Интегрален критерий за суми

I. Какво представлява критерият:

Имаме асимптотично положителна функция $f(x)$, положителна от n_0 нататък и за $n > n_0$ искаме да покажем следното:

$$\sum_{i=n_0}^{n} f(i) \asymp \int_{n_0}^{n} f(x)dx$$

II. За какви функции е в сила:

Ще разгледаме само някои частни случаи, при които критерият е приложим. В действителност, той е приложим за по-широк клас от функции, но доказателството на това минава през специални функции от комплесния анализ.

Нека f е асимптотично положителна функция:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : f(n) > 0$$

Освен това ще искаме тя да е така да се каже „равномерно разпределена“ между естествени и реални числа:

$$\exists m > 0\ \exists M > 0\ \forall n \geq n_0 : m.f(n) \leq \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n)$$

Ето няколко примера:

Пример 1: $f(x) = x^2$

За всеки интервал от вида $[n, n+1]$ минимумът на f се достига в точка n и той е точно n^2, а максимумът се достига в точка $n+1$ и той е $(n+1)^2$.

Сега имаме тривиалното неравенство:

$$\forall n \geq 1: 1.n^2 \leq n^2 = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = (n+1)^2 \leq 4.n^2$$

Това е горната дефиниция с $m = 1$ и $M = 4$.

Пример 2: Изобщо за $f(x) = x^\alpha$

При $\alpha \geq 0$ имаме:

$$\forall n \geq 1: 1.n^\alpha \leq n^\alpha = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = (n+1)^\alpha \leq 2^\alpha.n^\alpha$$

При $\alpha < 0$ имаме:

$$\forall n \geq 1: 2^\alpha.n^\alpha \leq (n+1)^\alpha = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) < \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = n^\alpha \leq 1.n^\alpha$$

Пример 3: $f(x) = \alpha^x$

При $\alpha \geq 1$ имаме:

$$\forall n \geq 1 \colon 1.\alpha^n \leq \alpha^n = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = \alpha^{n+1} \leq \alpha.\alpha^n$$

При $0 < \alpha < 1$ имаме:

$$\forall n \geq 1 \colon \alpha.\alpha^n \leq \alpha^{n+1} = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) < \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = \alpha^n \leq 1.\alpha^n$$

Пример 4: $f(x) = x^x$

Това е пример за функция, която не е такава!

$$\forall n \geq 1 \colon 1.n^n \leq n^n = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = (n+1)^{n+1} \leq M.n^n$$

Такова M обаче няма, тъй като:

$$\forall M > 0\ \exists n_m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_m \colon (n+1).(n+1)^n > (n+1).n^n \geq M.n^n$$

III. Доказателство:

Да напишем отново свойствата на f:

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon f(n) > 0$

2. $\exists m > 0\ \exists M > 0\ \forall n \geq n_0 \colon m.f(n) \leq \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n)$

Нека сега $n > n_0$. Второто свойство е вярно за всички $i = n_0, n_0+1, \dots, n-1$.

Имаме:

$$m.f(i) \leq \min_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq \max_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq M.f(i)$$

Сумираме по всички такива i и получаваме:

$$m.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \min_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \max_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq M.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)$$

Двете суми в средата представляват суми на Дарбу за интервала $[n_0, n]$ и диаметър на разбиване 1.

Между тях се намира съответният интеграл:

$$m.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \min_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq \int_{n_0}^{n} f(x)dx \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \max_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq M.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)$$

Това определя, че:

$$\int_{n_0}^{n} f(x)dx = \Theta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)\right)$$

, което поради рефлексивността на Θ, може да се запише и като:

$$\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) = \Theta\left(\int_{n_0}^{n} f(x)dx\right)$$

(**Забележка**: Критерият може да се използва и в този вид! Така той дава по-добра точност на апроксимацията!)

Остава да направим прехода от сума за $n-1$ към сума за n. Имаме следното:

$$m.f(i) \le \min_{x\in[i,i+1]} f(x) \le f(i+1) \le \max_{x\in[i,i+1]} f(x) \le M.f(i)$$

Отново сумираме по $i = n_0, \dots, n-1$, след което прибавяме положителното $f(n_0)$:

$$m.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \le \sum_{i=n_0+1}^{n} f(i) \le M.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \le m.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) + f(n_0) \le \sum_{i=n_0}^{n} f(i) \le M.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) + f(n_0) \le (M+1).\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)$$

Което пък определя, че:

$$\sum_{i=n_0}^{n} f(i) = \Theta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)\right)$$

Сега от транзитивността на Θ имаме:

$$\sum_{i=n_0}^{n} f(i) = \Theta\left(\int_{n_0}^{n} f(x)dx\right)$$

IV. Приложения:

Пример 1:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \asymp \ln n$$

Тази сума е за функция от вида x^{α}, а за нея вече видяхме, че са изпълнени исканите свойства.

