Домашно № 4 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, летен семестър на 2015/2016 уч. г. в СУ, ФМИ

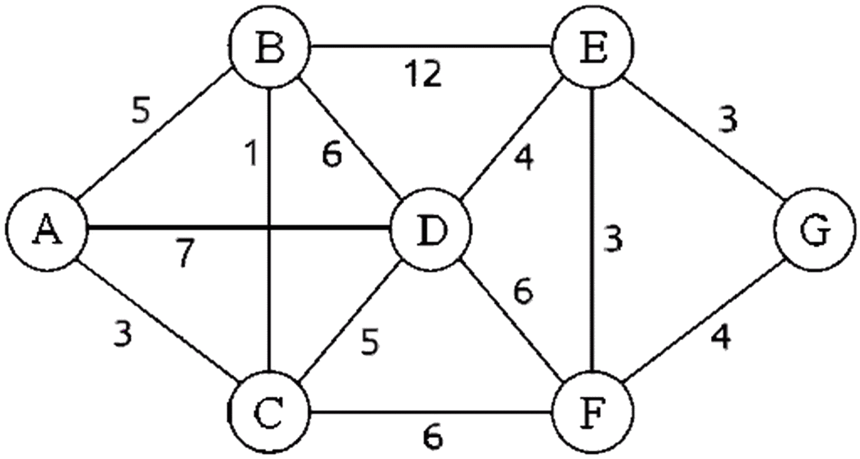
Домашната работа се дава на асистента в началото на упражнението на 1 – 2 юни 2016 г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	Общо
получени точки						
максимум точки	*8*	*6*	*8*	*8*	*6*	*36*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Идентични решения ще се анулират!*



Навсякъде, където се иска построяване на дърво, трябва да бъде направен чертеж на дървото и трябва да бъде описан редът на присъединяване на ребрата на дървото.

Задача 1. Постройте минимално покриващо дърво и пресметнете теглото му:

а) по алгоритъма на Крускал; **(4 точки)**

б) по алгоритъма на Прим—Ярник, пуснат от върха A. **(4 точки)**

Задача 2. Постройте дърво на най-късите пътища от върха A до всички други върхове. Кой алгоритъм използвахте? **(6 точки)**

Задача 3. Намерете върховото и ребровото хроматично число на графа. **(8 точки)**

Задача 4. Съществува ли в дадения граф:

а) хамилтонов цикъл; **(2 точки)**

б) хамилтонов път; **(2 точки)**

в) затворена ойлерова верига; **(2 точки)**

г) отворена ойлерова верига? **(2 точки)**

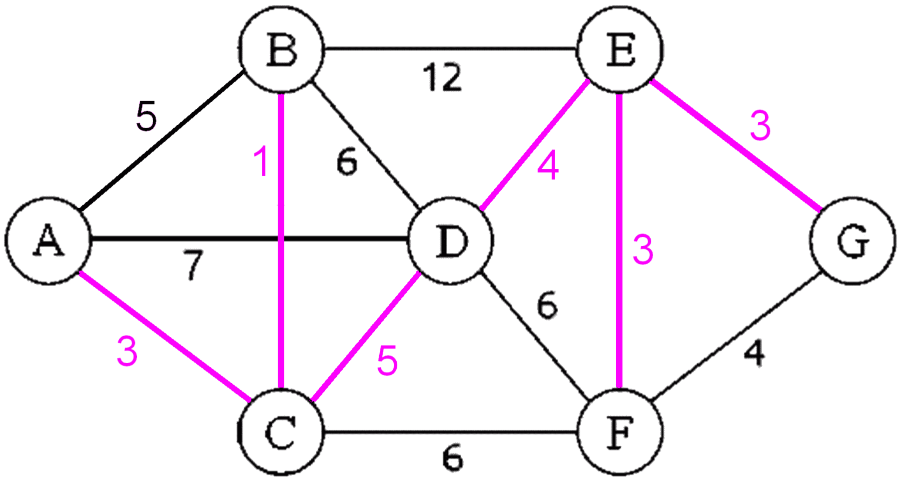
Задача 5. Докажете, че даденият граф е планарен. **(2 точки)**
Най-малко колко ребра трябва да се добавят, та графът да стане непланарен? **(4 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1. В задачата се иска да построим минимално покриващо дърво.

