Решения на задачите от контролна работа № 1 по ДАА

I. 1) Определете в кои от петте отношения O, Ω, Θ, o и ω са функциите $f(x)$ и $g(x)$ в следните два случая. Във всеки от случаите, попълнете таблицата с „Да“ или „Не“, като *обосновете* отговорите си.

a) $f(x) = 2^{2^{\lfloor x \rfloor}}$, $g(x) = 2^{2^{\lceil x \rceil}}$, $x \in \mathbb{R}^+$

Решение:
Забележете, че $\forall x \in \mathbb{N}^+$,

$$\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \;\Rightarrow\; 2^{2^{\lfloor x \rfloor}} = 2^{2^{\lceil x \rceil}}$$

Да допуснем, че $f(x) = o(g(x))$. По определение това означава, че за всяка константа $c > 0$ съществува стойност на x_0 на аргумента, такава че за всяко $x \geq x_0$, $f(x) < c.g(x)$. Следователно за $c = 2$ има някаква стойност на аргумента x', такава че за всяко $x \geq x'$, $f(x) < 2g(x)$. Но

$$\lceil x' \rceil \geq x'$$

следователно

$$f(\lceil x' \rceil) < 2g(\lceil x' \rceil)$$

От друга страна,

$$\lceil x' \rceil \in \mathbb{N}^+ \;\Rightarrow\; f(\lceil x' \rceil) = g(\lceil x' \rceil)$$

Изведохме, че

$$f(\lceil x' \rceil) = g(\lceil x' \rceil) \text{ и } f(\lceil x' \rceil) < 2g(\lceil x' \rceil)$$

Това е невъзможно за положителни реални числа, каквито са $f(x')$ и $g(x')$. Следователно допускането ни е погрешно, следователно

$$f(x) \neq o(g(x))$$

Аналогично се доказва, че

$$f(x) \neq \omega(g(x))$$

Ще покажем, че

$$f(x) \neq \Theta(g(x))$$

За целта ще разгледаме само стойностите на аргумента от вида $n + \frac{1}{2}$, където $n \in \mathbb{N}^+$. Но тогава

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor = n \;\Rightarrow\; 2^{2^{\lfloor x \rfloor}} = 2^{2^n}$$

$$\lceil x \rceil = \left\lceil n + \frac{1}{2} \right\rceil = n + 1 \;\Rightarrow\; 2^{2^{\lfloor x \rfloor}} = 2^{2^{n+1}}$$

Знаем, че $2^{2^n} = o\left(2^{2^{n+1}}\right)$ за цели положителни n, който факт се извежда така

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2.2^n} = \left(2^{2^n}\right)^2 = \omega\left(2^{2^n}\right), \text{ тъй като } 2^{2^n} \text{ е неограничено нарастваща функция}$$

Доказахме, че $f(x) = o(g(x))$, когато $x \in \{n + \frac{1}{2} \,|\, n \in \mathbb{N}^+\}$. Това означава, че $f(x) \neq \Theta(g(x))$ когато $x \in \{n + \frac{1}{2} \,|\, n \in \mathbb{N}^+\}$. Оттук следва, че $f(x) \neq \Theta(g(x))$ когато $x \in \mathbb{R}^+$, тъй като $\{n + \frac{1}{2} \,|\, n \in \mathbb{N}^+\} \subset \mathbb{R}^+$.

Сега ще докажем, че

$$f(x) = O(g(x))$$

Действително,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}^+, \lfloor x \rfloor &&\leq \lceil x \rceil \Rightarrow \\
&\forall x \in \mathbb{R}^+, 2^{\lfloor x \rfloor} &&\leq 2^{\lceil x \rceil} \Rightarrow \\
&\forall x \in \mathbb{R}^+, 2^{2^{\lfloor x \rfloor}} &&\leq 2^{2^{\lceil x \rceil}} \Rightarrow \exists c > 0, c = \text{const}, \text{ такава че } \forall x \in \mathbb{R}^+,\ 2^{2^{\lfloor x \rfloor}} \leq c.2^{2^{\lceil x \rceil}}
\end{aligned}$$

И накрая ще покажем, че

$$f(x) \neq \Omega(g(x))$$

Можем да го направим аналогично на доказателството, че $f(x) \neq \Theta(g(x))$. А може и по-просто: известно е, т.е. правено е на упражнение, че за всеки две асимптотично положителни функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$,

$$\phi(x) = \Theta(\psi(x)) \iff \phi(x) = O(\psi(x)) \text{ и } \phi(x) = \Omega(\psi(x))$$

Тъй като вече доказахме, че $f(x) = O(g(x))$, ако е изпълнено и $f(x) = \Omega(g(x))$ ще следва, че $f(x) = \Theta(g(x))$. А вече доказахме, че $f(x) \neq \Theta(g(x))$. Следователно $f(x) \neq \Omega(g(x))$.

