Домашно № 3 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, летен семестър на 2015/2016 уч. г. в СУ, ФМИ

Домашната работа се дава на асистента в началото на упражнението на 25 – 26 май 2016 г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*9*	*9*	*6*	*6+6*	*36*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Постройте биекция $f : \left\{ 1 , 2 , 3 , \ldots \right\} \to \left\{ 1 , 2 , 3 , \ldots \right\}$ със следното свойство: за всяко цяло положително число n сборът $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$ да се дели на n.

Задача 2. В турнир, провеждан по системата на елиминациите, участват n играчи. В началото на турнира се тегли жребий за реда на провеждане на срещите. Ако a_n е броят на различните изходи от тегленето на жребия, намерете a_n като функция на n.

Например $a_1 = 1$, защото при един играч има само един начин за протичане на турнира: не се провеждат никакви срещи, а единственият претендент става шампион.

При двама играчи също има само един начин за провеждане на турнира $\bigl($т.е. $a_2 = 1\bigr)$: двамата играят един срещу друг и победителят става шампион.

При трима играчи има три начина за провеждане на турнира $\bigl($т.е. $a_3 = 3\bigr)$: $\Bigl\{ \{ x , y \} , z \Bigr\}$, $\Bigl\{ \{ y , z \} , x \Bigr\}$, $\Bigl\{ \{ z , x \} , y \Bigr\}$. Например записът $\Bigl\{ \{ x , y \} , z \Bigr\}$ означава, че първо x и y играят един срещу друг, после победителят играе със z. Записът $\Bigl\{ \{ y , x \} , z \Bigr\}$ има същия смисъл като $\Bigl\{ \{ x , y \} , z \Bigr\}$.

При четирима играчи има петнадесет начина за провеждане на турнира $\bigl($т.е. $a_4 = 15\bigr)$:

$$\Bigl\{ \bigl\{ \{ x , y \} , z \bigr\} , t \Bigr\} , \Bigl\{ \bigl\{ \{ x , y \} , t \bigr\} , z \Bigr\} , \Bigl\{ \bigl\{ \{ x , z \} , y \bigr\} , t \Bigr\} ,$$
$$\Bigl\{ \bigl\{ \{ x , z \} , t \bigr\} , y \Bigr\} , \Bigl\{ \bigl\{ \{ x , t \} , y \bigr\} , z \Bigr\} , \Bigl\{ \bigl\{ \{ x , t \} , z \bigr\} , y \Bigr\} ,$$
$$\Bigl\{ \bigl\{ \{ y , z \} , x \bigr\} , t \Bigr\} , \Bigl\{ \bigl\{ \{ y , z \} , t \bigr\} , x \Bigr\} , \Bigl\{ \bigl\{ \{ y , t \} , x \bigr\} , z \Bigr\} ,$$
$$\Bigl\{ \bigl\{ \{ y , t \} , z \bigr\} , x \Bigr\} , \Bigl\{ \bigl\{ \{ z , t \} , x \bigr\} , y \Bigr\} , \Bigl\{ \bigl\{ \{ z , t \} , y \bigr\} , x \Bigr\} ,$$
$$\Bigl\{ \{ x , y \} , \{ z , t \} \Bigr\} , \Bigl\{ \{ x , z \} , \{ y , t \} \Bigr\} , \Bigl\{ \{ x , t \} , \{ y , z \} \Bigr\} .$$

Получава се редицата $1 , 1 , 3 , 15 \ldots$ Търси се формула за общия член.

Упътване: Най-напред съставете (с обосновка) рекурентно уравнение за редицата. После решете уравнението, за да получите формула за общия член.

Задача 3. Разглеждаме следната функция, програмирана на езика C:

```
unsigned int f(unsigned int n)
{
    unsigned int a = 4;
    for (unsigned int k = 1; k <= n; k++)
        a = 3 * a + 2;
    return a;
}
```

Намерете явна формула за върнатата стойност `f(n)`.

Упътване: Да означим с $\mathtt{a}_{\mathtt{k}}$ стойността на променливата `a` след `k`-тата итерация на цикъла ($\mathtt{a}_0$ е началната стойност). Трасирайте програмния код и намерете $\mathtt{a}_{\mathtt{k}}$ за някои `k`, например за `k` $=0, 1, 2, 3$. Съставете и решете подходящо рекурентно уравнение за редицата $\mathtt{a}_{\mathtt{k}}$.