В случая $\alpha = -1$ и имаме:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta\left(\int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx = \ln n\right)$$

Пример 2:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \asymp \sqrt{n}$$

Тази сума е за $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = \Theta\left(\int_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{n} - 2\right) = \Theta(\sqrt{n})$$

Пример 3:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \asymp 1$$

Тази сума е за $f(x) = x^{-2}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \Theta\left(\int_{1}^{n} \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{n}\right) = \Theta(1)$$

Изобщо, за x^{α} имаме:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} = \Theta\left(\int_{1}^{n} x^{\alpha} dx\right) = \begin{cases} \Theta(n^{\alpha+1}) & , \alpha > -1 \\ \Theta(\ln n) & , \alpha = -1 \\ \Theta(1) & , \alpha < -1 \end{cases}$$

Пример 4:

$$\sum_{i=1}^{n} \ln i \asymp n \ln n$$

Функцията $\ln x$ е положителна за $n \geq 2$. Тъй като $\ln 1 = 0$, то първият сумант може да се пропусне. Да разгледаме дали са изпълнени исканите свойства:

$\ln x$ е растяща функция, така че за всеки интервал от вида $[n, n+1]$:

$$\min_{x \in [n,n+1]} \ln x = \ln n\,, \qquad \max_{x \in [n,n+1]} \ln x = \ln(n+1)$$

Освен това $\ln(n+1) < \ln n^2 = 2 \ln n$ за всяко $n \geq 2$, така че:

$$\forall n \geq 2 \colon \ln n \leq \ln n = \min_{x \in [n,n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n,n+1]} f(x) = \ln(n+1) \leq 2 \ln n$$

Сега прилагаме критерия и получаваме:

$$\sum_{i=2}^{n} \ln i = \Theta\left(\int_{2}^{n} \ln x \, dx = \left. x \ln x - x \, \right]_{2}^{n}\right) = \Theta(n \ln n)$$

По този начин може да се докаже и че $\ln n! \asymp n \ln n$, тъй като сумата от ляво представялва точно $\ln n!$:

$$\sum_{i=2}^{n} \ln i = \ln 2 + \ln 3 + \ \dots + \ln n = \ln n!$$

Пример 5:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln i}{i} \asymp \ln^2 n$$

Функцията $\frac{\ln x}{x}$ е положителна за $n \geq 2$. Отново ще пропуснем първия сумант и ще разгледаме исканите свойства:

$\frac{\ln x}{x}$ е намаляваща функция за $n \geq 2$, така че за всеки интервал от вида $[n, n+1]$:

$$\min_{x \in [n,n+1]} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)}, \qquad \max_{x \in [n,n+1]} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln n}{n}$$

Освен това за всяко $n \geq 2$ имаме:

$$\frac{\ln n}{2n} \leq \frac{\ln n}{(n+1)} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)}$$

В такъв случай:

$$\forall n \geq 2 \colon \frac{\ln n}{2n} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)} = \min_{x \in [n,n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n,n+1]} f(x) = \frac{\ln n}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$$

Сега прилагаме критерия и получаваме:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\ln i}{i} = \Theta\left(\int_{2}^{n} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x \Big]_{2}^{n}\right) = \Theta(\ln^2 n)$$

Пример 6: Да се намери сложността по време на следния фрагмент:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) for (int j = i; j <= n; j+=i)
     for (int k = 1; k <= n; k += j) printf("a");
```

За удобство ще апроксимираме $\Theta(g)$ със $c.g$, където c е подходяща положителна константа.

Времето, за което се изпълняват циклите може да се изрази със сумата:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i,j=j+i}^{n} \sum_{k=1,k=k+j}^{n} 1 \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i,j=j+i}^{n} \frac{n}{j} \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\frac{n}{i}} \frac{n}{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} \sum_{j=1}^{\frac{n}{i}} \frac{1}{j} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} c.\ln\frac{n}{i} =$$

$$= c.n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}(\ln n - \ln i) = c.n\ln n.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - c.n\sum_{i=1}^{n}\frac{\ln i}{i} \approx c.n.d.\ln^2 n - c.n.e.\ln^2 n = \Theta(n\ln^2 n)$$

Пример 7: Да се намери сложността по време на следния фрагмент:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) for (int j = 1; j <= n; j+=i)
     for (int k = 1; k <= n; k += j) printf("a");
```

Времето, за което се изпълняват циклите може да се изрази със сумата:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,j=j+i}^{n} \sum_{k=1,k=k+j}^{n} 1 \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,j=j+i}^{n} \frac{n}{j}$$

Да разгледаме следната сума:

$$\sum_{j=1,j=j+i}^{n} \frac{n}{j} = n + \frac{n}{1+i} + \frac{n}{1+2i} + \ldots + \frac{n}{1+\left\lfloor\frac{n-1}{i}\right\rfloor i}$$

От интегралния критерий имаме:

$$\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \ldots + \frac{1}{1+\left\lfloor\frac{n-1}{i}\right\rfloor i} \asymp \int_{1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{i}\right\rfloor} \frac{1}{1+xi} dx = \frac{1}{i}\ln(1+xi)\Big]_{1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{i}\right\rfloor} \approx \frac{\ln n}{i} - \frac{\ln(1+i)}{i}$$

В такъв случай:

$$\sum_{j=1, j=j+i}^{n} \frac{n}{j} \approx n + \frac{n \ln n}{i} - \frac{n \ln(1+i)}{i}$$

Сега:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j=j+i}^{n} \frac{n}{j} \approx \sum_{i=1}^{n} n + \frac{n \ln n}{i} - \frac{n \ln(1+i)}{i} \asymp n^2 + n \ln^2 n \asymp n^2$$