$f(x) = O(g(x))$	$f(x) = \Omega(g(x))$	$f(x) = \Theta(g(x))$	$f(x) = o(g(x))$	$f(x) = \omega(g(x))$
Да	Не	Не	Не	Не

$\square$

б) $f(x) = \binom{2x}{x}$, $g(x) = 2^{2x}$, $x \in \mathbb{N}^+$

Решение:
Прилагаме известната формула за биномния коефициент и след това апроксимацията на Стирлинг без множителя $\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{x}\right)\right)$:

$$\binom{2x}{x} = \frac{(2x)!}{x!x!} = \frac{\sqrt{2\pi 2x}\frac{(2x)^{2x}}{e^{2x}}}{\sqrt{2\pi x}\frac{x^x}{e^x}.\sqrt{2\pi x}\frac{x^x}{e^x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\frac{2^{2x}x^{2x}}{e^{2x}}\frac{1}{\frac{x^{2x}}{e^{2x}}} = \frac{2^{2x}}{\sqrt{\pi x}}$$

Тогава

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2^{2x}}{\sqrt{\pi x}}\frac{1}{2^{2x}} = 0$$

следователно е изпълнено $f(x) = o(g(x))$. Това имплицира $f(x) = O(g(x))$, а останалите отношения не са изпълнени.

$f(x) = O(g(x))$	$f(x) = \Omega(g(x))$	$f(x) = \Theta(g(x))$	$f(x) = o(g(x))$	$f(x) = \omega(g(x))$
Да	Не	Не	Да	Не

2) Докажете, че $2\lg^2 n = O(\sqrt{n})$, като използвате определението на нотацията O и само него. Тоест, извършете доказателството, показвайки конкретни стойности на константите в определението.

Решение:
Иска се да бъде доказано, че съществува константа $c \geq 0$ и стойност на аргумента n_0, такива че за всяко $n \geq n_0$,

$$2\lg^2 n \leq c\sqrt{n} \tag{1}$$

Да положим $\sqrt[4]{n} = m$, тоест $n = m^4$ и $\sqrt{n} = m^2$. Тогава (1) става

$$2\left(\lg\left(m^4\right)\right)^2 \leq cm^2 \;\Leftrightarrow\; 32\lg^2 m \leq cm^2 \tag{2}$$

Ще покажем, че $c = 32$ е възможна стойност за доказателството. Нека $c = 32$. Тогава (2) става

$$32\lg^2 m \leq 32m^2 \;\Leftrightarrow\; \lg^2 m \leq m^2 \;\Leftrightarrow\; \lg m \leq m \tag{3}$$

Ще докажем, че съществува стойност на аргумента, а именно $m_0 = 4$, такава че $\forall m \geq m_0$, неравенство (3) е изпълнено. Доказателството е по индукция. Базата е $m = 4$ – очевидно $\lg 4 \leq 4$. Допускаме, че за някое $m > 4$

$$\lg m \leq m \;\Leftrightarrow\; (\lg m) + 1 \leq m + 1 \tag{4}$$

и искаме да докажем, че

$$\lg(m+1) \leq m + 1 \tag{5}$$

Но

$$\lg(m+1) \leq (\lg m) + 1 \;\Leftrightarrow \tag{6}$$

$$\lg\left(\frac{m+1}{m}\right) \leq 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\lg\left(1 + \frac{1}{m}\right) \leq \lg 2 \;\Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{m} \leq 2 \tag{7}$$

Тъй като (7) е очевидно вярно за $m > 4$, следва, че (6) е вярно. От (6) и (4) очевидно следва (5). Следователно, $c = 32$ и $m_0 = 4$ са търсеният отговор за (2). Връщайки се към оригиналната променлива n, търсеният отговор е $c = 32$ и $n_0 = 4^4 = 256$.

II. Решете следните три рекурентни отношения.

1) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n}\lg n$ 2) $T(n) = n^2 T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ 3) $T(n) = 3T(n-1) - 2T(n-2) + n2^n$

Решение на 1):
Използваме МТ (Master Theorem). Съществува $\epsilon > 0$, за което

$$n^{\frac{1}{2}} \lg n = O\left(n^{(\log_2 2)-\epsilon}\right) \tag{8}$$

Примерно за $\epsilon = \frac{1}{3}$, (8) става

$$n^{\frac{1}{2}} \lg n = O\left(n^{\frac{2}{3}}\right) \Leftrightarrow \lg n = O\left(n^{\frac{1}{6}}\right)$$

