Домашно № 2 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, I поток, летен семестър на 2015/2016 уч. г. в СУ, ФМИ

Домашната работа се дава на преподавателя в началото на лекцията на 27. април 2016 г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Общо
получени точки							
максимум точки	*6*	*6*	*6*	*6*	*6*	*6*	*36*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Докажете, че има цяло положително число, което се дели на 2016 и се записва само с нули и единици (в десетичната бройна система).

Задача 2. От правилен шестоъгълник със страна 1 са избрани четири точки по произволен начин. Докажете, че разстоянието между някои две от избраните точки е по-малко от 1,8.

Задача 3. По колко различни начина можем да оцветим стените на куб с шест дадени цвята? Всяка стена трябва да бъде оцветена в един цвят; различните стени — в различни цветове. Две оцветявания се смятат за еднакви, ако се получават едно от друго чрез въртене на куба. Огледалните образи се смятат за различни оцветявания.

Задача 4. Колко четирицифрени числа не се делят на никое едноцифрено число освен на 1 ?

Задача 5. По колко начина тридесет и две карти за игра могат да бъдат разпределени между четирима играчи (например на белот)? Изчислете отговора докрай!

Задача 6. Докажете, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$ за всяко цяло положително число n.

БОНУС: Задача 6 може да се реши поне по три начина, съществено различни един от друг. Опитайте се да намерите повече от едно решение. Всяко решение, основано на различна идея, носи нови 6 точки. Максимален бонус: 12 точки. Максимален резултат по тази задача: 18 точки.

РЕШЕНИЯ

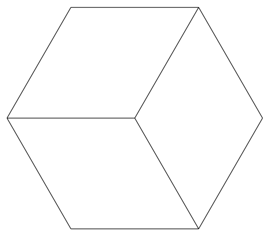
Задача 1. Да разгледаме следното множество от 2017 цели положителни числа:
$a_1 = 1, \quad a_2 = 11, \quad a_3 = 111, \quad \ldots \quad , \quad a_{2017} = \underbrace{111\ldots1}_{\substack{2017\\ \text{единици}}}$ (числото a_n се състои от n единици).

При деление на 2016 се получават само 2016 различни остатъка (а именно: 0, 1, 2, … , 2015), тоест по-малко на брой от числата a_n. От принципа на Дирихле следва, че поне две от числата (да ги означим с a_n и a_m, където $n > m$) дават един и същ остатък при деление на 2016. Следователно тяхната разлика

$$a_n - a_m = \underbrace{11111...11111}_{n-m\ \text{единици}}\underbrace{00000...00000}_{m\ \text{нули}}$$

се дели на 2016 и е цяло положително число, записано само с нули и единици.

Задача 2.



Свързваме центъра на правилния шестоъгълник с три от върховете му, взети през един. Така разделяме шестоъгълника на три еднакви ромба със страна 1 и ъгли 60° и 120°. От принципа на Дирихле следва, че поне две от четирите точки ще попаднат в един и същи ромб. Тогава разстоянието между тези две точки не надвишава дължината на по-големия диагонал на ромба, която е равна на $\sqrt{3} < 1,8$.

Задача 3 може да се реши по различни начини.

Първи начин: с помощта на правилото за умножение.

Без ограничение можем да смятаме, че горната стена на куба е боядисана в цвят № 1 (защото винаги можем да завъртим куба така, че стената с цвят № 1 да дойде отгоре). При това положение за срещуположната (долната) стена има пет възможни цвята.

Околните стени на куба са боядисани в останалите четири цвята. Да изберем някой от тях и да го означим с цвят № 2. Отново не е ограничение да смятаме, че предната стена е с цвят № 2 (в противен случай завъртаме куба около вертикалната му ос така, че околната стена с цвят № 2 да дойде отпред).

Повече не можем да въртим куба, защото сме фиксирали горната и предната стена. Вече са избрани цветовете на горната, долната и предната стена. За дясната стена остават три цвята, от които избираме един. За лявата стена остават два цвята; от тях избираме един. За задната стена остава един цвят (единственият неизползван до момента).

Според правилото за умножение има $1 \,.\, 5 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 30$ различни оцветявания на куба.