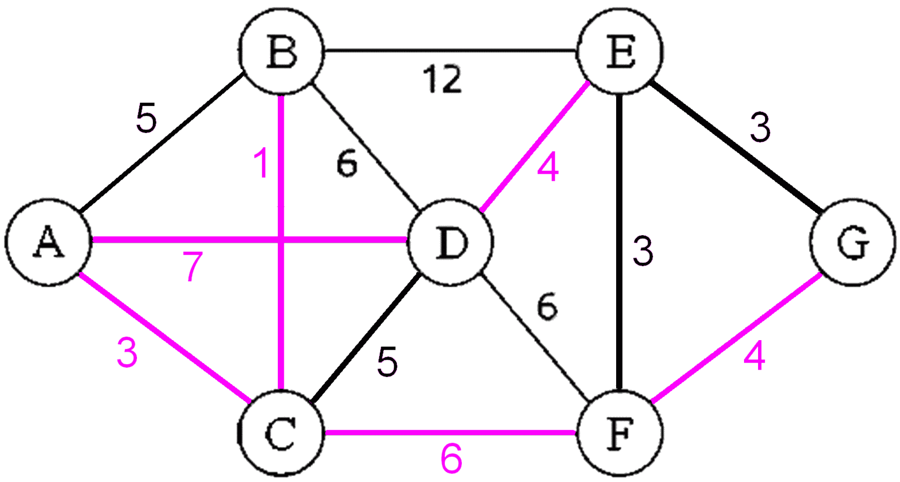
а) Прилагаме алгоритъма на Крускал. Подреждаме ребрата на графа по тегло:
$BC(1), AC(3), EF(3), EG(3), DE(4), FG(4), AB(5), CD(5), BD(6), CF(6), DF(6), AD(7), BE(12)$.
Взимаме последователно всяко ребро, което не затваря цикъл, започвайки от най-лекото:
$BC(1), AC(3), EF(3), EG(3), DE(4), \cancel{FG(4)}, \cancel{AB(5)}, CD(5), \cancel{BD(6)}, \cancel{CF(6)}, \cancel{DF(6)}, \cancel{AD(7)}, \cancel{BE(12)}$.
(Задраскани са ребрата, които затварят цикъл.)

Получава се минимално покриващо дърво с тегло 19 (ребрата му са оцветени в розово).



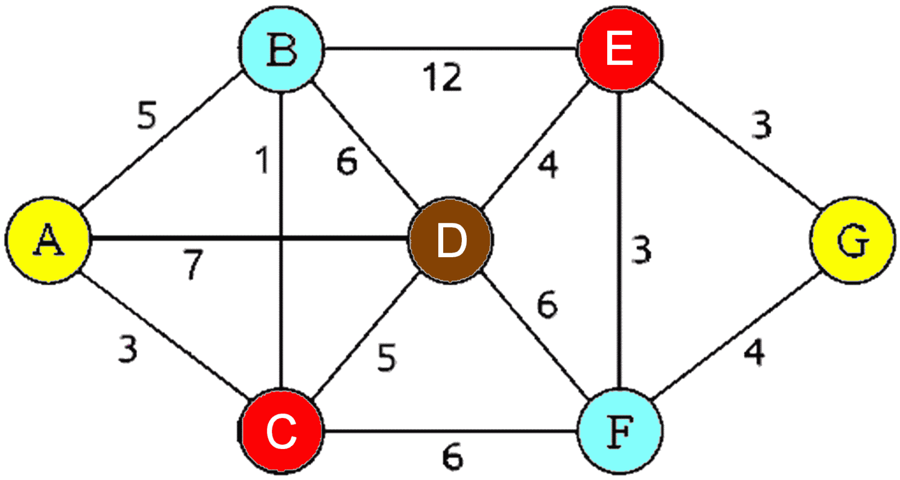
б) По алгоритъма на Прим—Ярник, пуснат от върха A, се получава същото минимално покриващо дърво. Ребрата се присъединяват към дървото в следния ред:
AC, CB, CD, DE, EF, EG или AC, CB, CD, DE, EG, EF.

