

ДОМАШНО № 1 ПО ДИСЦИПЛИНАТА “ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ”
ЗА СПЕЦИАЛНОСТ “ИНФОРМАТИКА”, I КУРС, I ПОТОК,
ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР НА 2015/2016 УЧ. Г. В СУ, ФМИ

Домашната работа се дава на асистента в началото на упражнението на 6–7 април 2016 г.

Име: Факултетен № Група:

Задача	1	2	3	4	5	6	ОБЩО
<i>получени точки</i>							
<i>максимум точки</i>	6	6	6	6	6	6	36

Забележка 1: Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!

Забележка 2: Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!

Задача 1.

а) Изразете включващата дизюнкция с помощта единствено на импликацията. Тоест трябва да съставите логически израз, който съдържа само операцията импликация (може няколко пъти), скоби и две имена на съждения (например p и q) и е еквивалентен на дизюнкцията $p \vee q$. Докажете еквивалентността чрез табличния метод. (3 точки)

б) За кои стойности на реалния параметър a всички реални корени на уравнението $ax = 120$ лежат в интервала $[2; 10]$? (3 точки)

Задача 2. Предложете строга линейна наредба в множеството $2^{\mathbb{Q}}$. (6 точки)

Задача 3. Депутатите от един парламент решили, че имат нужда от нов регламент за приемане на закони. Ако M е множеството на депутатите, то всеки регламент представлява фамилия \mathcal{F} от подмножества на M : един закон се счита за приет само ако множеството на депутатите, гласували за този закон, принадлежи на \mathcal{F} . С други думи, подмножествата на M се делят на "големи" и "малки". (Обичайната практика е $\mathcal{F} = \{X \in 2^M \mid |X| > \frac{1}{2}|M|\}$, тоест законът се приема само ако е събрал повече от половината гласове. Но има особени случаи, когато се изисква мнозинство от $\frac{2}{3}$ или даже $\frac{3}{4}$ от гласовете.) Депутатите още не са решили какъв да бъде новият регламент \mathcal{F} , но са постигнали съгласие, че той трябва да притежава следните свойства:

- 1) За всяко $A \subseteq M$ точно едно от множествата A и $M \setminus A$ принадлежи на \mathcal{F} (гласуването трябва винаги да дава определен резултат).
- 2) Ако $A \subseteq B \subseteq M$ и $A \in \mathcal{F}$, то $B \in \mathcal{F}$ (спечелвайки повече гласове, приетият закон не може да бъде отхвърлен).
- 3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ (един закон не може да бъде приет, ако всички гласуват против него).
- 4) За $\forall A \in 2^M$ и $\forall B \in 2^M$, ако $A \notin \mathcal{F}$ и $B \notin \mathcal{F}$, то $A \cup B \notin \mathcal{F}$ (безполезност на коалициите).

(Приемането на закони с обикновено мнозинство има първите три свойства, но не и четвъртото. Тоест именно четвъртото свойство налага промяна в начина на приемане на закони.)

Покажете, че поставените четири изисквания водят до диктатура: приемането на законите ще зависи от гласа на един-единствен депутат! По-формално: докажете, че $\exists x \in M$, такава, че $A \in \mathcal{F}$ тогава и само тогава, когато $x \in A$. (6 точки)

Забележка: Подразбира се, че множеството M е крайно и непразно.

Задача 4. Известен е принципът "частта е по-малка от цялото". Той обаче важи само за крайни множества. При безкрайните множества може да се случи частта да е равна на цялото. Това свойство на безкрайните множества съществено улеснява работата с тях.

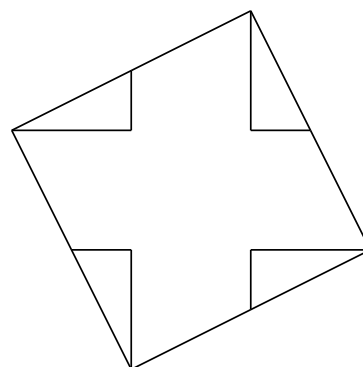
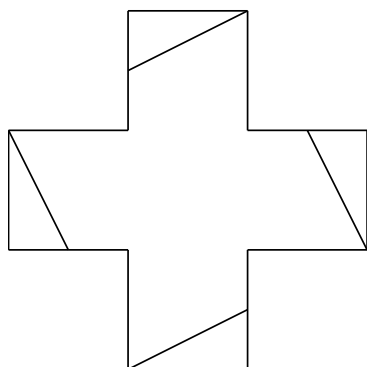
Пресметнете числените стойности на двата безкрайни изрази, като от всеки от тях отделите част, равна на целия израз:

а) $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}}$ (3 точки);

б) $6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{\dots}}}$ (3 точки)

Задача 5. Докажете, че ако $x + \frac{1}{x}$ е цяло число за някое $x \in \mathbb{R}$, то $x^n + \frac{1}{x^n}$ също е цяло число за всяко $n = 1, 2, 3 \dots$ (6 точки)

Задача 6. Равнинната фигура A се нарича *равноразложима* с равнинната фигура B , когато A може да се разреже на краен брой части, от които може после да се сглоби фигурата B . (Всяка от частите е твърдо тяло: при движение не променя нито формата, нито размерите си.) Например кръстът е равноразложим с квадрат, който има същото лице.



Покажете, че равноразложимостта е релация на еквивалентност в множеството на равнинните фигури. Пояснете разсъжденията си с чертежи. (6 точки)