Домашно № 1 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, I поток, летен семестър на 2015/2016 уч. г. в СУ, ФМИ

Домашната работа се дава на асистента в началото на упражнението на 6 – 7 април 2016 г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	*6*	*6*	*6*	*6*	*6*	*6*	*36*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1.

а) Изразете включващата дизюнкция с помощта единствено на импликацията. Тоест трябва да съставите логически израз, който съдържа само операцията импликация (може няколко пъти), скоби и две имена на съждения (например p и q) и е еквивалентен на дизюнкцията $p \vee q$. Докажете еквивалентността чрез табличния метод. **(3 точки)**

б) За кои стойности на реалния параметър a всички реални корени на уравнението $ax = 120$ лежат в интервала $\Big[2\,;\,10\Big]$? **(3 точки)**

Задача 2. Предложете строга линейна наредба в множеството $2^{\mathbb{Q}}$. **(6 точки)**

Задача 3. Депутатите от един парламент решили, че имат нужда от нов регламент за приемане на закони. Ако M е множеството на депутатите, то всеки регламент представлява фамилия $\mathcal{F}$ от подмножества на M: един закон се счита за приет само ако множеството на депутатите, гласували за този закон, принадлежи на $\mathcal{F}$. С други думи, подмножествата на M се делят на "големи" и "малки". (Обичайната практика е $\mathcal{F} = \Big\{X \in 2^M \;\Big|\; |X| > \frac{1}{2}|M|\Big\}$, тоест законът се приема само ако е събрал повече от половината гласове. Но има особени случаи, когато се изисква мнозинство от $\frac{2}{3}$ или даже $\frac{3}{4}$ от гласовете.) Депутатите още не са решили какъв да бъде новият регламент $\mathcal{F}$, но са постигнали съгласие, че той трябва да притежава следните свойства:

1) За всяко $A \subseteq M$ точно едно от множествата A и $M \setminus A$ принадлежи на $\mathcal{F}$ (гласуването трябва винаги да дава определен резултат).
2) Ако $A \subseteq B \subseteq M$ и $A \in \mathcal{F}$, то $B \in \mathcal{F}$ (спечелвайки повече гласове, приетият закон не може да бъде отхвърлен).
3) $\varnothing \notin \mathcal{F}$ (един закон не може да бъде приет, ако всички гласуват против него).
4) За $\forall A \in 2^M$ и $\forall B \in 2^M$, ако $A \notin \mathcal{F}$ и $B \notin \mathcal{F}$, то $A \cup B \notin \mathcal{F}$ (безполезност на коалициите).

(Приемането на закони с обикновено мнозинство има първите три свойства, но не и четвъртото. Тоест именно четвъртото свойство налага промяна в начина на приемане на закони.)

Покажете, че поставените четири изисквания водят до диктатура: приемането на законите ще зависи от гласа на един-единствен депутат! По-формално: докажете, че $\exists x \in M$, такова, че $A \in \mathcal{F}$ тогава и само тогава, когато $x \in A$. **(6 точки)**

Забележка: Подразбира се, че множеството M е крайно и непразно.

Задача 4. Известен е принципът "частта е по-малка от цялото". Той обаче важи само за крайни множества. При безкрайните множества може да се случи частта да е равна на цялото. Това свойство на безкрайните множества съществено улеснява работата с тях.

Пресметнете числените стойности на двата безкрайни израза, като от всеки от тях отделите част, равна на целия израз:

а) $2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$ **(3 точки)**;

б) $6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{\cdots}}}$ **(3 точки)**

Задача 5. Докажете, че ако $x + \dfrac{1}{x}$ е цяло число за някое $x \in \mathbb{R}$, то $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ също е цяло число за всяко $n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$ **(6 точки)**

Задача 6. Равнинната фигура A се нарича *равноразложима* с равнинната фигура B, когато A може да се разреже на краен брой части, от които може после да се сглоби фигурата B. (Всяка от частите е твърдо тяло: при движение не променя нито формата, нито размерите си.) Например кръстът е равноразложим с квадрат, който има същото лице.

Покажете, че равноразложимостта е релация на еквивалентност в множеството на равнинните фигури. Пояснете разсъжденията си с чертежи. **(6 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Логическият израз $(p \to q) \to q$ е равносилен на дизюнкцията $p \vee q$. Проверка:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to q$	$p \vee q$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Еквивалентността на двата израза следва от еднаквостта на последните две колонки. (Единиците означават истина, а нулите — неистина.)

б) Разглеждаме два случая за параметъра a.