Задача 2. Дърво на най-късите пътища от върха A до всички други върхове се построява чрез алгоритъма на Дейкстра.



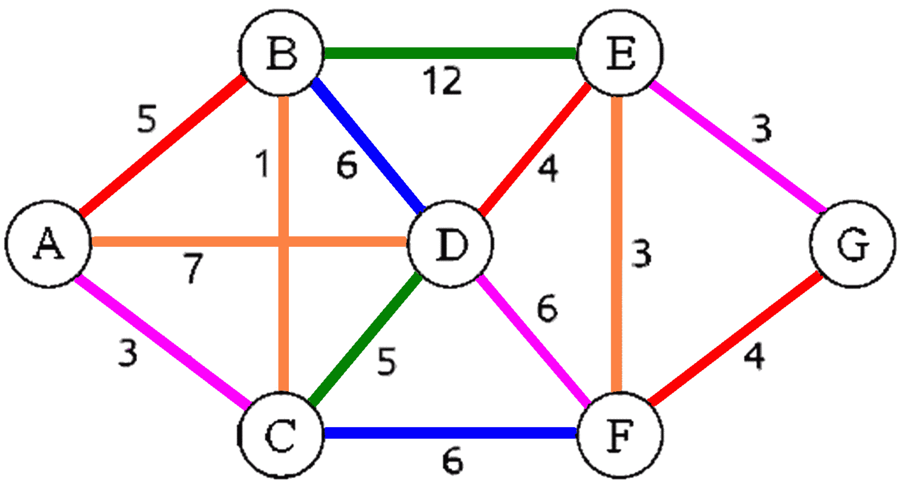
Ребрата се присъединяват към дървото в следния ред: AC, CB, AD, CF, DE, FG
(ребрата на дървото са оцветени в розово).

Задача 3. Върховете A, B, C и D образуват клика, т.е. всеки два от тях са свързани с ребро. Следователно за оцветяването на върховете на графа са нужни поне четири цвята (за да няма свързани едноцветни върхове). От друга страна, четири цвята са достатъчни, както показва следният пример:



Извод: Върховото хроматично число на графа е равно на 4.

Върхът D е от степен 5, затова са необходими поне пет цвята за оцветяването на ребрата така, че да няма едноцветни ребра с общ връх. Следният пример показва, че пет цвята са достатъчни:



Извод: Ребровото хроматично число на графа е равно на 5.

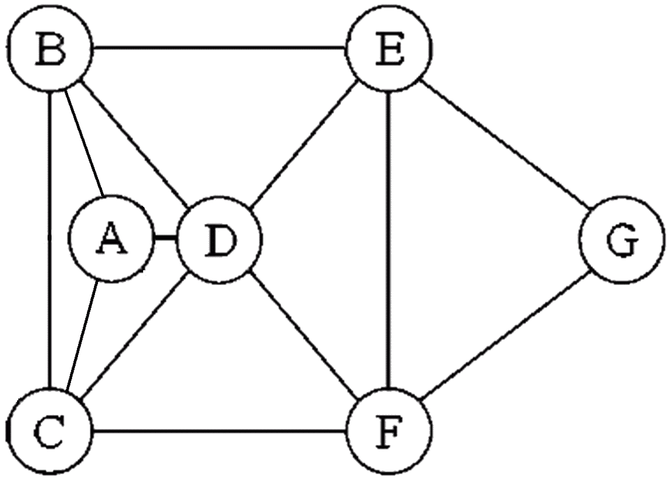
Задача 4.