което очевидно е истина, имайки предвид доказания факт, че логаритмичната функция расте асимптотично по-бавно от ен-на-каквато-и-да-е-положителна-степен. Поради истинността на (8), случай 1 на МТ е приложим, следователно

$$T(n) = \Theta(n)$$

Решение на 2):
МТ не е приложима. Решаваме чрез итериране (разгъване).

$$\begin{aligned}
T(n) &= n^2 T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \\
&= n^2 \left(\frac{n^2}{4} T\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right) + 1 \\
&= \frac{n^4}{2^2} T\left(\frac{n}{2^2}\right) + n^2 + 1 \\
&= \frac{n^4}{2^2} \left(\frac{n^2}{2^4} T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 1\right) + n^2 + 1 \\
&= \frac{n^6}{2^6} T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n^4}{2^2} + n^2 + 1 \\
&= \frac{n^6}{2^6} \left(\frac{n^2}{2^6} T\left(\frac{n}{2^4}\right) + 1\right) + \frac{n^4}{2^2} + n^2 + 1 \\
&= \frac{n^8}{2^{12}} T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \frac{n^6}{2^6} + \frac{n^4}{2^2} + n^2 + 1 \\
&= \frac{n^8}{2^{12}} \left(\frac{n^2}{2^8} T\left(\frac{n}{2^5}\right) + 1\right) + \frac{n^6}{2^6} + \frac{n^4}{2^2} + n^2 + 1 \\
&= \frac{n^{10}}{2^{20}} T\left(\frac{n}{2^5}\right) + \frac{n^8}{2^{12}} + \frac{n^6}{2^6} + \frac{n^4}{2^2} + n^2 + 1 \\
&= \frac{n^{10}}{2^{20}} T\left(\frac{n}{2^5}\right) + \frac{n^8}{2^{12}} + \frac{n^6}{2^6} + \frac{n^4}{2^2} + \frac{n^2}{2^0} + \frac{n^0}{2^0} \\
&= \frac{n^{10}}{2^{5.4}} T\left(\frac{n}{2^5}\right) + \frac{n^8}{2^{4.3}} + \frac{n^6}{2^{3.2}} + \frac{n^4}{2^{2.1}} + \frac{n^2}{2^{1.0}} + \frac{n^0}{2^{0.(-1)}} \\
&= \dots \\
&= \underbrace{\frac{n^{2i}}{2^{i(i-1)}} T\left(\frac{n}{2^i}\right)}_{A} + \underbrace{\frac{n^{2(i-1)}}{2^{(i-1)(i-2)}} + \frac{n^{2(i-2)}}{2^{(i-2)(i-3)}} \dots + \frac{n^8}{2^{4.3}} + \frac{n^6}{2^{3.2}} + \frac{n^4}{2^{2.1}} + \frac{n^2}{2^{1.0}} + \frac{n^0}{2^{0.(-1)}}}_{B}
\end{aligned}$$

Максималната стойност на i е $i_{\max} = \lg n$. Първо ще изчислим A при $i = \lg n$, имайки предвид, че $T(1)$ е някаква константа c.

$$A = \frac{n^{2\lg n}}{2^{\lg^2 n - \lg n}} T(1) = \frac{c 2^{\lg n} n^{2\lg n}}{2^{\lg^2 n}} = \frac{c.n.n^{2\lg n}}{2^{\lg^2 n}}$$

Но

$$2^{\lg^2 n} = 2^{\lg n . \lg n} = 2^{\lg \left(n^{\lg n}\right)} = n^{\lg n} \tag{9}$$

Следователно

$$A = \frac{c.n.n^{2\lg n}}{n^{\lg n}} = \Theta(n^{1+\lg n}) \tag{10}$$

Да разгледаме B. Очевидно може да го представим като сума така:

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^{\lg n} \frac{n^{2((\lg n)-j)}}{2^{((\lg n)-j)((\lg n)-j-1)}} \\ &= \sum_{j=1}^{\lg n} \frac{1}{n^{2j}} \frac{n^{2\lg n}}{2^{(\lg^2 n - j\lg n - j\lg n + j^2 - \lg n + j)}} \\ &= \sum_{j=1}^{\lg n} \frac{1}{n^{2j}} \frac{\left(n^{2\lg n}\right)\left(2^{2j\lg n}\right)\left(2^{\lg n}\right)}{\left(2^{\lg^2 n}\right)\left(2^{j^2+j}\right)} \end{aligned} \tag{11}$$