Първи случай: $a \neq 0$. Тогава уравнението $ax = 120$ има единствен корен $x = \frac{120}{a}$. Този корен принадлежи на интервала $\left[2\,;\,10\right]$ точно тогава, когато $a \in \left[12\,;\,60\right]$.

Втори случай: $a = 0$. Тогава уравнението $ax = 120$ няма реални корени, затова всичките му реални корени принадлежат на интервала $\left[2\,;\,10\right]$.

Отговор: $a \in \left\{0\right\} \cup \left[12\,;\,60\right]$.

Забележка: Вторият случай се основава на правилото, че твърдението "Всички S са P." е вярно, когато множеството от S-овете е празно, например "Всички марсианци са високи." Това правило следва от факта, че съждението "Всички S са P." може да се запише във вид на импликация: "Ако x е S, то x е P." Щом множеството от S-овете е празно, то антецедентът "x е S" е винаги неистинен, следователно импликацията е винаги вярна.

Същото може да се обоснове с помощта на теорията на множествата. Нека M е множеството от всички реални корени на уравнението $ax = 120$. В задачата се пита за кои стойности на a M е подмножество на интервала $\left[2\,;\,10\right]$. В първия случай (когато $a \neq 0$) $M = \left\{\frac{120}{a}\right\}$. Във втория случай (когато $a = 0$) $M = \varnothing \subseteq \left[2\,;\,10\right]$, затова $a = 0$ е част от отговора.

Задача 2. Добре известен факт е, че множеството $\mathbb{Q}$ на рационалните числа е изброимо, т.е. рационалните числа могат да се наредят в редица: $q_1\,,\,q_2\,,\,q_3\,\ldots$

На всяко множество A от рационални числа съпоставяме взаимноеднозначно безкрайна редица от нули и единици $a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,\ldots$ по следното правило: ако $q_n \in A$, то $a_n = 1$; ако $q_n \notin A$, то $a_n = 0$. Например на $\varnothing$ съответства редицата $000\ldots$, а на $\mathbb{Q}$ — редицата $111\ldots$

Нека A и B са две различни множества от рационални числа, а $a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,\ldots$ и $b_1\,,\,b_2\,,\,b_3\,\ldots$ са съответните им редици от нули и единици. Нека i е най-малкият индекс, за който $a_i \neq b_i$. Ако $a_i < b_i$, полагаме $A \prec B$. Ако $b_i < a_i$, полагаме $B \prec A$.

Непосредствено от дадената дефиниция следва, че релацията $\prec$ е силно антисиметрична и антирефлексивна. За да докажем, че тя е строга линейна наредба, остава да проверим, че е транзитивна. Нека $A \prec B$ и $B \prec C$. Нека i е най-малкият индекс, за който $a_i \neq b_i$; нека j е най-малкият индекс, за който $b_j \neq c_j$. Тогава $a_i < b_i$ и $b_j < c_j$; $k = \min\left\{i\,,\,j\right\}$ е най-малкият индекс, за който $a_k \neq c_k$. Редиците съдържат само нули и единици, значи $i \neq j$. Ако $i < j$, то $k = i < j$, откъдето $a_k = a_i < b_i = c_i = c_k$, следователно $a_k < c_k$. Ако $j < i$, то $k = j < i$, откъдето $a_k = a_j = b_j < c_j = c_k$, следователно $a_k < c_k$. И в двата случая $a_k < c_k$, затова $A \prec C$. Следователно релацията $\prec$ е транзитивна.

Задача 3. Да допуснем противното: че не се получава диктатура; тоест никой отделен депутат сам по себе си не е мнозинство: $\Big\{\, x \,\Big\} \notin \mathcal{F}$ за $\forall x \in M$. От правило 4 (безполезност на коалициите) следва, че $\Big\{\, x \,\Big\} \cup \Big\{\, y \,\Big\} = \Big\{\, x \,,\, y \,\Big\} \notin \mathcal{F}$ за $\forall x \in M$, $\forall y \in M$, т.е. никои двама депутати не образуват мнозинство. Пак от правило 4 следва, че никои трима депутати не образуват мнозинство: $\Big\{\, x \,,\, y \,\Big\} \cup \Big\{\, z \,\Big\} = \Big\{\, x \,,\, y \,,\, z \,\Big\} \notin \mathcal{F}$ за $\forall x \in M$, $\forall y \in M$, $\forall z \in M$. Като повторим тези еднотипни разсъждения достатъчен брой пъти, ще получим, че никое крайно множество от депутати не е мнозинство. (По същество провеждаме математическа индукция по броя на депутатите.) Понеже множеството M е крайно, то $M \notin \mathcal{F}$, т.е. дори целият парламент не е мнозинство! От правило 1 следва, че $M \setminus M = \varnothing \in \mathcal{F}$, т.е. празното множество е мнозинство! Получава се противоречие с правило 3.

