; x\,y\,(z+1) \;=$$
$$=\; xyz + xy + yz + xz + x + y + z + 1 \quad + \quad xyz + xz + yz + z \quad +$$
$$+\; xyz + yz \quad + \quad xyz + xz \quad + \quad xyz + xy\,.$$

След като унищожим еднаквите събираеми по двойки, получаваме полинома на Жегалкин:
$f \;=\; xyz + xz + yz + x + y + 1\,.$

Бонус: Функцията f е шеферова, защото сама образува пълно множество. За да докажем това, ще изразим чрез f отрицанието и конюнкцията (за които знаем, че образуват пълно множество):

$$\overline{x} \;=\; f\,(x\,,\,x\,,\,x)\,; \qquad\qquad x\,y \;=\; \overline{f\,(x\,,\,x\,,\,y)} \;=\; f\Big(\,f\,(x\,,\,x\,,\,y)\;,\;f\,(x\,,\,x\,,\,y)\;,\;f\,(x\,,\,x\,,\,y)\Big)\,.$$

Тези тъждества се проверяват по табличния метод или чрез полинома на Жегалкин.

Твърдението, че f е шеферова функция, може да се докаже и с критерия на Пост.

б) Най-напред по алгоритъма на Куайн—Макккласки намираме простите импликанти на f (те са обозначени със звездички). След това решаваме задачата за минималното покритие, за да определим кои от тях са задължителни.

Таблица на истинност:

	x	y	z	f
0:	0	0	0	1
1:	0	0	1	1
2:	0	1	0	0
3:	0	1	1	1
4:	1	0	0	0
5:	1	0	1	1
6:	1	1	0	1
7:	1	1	1	0

Импликанти (от ред 0):

	x	y	z	
0:	0	0	0	→
1:	0	0	1	→
3:	0	1	1	→
5:	1	0	1	→
6:	1	1	0	*

Импликанти (от ред 1):

	x	y	z	
0, 1:	0	0	–	*
1, 3:	0	–	1	*
1, 5:	–	0	1	*

Таблица на простите импликанти:

	x	y	z	0	1	3	5	6	
0, 1:	0	0	–	●	○				$\bar{x}\bar{y}$
1, 3:	0	–	1		○	●			$\bar{x}z$
1, 5:	–	0	1		○		●		$\bar{y}z$
6:	1	1	0					●	$xy\bar{z}$

Задължителни прости импликанти: $\bar{x}\bar{y}$, $\bar{x}z$, $\bar{y}z$, $xy\bar{z}$.

Минимална дизюнктивна нормална форма:

$$f = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z \vee \bar{y}z \vee xy\bar{z} .$$