Но

$$2^{2j\lg n} = 2^{\lg \left(n^{2j}\right)} = n^{2j} \tag{12}$$

и

$$2^{\lg n} = n \tag{13}$$

Прилагаме (9), (12) и (13) върху (11) и получаваме

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^{\lg n} \frac{1}{n^{2j}} \frac{\left(n^{2\lg n}\right)\left(n^{2j}\right)(n)}{\left(n^{\lg n}\right)\left(2^{j^2+j}\right)} \\ &= \sum_{j=1}^{\lg n} \frac{n^{1+\lg n}}{2^{j^2+j}} \\ &= \left(n^{1+\lg n}\right) \sum_{j=1}^{\lg n} \frac{1}{2^{j^2+j}} \\ &\leq \left(n^{1+\lg n}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j^2+j}} \\ &\leq n^{1+\lg n} \qquad \text{тъй като знаем, че } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 \\ &= \Theta\left(n^{1+\lg n}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

От (10) и (14) следва, че

$$T(n) = \Theta\left(n^{1+\lg n}\right)$$

Решение на 3):
Решаваме чрез метода с характеристичното уравнение. Характеристичното уравнение е

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

с корени $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Нехомогенната част е $n2^n$. От нея имаме още един корен 2 с кратност $1 + 1 = 2$. Общо за хомогенната и нехомогенната част имаме корен 1 с кратност 1 и корен 2 с кратност 3. Решението е

$$T(n) = A.1^n + B.2^n + C.n.2^n + D.n^2.2^n$$

за някакви положителни константи A, B, C и D. Ясно е, че

$$T(n) = \Theta(n^2.2^n)$$

III. Намерете асимптотичната времева сложност на алгоритмите, представени със следните фрагменти, като функция на n.

1)
```
int f(int n) {
 s = 0;
 for(i = 1; i <= n/3; i++)
 for(j = i; j <= i + n/3; j++)
 for(k = i; k <= i + n/4; k++)
  s++;
 return s; }
```

2)
```
int r(int n, int m) {
 int i, s = 0;
 if (n < 2) return n*m + 1;
 for(i = 0; i < 3; i ++)
  s += r(n-1,m+i)*r(n-2,m-i);
 s += r(n-1,m);
 return s; }
```

3)
```
int p(int n) {
 int i, j, s = 0;
 for(i = n; i > 0; i /= 2)
  for(j = 0; j < i; j ++)
   s ++;
 return s; }
```

Решение на 1):

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} \sum_{j=i}^{i+\frac{n}{3}} \sum_{k=i}^{i+\frac{n}{4}} 1 = \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} \sum_{j=i}^{i+\frac{n}{3}} \left(\frac{n}{4} + 1\right) = \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} \left(\frac{n}{4} + 1\right) \sum_{j=i}^{i+\frac{n}{3}} 1 = \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}} \left(\frac{n}{4} + 1\right)\left(\frac{n}{3} + 1\right) = \Theta(n^3)$$

Решение на 2):
Рекурентната зависимост, описваща асимптотичната времева сложност, е

$$T(n) = 4T(n-1) + 3T(n-2) + 1$$

Това е така, понеже променливата, от която зависят рекурсивните викания, е n. Другата променлива m няма отношение към бързодействието (макар че със сигурност има отношение към върнатия резултат). Забележете, че имаме три викания с $n-2$ и четири с $n-1$. Това, че $r(n-1, m+i)$ се умножава, а не се събира, с $r(n-2, m-i)$ няма значение за броя на извикванията.
Решението на рекурентната зависимост е чрез метода на характеристичното уравнение. В случая то е

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

с корени $x_1 = 2+\sqrt{7}$ и $x_2 = 2-\sqrt{7}$. От нехомогенната част имаме още един корен 1 с кратност 1. Решението е

$$T(n) = A.1^n + B.(2-\sqrt{7})^n + C.(2+\sqrt{7})^n$$

за някакви положителни константи A, B и C. Действително, $2-\sqrt{7} < 0$, но $|2-\sqrt{7}| < 1$, така че

$$\lim_{n\to\infty} (2-\sqrt{7})^n = 0$$

следователно $C.(2+\sqrt{7})^n$ определя асимптотичното поведение (знаем, че $C > 0$). Ясно е, че

$$T(n) = \Theta\left((2+\sqrt{7})^n\right)$$

Решение на 3):
Очевидно при $i = n$, j пробягва всички цели числа между 0 и $n-1$ включително, тоест n на брой, след което i става $\frac{n}{2}$ и j пробягва всички цели числа между 0 и $\frac{n}{2}-1$ включително, тоест $\frac{n}{2}$ на брой, и т.н., като за всяко присвояване на стойност на j, операцията $s++$ се върши във време $\Theta(1)$. Общо времевата сложност е от порядъка на $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots + 1 \leq 2n$, тоест $\Theta(n)$. Формално по-прецизно извеждане е

$$\sum_{k=0}^{\lg n} \sum_{t=1}^{\frac{n}{2^t}} 1 = \sum_{k=0}^{\lg n} \frac{n}{2^t} = n \sum_{k=0}^{\lg n} \frac{1}{2^t} \leq n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^t} = 2n = \Theta(n)$$