В горните разсъждения правило 2 не беше използвано. Обаче противоречие може да се получи с помощта на правило 2 вместо правило 3: от $\varnothing \in \mathcal{F}$ и $\varnothing \subseteq M$ следва (по правило 2), че $M \in \mathcal{F}$, което противоречи на по-рано установеното: $M \notin \mathcal{F}$.

Забележка: Всяка фамилия $\mathcal{F}$, притежаваща свойствата 1–4, се нарича *ултрафилтър* на множеството M. Вместо "диктатура" се казва "*тривиален* ултрафилтър". По-горе всъщност доказахме, че всяко крайно множество допуска единствено тривиални ултрафилтри. Друго е положението при безкрайните множества. Например възможно е да се докаже, че съществува нетривиален ултрафилтър на множеството на естествените числа. (Доказателството е трудно и се основава на аксиомата за избора.) Самият нетривиален ултрафилтър на $\mathbb{N}$ се използва заедно с теоремата за класовете на еквивалентност при построяване на разширение $^*\mathbb{R}$ на множеството $\mathbb{R}$ на реалните числа, което разширение съдържа безкрайно малки и безкрайно големи числа. Тази конструкция е в основата на т.нар. *нестандартен математически анализ*.

Задача 4.

а) Полагаме $x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3} + \cfrac{\mathbf{1}}{\ddots}}}}$. Тогава $x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}$, откъдето $x = 2 + \dfrac{x}{3x+1}$,

т.е. $x = \dfrac{7x+2}{3x+1}$. Оттук се получава уравнението $(3x+1)x = 7x + 2$, т.е. $3x^2 - 6x - 2 = 0$, чиито корени са $1 \pm \sqrt{\dfrac{5}{3}}$. Отрицателният корен $1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ отпада, защото $x > 0$. Следователно $x = 1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

Отговор: $1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

б) Полагаме $y = 6 + \sqrt{\mathbf{6} + \sqrt{\mathbf{6} + \sqrt{\cdots}}}$ и получаваме уравнението $y = 6 + \sqrt{y}$, което след полагането $t = \sqrt{y}$ се свежда до $t^2 - t - 6 = 0$ с корени $t_1 = 3$, $t_2 = -2$. Тъй като $\sqrt{y} > 0$, то $\sqrt{y} = 3$, откъдето $y = 9$.

Отговор: 9.

Забележка: Не всеки безкраен числов израз има определена стойност. Разсъжденията по-горе са непълни: не е доказано, че двата израза изобщо имат стойности. Това става с помощта на граници, изучавани по математически анализ, което е извън тематиката на учебната дисциплина "Дискретни структури".

Задача 5. Ще използваме математическа индукция по n.

База: При $n = 1$ твърдението е вярно: $x^1 + \frac{1}{x^1}$ е цяло число, защото съвпада с $x + \frac{1}{x}$ (което е цяло число по условие).

При $n = 2$ използваме, че $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, откъдето $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$. Следователно $x^2 + \frac{1}{x^2}$ е цяло число, защото квадратът на цялото число $x + \frac{1}{x}$ е цяло число и разликата на двете цели числа $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ и 2 е цяло число.

Индуктивна стъпка: Да извършим следното умножение:

$$\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right).$$

Затова

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right).$$

Тъй като произведението и разликата на цели числа са цели числа, то ако $x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}$ и $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ са цели числа, следва, че и $x^n + \frac{1}{x^n}$ е цяло число. Остава да приложим принципа на математическата индукция във варианта "от $n-2$ и $n-1$ към n".

Задача 6. За да докажем, че равноразложимостта на равнинни фигури е релация на еквивалентност, трябва да установим, че тя е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Релацията е рефлексивна, т.е. всяка равнинна фигура е равноразложима със самата себе си, защото може да бъде разрязана по произволен начин на две части, от които след това да бъде сглобена пак същата фигура (като залепим двете части по линията на срязване).

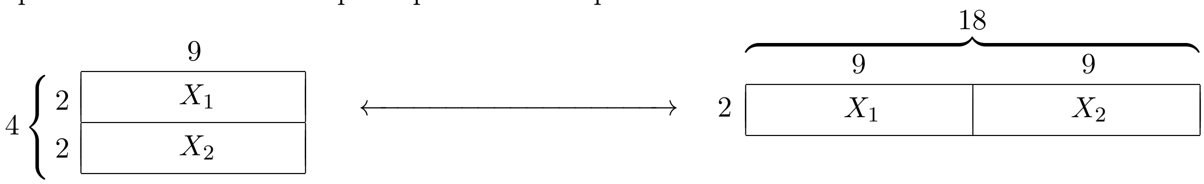
Релацията е симетрична, защото, ако фигурата A може да се разреже на части, от които да бъде сглобена фигурата B, то B може да се разреже на същите тези части и от тях може да се сглоби фигурата A.