Задача 4. За всяка от следните редици да се намери явна формула за общия член:

а) $a_{n+1} = \sqrt[3]{4\,(a_n)^3 + 129}$ за всяко цяло $n \geq 0$, $a_0 = 5$; **(6 точки)**

б) $b_{n+1} = 6\,(b_n)^7$ за всяко цяло $n \geq 0$, $b_0 = 36$. **(6 точки)**

Упътване: Използвайте подходящи полагания.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Желаната биекция се построява стъпка по стъпка.

Най-напред полагаме $f(1) = 1$. Очевидно $f(1)$ се дели на 1.

По-нататък: нека вече сме определили стойностите $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(2n-1)$ така, че $f(1)+f(2)$ се дели на 2, $f(1)+f(2)+f(3)$ се дели на 3, $\ldots$, $f(1)+f(2)+\ldots+f(2n-1)$ се дели на $2n-1$. Ще дефинираме $f(2n)$ и $f(2n+1)$ така, че $f(1)+f(2)+\ \ldots\ +f(2n-1)+f(2n)$ да се дели на $2n$ и $f(1)+f(2)+\ \ldots\ +f(2n-1)+f(2n)+f(2n+1)$ да се дели на $2n+1$.

Нека k е най-малкото цяло положително число, неизползвано до момента, тоест
$k = \min\Big\{\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\ \Big\} \Big\backslash \Big\{\ f(1)\ ,\ f(2)\ ,\ f(3)\ ,\ \ldots\ ,\ f(2n-1)\ \Big\}.$

Полагаме $f(2n) = 2nk + 2n(2n+1)c - f(1) - f(2) - \ \ldots\ - f(2n-1)$, $f(2n+1) = k$, където c е цяло число, чиято стойност ще бъде уточнена след малко. Тогава
$f(1)+f(2)+\ \ldots\ +f(2n-1)+f(2n) = 2nk + 2n(2n+1)c = 2n\Big(k+(2n+1)c\Big)$ се дели на $2n$, защото числото $k+(2n+1)c$ е цяло. Аналогично,
$f(1)+f(2)+\ \ldots\ +f(2n-1)+f(2n)+f(2n+1) = 2nk+2n(2n+1)c+k = (2n+1)(k+2nc)$ се дели на $2n+1$, защото числото $k+2nc$ е цяло.

Числото $f(2n+1) = k$ по определение е цяло положително и различно от числата $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$, $f(2n-1)$.

Числото $f(2n) = 2nk + 2n(2n+1)c - f(1) - f(2) - \ \ldots\ - f(2n-1)$ е цяло за всяко цяло c; а ще бъде положително и по-голямо от числата $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$, $f(2n-1)$ и k, стига c да е достатъчно голямо. Избираме най-малкото такова c.

От избора на k и c е ясно, че f приема само цели положителни стойности и че числата $f(2n)$ и $f(2n+1)$ са различни помежду си и от $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$, $f(2n-1)$. Следователно стойностите на функцията f са две по две различни, т.е. f е инекция.

От равенството $f(2n+1) = k$ следва, че най-малкото неизползвано до момента цяло положително число k расте с увеличаването на n. Следователно всяко цяло положително число ще бъде използвано рано или късно, т.е. функцията f е сюрекция.

Щом f е инекция и сюрекция, то f е биекция.

Задача 2. За $n-1$ играчи има общо a_{n-1} варианта. Да изберем по произволен начин един от тези варианти. По колко начина можем да добавим n-ти играч към избрания вариант?

В избрания вариант има $n-1$ "реални" играчи — участниците в турнира. За да остане един шампион, трябва да бъдат елиминирани $n-2$ играчи, т.е. трябва да бъдат проведени $n-2$ игри. Оттук получаваме още $n-2$ "играчи стойности" — победителите в игрите (разбира се, те са някои от "реалните" играчи). Това прави общо $(n-1)+(n-2) = 2n-3$ места, на които може да бъде добавен новият, n-тият играч: той може да играе с някой от старите $n-1$ играчи, преди последният да е играл изобщо (дотук има $n-1$ възможности), или може да играе с победителя от някоя от всичките $n-2$ срещи (това са още $n-2$ възможности).