а) Съществува хамилтонов цикъл, например $ABEGFCDA$.

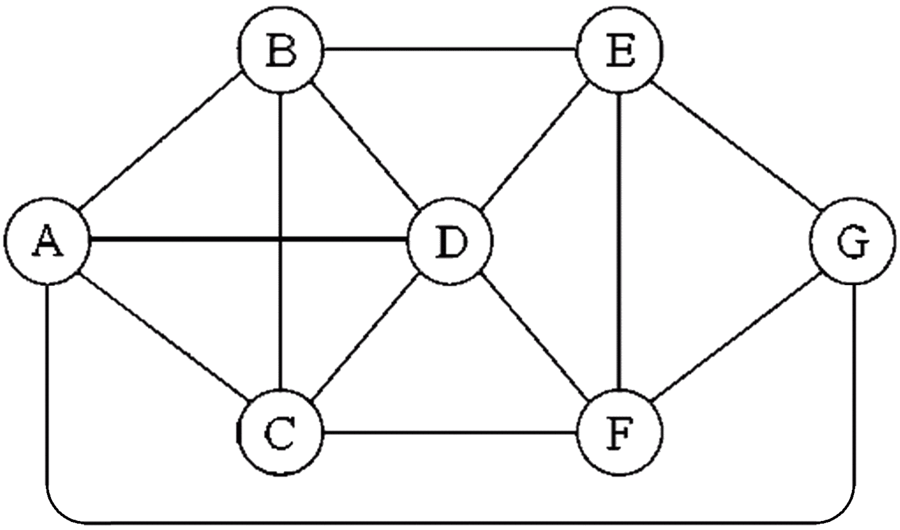
б) Съществува хамилтонов път, например $ABEGFCD$.

в) , г) Понеже графът е свързан и има точно два върха от нечетна степен (A и D), то има отворена ойлерова верига, например $ABCADBEDCFEGFD$, но няма затворена.

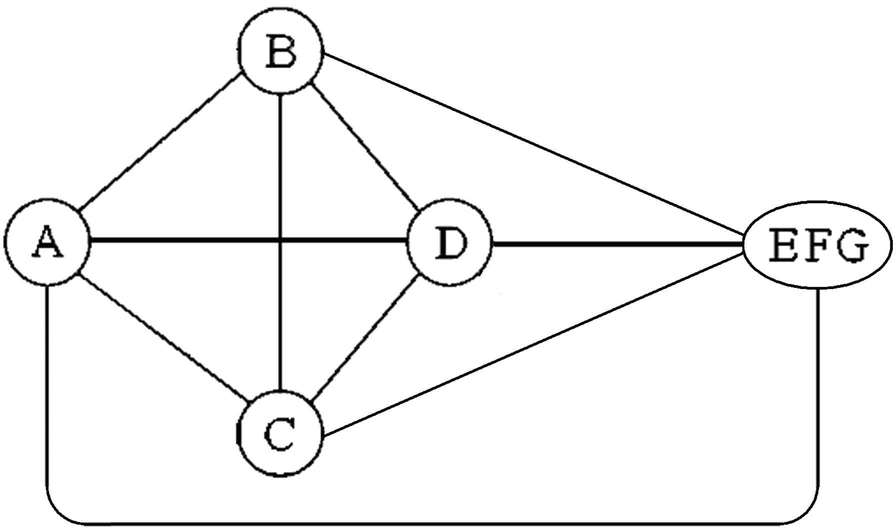
Задача 5. Въпреки че ребрата AD и BC се пресичат, графът все пак е планарен, защото може да бъде начертан без пресичане на ребрата, стига върхът A да бъде поставен в $\triangle BCD$.



За да стане графът непланарен, достатъчно е да добавим едно ребро, например AG.



Че новият граф е непланарен, се доказва така: сливаме върховете E, F и G в един връх EFG.



Така опростеният граф е изоморфен на K_5 и затова е непланарен. Следователно е непланарен и предишният граф (със седемте върха и добавеното ребро AG).