Поради симетричността можем да казваме "фигурите A и B са равноразложими", без да уточняваме дали A е равноразложима с B, или обратно.

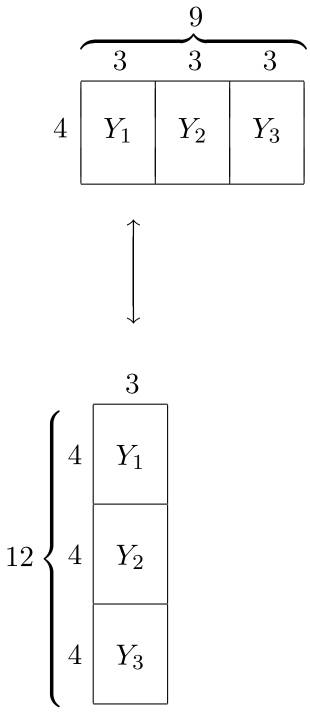
Остава да докажем, че релацията равноразложимост на равнинни фигури е транзитивна. Нека фигурите A и B са равноразложими, т.е. могат да бъдат сглобени от едни и същи части X_1 , X_2 , X_3 , … , X_m . Нека фигурите B и C също са равноразложими, т.е. могат да бъдат сглобени от едни и същи части Y_1 , Y_2 , Y_3 , … , Y_n . Налагаме двата начина на разрязване: режем B едновременно по линиите на хиксовете и игреците. По-формално: разрязваме B на части $Z_{ij} = X_i \cap Y_j$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. (Ако някое от множествата Z_{ij} е празно, не го считаме за част на B.) При сглобяването на фигурата A първо съставяме една по една фигурите X_1 , X_2 , X_3 , … , X_m : всяко X_i се сглобява от (непразните) Z_{i1} , Z_{i2} , … , Z_{in} ; след това от получените X_1 , X_2 , X_3 , … , X_m се сглобява фигурата A. Аналогично, при сглобяването на фигурата C първо съставяме Y_1 , Y_2 , Y_3 , … , Y_n : всяко Y_j се сглобява от (непразните) Z_{1j} , Z_{2j} , … , Z_{mj} ; след това от получените Y_1 , Y_2 , Y_3 , … , Y_n се сглобява фигурата C. Фигурите A и C са равноразложими, защото се състоят от едни и същи части Z_{ij} .

Пример:

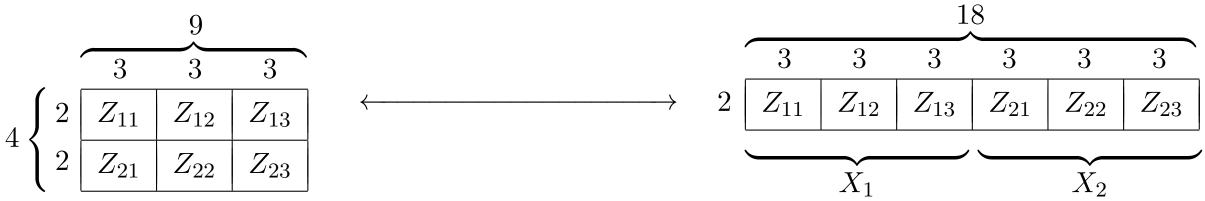
Правоъгълникът 9×4 е равноразложим с правоъгълника 2×18:

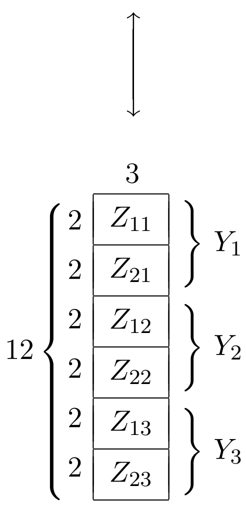


Правоъгълникът 9×4 е равноразложим също и с правоъгълника 3×12:



Като наложим двете разрязвания, получаваме по-малки части Z_{ij}:





Правоъгълниците 3×12 и 2×18 са равноразложими, тъй като се състоят от едни и същи части, а именно: Z_{11}, Z_{12}, Z_{13}, Z_{21}, Z_{22} и Z_{23}.