П р и м е р : Нека $n = 4$. От всеки вариант за трима играчи, да кажем $\Big\{\ \{\ x\ ,\ y\ \}\ ,\ z\ \Big\}$, се получават $2n-3 = 5$ варианта за четирима играчи, защото новият, четвъртият играч t може да бъде вмъкнат на пет различни места:

— Играчът t може да играе с x, y или z, преди те да са играли с другиго. Това дава три нови варианта: $\Big\{\ \{\ \{\ x\ ,\ t\ \}\ ,\ y\ \}\ ,\ z\ \Big\}$, $\Big\{\ \{\ x\ ,\ \{\ y\ ,\ t\ \}\ \}\ ,\ z\ \Big\}$, $\Big\{\ \{\ x\ ,\ y\ \}\ ,\ \{\ z\ ,\ t\ \}\ \Big\}$.

— Играчът t може да играе с победителя от някоя от двете игри, което дава още два нови варианта: $\Big\{\ \{\ \{\ x\ ,\ y\ \}\ ,\ t\ \}\ ,\ z\ \Big\}$, $\Big\{\ \{\ \{\ x\ ,\ y\ \}\ ,\ z\ \}\ ,\ t\ \Big\}$.

И така, всеки вариант за провеждане на турнир с $n-1$ играчи поражда $2n-3$ варианта за турнир с n играчи. При това, всеки от новите варианти се поражда от единствен стар вариант, а именно от стария вариант, който се получава, като изключим новия играч.

П р и м е р : Нека $n=4$ и новият играч е t. Тогава вариантът за четирима играчи $\Big\{ \{ \{ x , y \} , t \} , z \Big\}$ се получава единствено от варианта за трима играчи $\Big\{ \{ x , y \} , z \Big\}$.

Доказахме, че всеки вариант за $n-1$ играчи поражда $2n-3$ варианта за n играчи, а всеки вариант за n играчи се поражда от единствен вариант за $n-1$ играчи. Следователно $a_n = (2n-3)\, a_{n-1}$ за всяко естествено $n > 1$. Развиваме полученото рекурентно уравнение:

$$
\begin{aligned}
a_n &= (2n-3)\, a_{n-1} = (2n-3)(2n-5)\, a_{n-2} = (2n-3)(2n-5)(2n-7)\, a_{n-3} = \\
&= (2n-3)(2n-5)(2n-7)\ \ldots\ a_4 = (2n-3)(2n-5)(2n-7)\ \ldots\ 5 \,.\, a_3 = \\
&= (2n-3)(2n-5)(2n-7)\ \ldots\ 5 \,.\, 3 \,.\, a_2 = (2n-3)(2n-5)(2n-7)\ \ldots\ 5 \,.\, 3 \,.\, 1.
\end{aligned}
$$

Значи $a_n = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7\ \ldots\ (2n-3)$ е произведението на първите $n-1$ нечетни числа. (При $n=1$ произведението съдържа нула множителя, т.е. то е празно, а празното произведение се приема за равно на единица, т.е. $a_1 = 1$.) Формулата може да се запише и по още един, еквивалентен начин. За целта умножаваме и делим с четните числа $2 , 4 , 6 , 8 , \ldots , 2n-2$:

$$
a_n = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4\ \ldots\ (2n-3) \,.\, (2n-2)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8\ \ldots\ (2n-2)} = \frac{(2n-2)!}{(2 \,.\, 1) \,.\, (2 \,.\, 2) \,.\, (2 \,.\, 3)\ \ldots\ (2 \,.\, (n-1))} \ , \quad \text{т.е.}
$$

$$
a_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\ 2^{n-1}} \,.
$$

Отговор: $a_n = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7\ \ldots\ (2n-3) = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\ 2^{n-1}}$.