Втори начин: с помощта на правилото за деление.

Ако за миг забраним въртенето на куба, т.е. фиксираме положенията на шестте му стени, кубът може да бъде оцветен по $P_6 = 6! = 720$ начина, защото всяко оцветяване представлява пермутация на шестте цвята по стените на куба.

Сега нека отново започнем да въртим куба. По колко начина можем да го завъртим? Оста на въртене можем да изберем по три начина (x, y, z). Двата края на избраната ос могат да си разменят местата; това удвоява броя на възможностите (дотук $3 \,.\, 2 = 6$ възможности). Около избраната ос кубът може да се завърти на четири различни ъгъла (0° , 90° , 180° , 270°). В крайна сметка има $6 \,.\, 4 = 24$ начина за завъртане на куба.

Затова на всяко оцветяване на куба съответстват 24 пермутации. Следователно броят на различните оцветявания е $720 \ : \ 24 = 30$.

Отговор: Кубът може да бъде оцветен по 30 различни начина.

Задача 4. Четирицифрените числа (1000, 1001, 1002, ... , 9999) са девет хиляди на брой. Да означим с A_n множеството на четирицифрените числа, които се делят на n. Ще потърсим формула за техния брой $|A_n|$.

Броят на числата от 1 до 9999, които се делят на n, е равен на $\left\lfloor \dfrac{9999}{n} \right\rfloor$.

Броят на числата от 1 до 999, които се делят на n, е равен на $\left\lfloor \dfrac{999}{n} \right\rfloor$.

Следователно $|A_n| = \left\lfloor \dfrac{9999}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{999}{n} \right\rfloor$.

Според принципа за включване и изключване

$$
\begin{aligned}
&|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = \\
&\qquad |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| \\
&\qquad - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| \\
&\qquad + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\
&\qquad - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|.
\end{aligned}
$$

Следователно

$$
\begin{aligned}
&|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = \\
&\qquad |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| \\
&\qquad - |A_6| - |A_{10}| - |A_{14}| - |A_{15}| - |A_{21}| - |A_{35}| \\
&\qquad + |A_{30}| + |A_{42}| + |A_{70}| + |A_{105}| \\
&\qquad - |A_{210}|.
\end{aligned}
$$

От формулата за броя на елементите, изведена по-горе, намираме

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{9999}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 4999 - 499 = 4500, \qquad |A_3| = \left\lfloor \frac{9999}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 3333 - 333 = 3000,$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{9999}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor = 1999 - 199 = 1800, \qquad |A_7| = \left\lfloor \frac{9999}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{7} \right\rfloor = 1428 - 142 = 1286,$$

$$|A_6| = \left\lfloor \frac{9999}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 1666 - 166 = 1500, \qquad |A_{10}| = \left\lfloor \frac{9999}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor = 999 - 99 = 900,$$

$$|A_{14}| = \left\lfloor \frac{9999}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{14} \right\rfloor = 714 - 71 = 643, \qquad |A_{15}| = \left\lfloor \frac{9999}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{15} \right\rfloor = 666 - 66 = 600,$$

$$|A_{21}| = \left\lfloor \frac{9999}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{21} \right\rfloor = 476 - 47 = 429, \qquad |A_{35}| = \left\lfloor \frac{9999}{35} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{35} \right\rfloor = 285 - 28 = 257,$$

$$|A_{30}| = \left\lfloor \frac{9999}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor = 333 - 33 = 300, \qquad |A_{42}| = \left\lfloor \frac{9999}{42} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{42} \right\rfloor = 238 - 23 = 215,$$

$$|A_{70}| = \left\lfloor \frac{9999}{70} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{70} \right\rfloor = 142 - 14 = 128, \qquad |A_{105}| = \left\lfloor \frac{9999}{105} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{105} \right\rfloor = 95 - 9 = 86,$$

$$|A_{210}| = \left\lfloor \frac{9999}{210} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{210} \right\rfloor = 47 - 4 = 43.$$

Заместваме пресметнатите мощности в израза, получен от принципа за включване и изключване:

$$\left| A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \right| = \begin{aligned} & 4500 + 3000 + 1800 + 1286 \\ & - 1500 - 900 - 643 - 600 - 429 - 257 \\ & + 300 + 215 + 128 + 86 \\ & - 43\,. \end{aligned}$$

Като извършим действията, намираме, че

$\left| A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \right| = 6943,$

тоест има 6943 четирицифрени числа, които се делят на 2 или на 3, или на 5, или на 7. Останалите $9000 - 6943 = 2057$ четирицифрени числа не се делят нито на 2, нито на 3, нито на 5, нито на 7, значи не се делят и на другите едноцифрени числа (освен на 1).

