Домашно № 1 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, I поток, летен семестър на 2015/2016 уч. г. в СУ, ФМИ

Домашната работа се дава на асистента в началото на упражнението на 6 – 7 април 2016 г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	*6*	*6*	*6*	*6*	*6*	*6*	*36*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1.

а) Изразете включващата дизюнкция с помощта единствено на импликацията. Тоест трябва да съставите логически израз, който съдържа само операцията импликация (може няколко пъти), скоби и две имена на съждения (например p и q) и е еквивалентен на дизюнкцията $p \vee q$. Докажете еквивалентността чрез табличния метод. **(3 точки)**

б) За кои стойности на реалния параметър a всички реални корени на уравнението $ax = 120$ лежат в интервала $\Big[2\,;\,10\Big]$? **(3 точки)**

Задача 2. Предложете строга линейна наредба в множеството $2^{\mathbb{Q}}$. **(6 точки)**

Задача 3. Депутатите от един парламент решили, че имат нужда от нов регламент за приемане на закони. Ако M е множеството на депутатите, то всеки регламент представлява фамилия $\mathcal{F}$ от подмножества на M: един закон се счита за приет само ако множеството на депутатите, гласували за този закон, принадлежи на $\mathcal{F}$. С други думи, подмножествата на M се делят на "големи" и "малки". $\Big($Обичайната практика е $\mathcal{F} = \Big\{ X \in 2^{M} \;\Big|\; |X| > \frac{1}{2}|M| \Big\}$, тоест законът се приема само ако е събрал повече от половината гласове. Но има особени случаи, когато се изисква мнозинство от $\frac{2}{3}$ или даже $\frac{3}{4}$ от гласовете.$\Big)$ Депутатите още не са решили какъв да бъде новият регламент $\mathcal{F}$, но са постигнали съгласие, че той трябва да притежава следните свойства:

1) За всяко $A \subseteq M$ точно едно от множествата A и $M \setminus A$ принадлежи на $\mathcal{F}$ (гласуването трябва винаги да дава определен резултат).
2) Ако $A \subseteq B \subseteq M$ и $A \in \mathcal{F}$, то $B \in \mathcal{F}$ (спечелвайки повече гласове, приетият закон не може да бъде отхвърлен).
3) $\varnothing \notin \mathcal{F}$ (един закон не може да бъде приет, ако всички гласуват против него).
4) За $\forall A \in 2^{M}$ и $\forall B \in 2^{M}$, ако $A \notin \mathcal{F}$ и $B \notin \mathcal{F}$, то $A \cup B \notin \mathcal{F}$ (безполезност на коалициите).

(Приемането на закони с обикновено мнозинство има първите три свойства, но не и четвъртото. Тоест именно четвъртото свойство налага промяна в начина на приемане на закони.)

Покажете, че поставените четири изисквания водят до диктатура: приемането на законите ще зависи от гласа на един-единствен депутат! По-формално: докажете, че $\exists x \in M$, такова, че $A \in \mathcal{F}$ тогава и само тогава, когато $x \in A$. **(6 точки)**

Забележка: Подразбира се, че множеството M е крайно и непразно.

Задача 4. Известен е принципът "частта е по-малка от цялото". Той обаче важи само за крайни множества. При безкрайните множества може да се случи частта да е равна на цялото. Това свойство на безкрайните множества съществено улеснява работата с тях.

Пресметнете числените стойности на двата безкрайни израза, като от всеки от тях отделите част, равна на целия израз:

а) $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ddots}}}}$ **(3 точки)**;

б) $6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{\cdots}}}$ **(3 точки)**

Задача 5. Докажете, че ако $x+\dfrac{1}{x}$ е цяло число за някое $x\in\mathbb{R}$, то $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ също е цяло число за всяко $n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$ **(6 точки)**

Задача 6. Равнинната фигура A се нарича *равноразложима* с равнинната фигура B, когато A може да се разреже на краен брой части, от които може после да се сглоби фигурата B. (Всяка от частите е твърдо тяло: при движение не променя нито формата, нито размерите си.) Например кръстът е равноразложим с квадрат, който има същото лице.

Покажете, че равноразложимостта е релация на еквивалентност в множеството на равнинните фигури. Пояснете разсъжденията си с чертежи. **(6 точки)**