Задача 3. Да означим с $\mathtt{a}_\mathtt{k}$ стойността на променливата `a` след `k`-тата итерация на цикъла ($\mathtt{a}_0$ е началната стойност). Трасираме програмния код и получаваме първите няколко стойности от редицата $\mathtt{a}_\mathtt{k}$:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathtt{a}_\mathtt{k}$	4	14	44	134	404	1214	3644

Както се вижда от инструкцията в тялото на цикъла, тази редица удовлетворява нехомогенното линейно-рекурентно уравнение $\mathtt{a}_\mathtt{k} = 3\,\mathtt{a}_{\mathtt{k-1}} + 2$. С помощта на характеристично уравнение намираме $\mathtt{a}_\mathtt{k} = C_1 \,.\, 3^\mathtt{k} + C_2$. От $\mathtt{a}_0 = 4$ и $\mathtt{a}_1 = 14$ се получава системата

$$
\left|\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 4 \\ 3C_1 + C_2 &= 14 \end{aligned}\right.
$$

с единствено решение $C_1 = 5$, $C_2 = -1$. Затова $\mathtt{a}_\mathtt{k} = 5 \,.\, 3^\mathtt{k} - 1$ за всяко цяло $\mathtt{k} \geq 0$.

От условието за край на цикъла се вижда, че функцията `f` връща стойността
$\mathtt{f(n)} = \mathtt{a}_\mathtt{n} = 5 \,.\, 3^\mathtt{n} - 1$.

Забележка: Разсъждения като проведените по-горе се използват често за оптимизиране на алгоритми. Формулата $\mathtt{f(n)} = 5 \,.\, 3^\mathtt{n} - 1$ представлява алгоритъм за изчисляване на `f(n)`, който връща същата стойност като първоначалния алгоритъм, но по-бързо (с по-малък брой аритметични операции).

Задача 4.

а) Уравнението $a_{n+1} = \sqrt[3]{4\,(a_n)^3 + 129}$ е равносилно на $\left(a_{n+1}\right)^3 = 4\,(a_n)^3 + 129$. Полагаме $(a_n)^3 = d_n$ и уравнението приема вида $d_{n+1} = 4d_n + 129$ с начално условие $d_0 = 125$. Това линейно-рекурентно уравнение се решава с помощта на характеристично уравнение: $x^{n+1} = 4x^n$, откъдето (при $x \neq 0$) се получава $x = 4$, тоест мултимножеството $\left\{ 4 \right\}_M$. Свободният член $129 = 129n^0 1^n$ поражда мултимножеството $\left\{ 1 \right\}_M$. Обединяваме двете мултимножества: $\left\{ 4\,;\,1 \right\}_M$. Следователно $d_n = C_1\,.\,4^n + C_2$.

От $d_0 = 125$ и $d_{n+1} = 4d_n + 129$ пресмятаме $d_1 = 4\,.\,125 + 129 = 629$. След това заместваме $n = 0$ и $n = 1$ във формулата $d_n = C_1\,.\,4^n + C_2$ и получаваме следната система:

$$\left|\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & 125 \\ 4C_1 + C_2 & = & 629 \end{array}\right.$$

Решението на тази система е $C_1 = 168$, $C_2 = -43$. Следователно $d_n = 168\,.\,4^n - 43$. От $(a_n)^3 = d_n$ следва, че $a_n = \sqrt[3]{d_n} = \sqrt[3]{168\,.\,4^n - 43}$.

Отговор: $a_n = \sqrt[3]{168\,.\,4^n - 43}$.

б) Пресмятаме първите няколко члена на редицата: $b_0 = 36 = 6^2$, $b_1 = 6\,.\,\left(6^2\right)^7 = 6^{15}$ и т.н. Удобно е полагането $b_n = 6^{p_n}$. Това полагане е допустимо, защото $b_n > 0$ за всяко $n \geq 0$ (което се доказва чрез математическа индукция). Получава се редицата $p_0 = 2$, $p_1 = 15 \ldots$ Уравнението $b_{n+1} = 6\,(b_n)^7$ приема вида $p_{n+1} = 7p_n + 1$. Чрез характеристично уравнение намираме мултимножеството $\left\{ 7\,;\,1 \right\}_M$, откъдето $p_n = C_1\,.\,7^n + C_2$. Заместваме $n = 0$ и $n = 1$ и получаваме системата

$$\left|\begin{array}{rcl} C_1 + C_2 & = & 2 \\ 7C_1 + C_2 & = & 15 \end{array}\right.$$

Решението на тази система е $C_1 = \dfrac{13}{6}$, $C_2 = -\dfrac{1}{6}\cdot$ Следователно $p_n = \dfrac{13\,.\,7^n - 1}{6}\cdot$ От формулата $b_n = 6^{p_n}$ намираме отговора на задачата.

Отговор: $b_n = \sqrt[6]{6^{13\,.\,7^n - 1}}$.