Отговор: Има точно 2057 четирицифрени числа, които не се делят на никое едноцифрено число освен на единица.

Задача 5. Първият играч получава осем карти от тридесет и две. Раздаването се извършва без повторение (защото една и съща карта не може да бъде дадена два пъти в едно раздаване). Редът на картите няма значение (например все едно е дали играчът е получил първо дама пика, после седмица купа, или обратно). Следователно имаме комбинации без повторение. Броят им е равен на C_{32}^{8}.

На втория играч се падат осем от останалите двадесет и четири карти; това може да стане по C_{24}^{8} начина.

Третият играч тегли осем от оставащите шестнадесет карти, за което има C_{16}^{8} начина.

Четвъртият играч получава останалите осем карти (т.е. за него остава само един вариант).

Прилагаме правилото за умножение: броят на всички варианти за раздаване на картите е равен на

$$C_{32}^{8} \cdot C_{24}^{8} \cdot C_{16}^{8} = \frac{32!\ \ \cancel{24!}\ \ \cancel{16!}}{8!\ \cancel{24!}\ 8!\ \cancel{16!}\ 8!\ 8!} = \frac{32!}{8!\ 8!\ 8!\ 8!}\,.$$

Съкращаваме всички множители в знаменателя и остава произведение от цели числа. След като извършим умноженията, получаваме $99\ 561\ 092\ 450\ 391\ 000$, което е търсеният брой.

Задача 6 може да се реши по различни начини.

Първи начин: с помощта на биекция.

Нека $A = \left\{ 1\,,\, 2\,,\, 3\,,\, \ldots\,,\, n \right\}$. Знаем, че всички подмножества на A са 2^n на брой, а $\binom{n}{k}$ е броят на k-елементните подмножества на A. Следователно сборът

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \binom{n}{8} + \ldots$$

е тъкмо броят на онези подмножества на A, които имат четен брой елементи. Трябва да покажем, че броят на тези подмножества е 2^{n-1}, т.е. половината от 2^n. За целта построяваме биекция между подмножествата с четен брой елементи и подмножествата с нечетен брой елементи: на всяко подмножество X с четен брой елементи съпоставяме подмножество Y с нечетен брой елементи по следната формула: $Y = X \cup \{n\}$, ако $n \notin X$; $Y = X \setminus \{n\}$, ако $n \in X$. Изображението е биекция, защото всяко Y с нечетен брой елементи има единствен първообраз X с четен брой елементи: $X = Y \cup \{n\}$, ако $n \notin Y$; $X = Y \setminus \{n\}$, ако $n \in Y$.

Втори начин: чрез формулата за Нютоновия бином:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 + \ldots + \binom{n}{n} x^n.$$

Заместваме x с $+1$ и -1 и получаваме съответно:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n},$$

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \ldots + \binom{n}{n}(-1)^n.$$

Събираме двете равенства и унищожаваме членовете с противоположни знаци:

$$2^n = 2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \ldots$$

След деление на две получаваме:

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$$

Дясната страна е сборът, който трябва да пресметнем. Лявата страна е неговата стойност.

Трети начин: с помощта на равенството $\binom{n}{0} = 1$ и комбинаторното тъждество $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, по което се строи триъгълникът на Паскал. Тогава

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots =$$

$$= 1 + \left\{ \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right\} + \left\{ \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4} \right\} + \ldots =$$

$$= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4} + \ldots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}.$$

Последното равенство е друго известно комбинаторно тъждество: броят на всички подмножества на $(n-1)$-елементно множество (лявата страна) е равен на 2^{n-1} (дясната страна).