

Работа в клас

Парадокс на Ръсел $R = \{x | x \notin X\}$; ? $R \in R$

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{ако } e(e) \text{ - прог. завършва} \\ 0 & \text{- иначе} \end{cases}$$

$R(\mathbb{N}) \rightarrow \{0,1\}$ - неизобр.

// есть super-Turing computability.

λ -апарат

$\lambda_x(e(x)) \rightarrow$ конструктор на ф-я

$f(e) \rightarrow$ прилагане на ф-та с арг. e

(2/3/11 Записи в Moodle)

Конструктивни / неконстр. док-ва

- изчислимост / неизчисл. (ф-и на ест. числа)
- тоталност / частичност $\rightarrow$ в макс. на Тюринг. $\rightarrow$ важно да има част. ф-и
 $\downarrow$
 $\forall x \in \text{Dom } f(x) \text{ е деф. } (\forall x \in D \exists y \in R: (x,y) \in G)$
 $f(x) = y \Leftrightarrow (x,y) \in X \times Y$
 $f(x) \cong y$
 $\hookrightarrow$ условно равно (ако десния няма аргумент - число) не дефинира

- разрешимост + неразрешимост

св-во $\rightarrow P(\mathbb{N}) \rightarrow 0,1$. Който има това св-во - това е подлин.
 $\forall$ предикат $P \rightarrow A_P$, $n \in A_P \Leftrightarrow P(n)=1$
 $\hookrightarrow$ за които имахме тотална изчисл. ф-я

- полуразрешимо

A е 1/2 разрешима, ако ф-та χ_A е изчислима, където

$$\chi_A(n) \cong 1 \text{ ако } n \in A \text{ и не е деф. ако } n \notin A$$

(м-во от програми $K \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{ако зав.} \\ 0, & \text{ако не} \end{cases}$) е 1/2 разреш.

$\downarrow$
 (допълнение на това м-во.
 $\hookrightarrow$ не е 1/2 разр.

$$\left\{ \begin{array}{l} A - 1/2 \text{ разр.} \\ \bar{A} - 1/2 \text{ разр.} \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ е разр.}$$

1/2 раз
K
100%

Неразр
K

само if и for $\rightarrow$ т.е с фиксиран брой стъпки.
- ама само при рекурсивен език
 $\downarrow$
while

- примитивна рекурсия:

$$\begin{aligned} O(n) &= 0 & \text{са П.Р.} & = 0 \\ S(n) &= n+1 & & ++ \end{aligned}$$

$P_k(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow q_k$ - взимане на k-т арг. // възможност за прам.

$$R(x_1 \dots x_k) = f(g_1(x_1 \dots x_k), g_2(x_1 \dots x_k)) \dots$$

$\rightarrow$ блок с действия

rec- функция

$$f(0, x_1 \dots x_n) = g(x_1 \dots x_n)$$

$$f(k+1, x_1 \dots x_n) = h(k, x_1 \dots x_n, f(k, x_1 \dots x_n))$$

$\rightarrow$ тук е още

$$h(k, x_1 \dots x_n, f(k, x_1 \dots x_n))$$

$\approx$ като функция

$$2^x, x^2, 2^{2^2} \dots$$

$\left. \begin{array}{l} 2^x, x^2, 2^{2^2} \end{array} \right\} \text{хотят}$

- ф-я на Ачерман не може да се сметне така

- <примитивна рекурсия> + <неогр. търсене>

$\parallel$
визуализирани ф-и

- Доказателство:

~ проверка за коректност - разрешима

~ Начиране на док-во - 1/2 разрешимо

~ реално число е изчислимо, когато може да му кажем
всички бит при поискване
(т.е. може да го сметнем с произволна)
точност

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако в } \pi \text{ има } n \text{ поредни } 7\text{-ци} \\ 0, & \text{ако в } \pi \text{ няма } n \text{ поредни } 7\text{-ци} \end{cases}$$

програма $f(x)$ е изчислима

~ $\forall n$ в π има n поредни 7-ци $\rightarrow$ const. 1

$\exists n$ такова, че в π няма n 7-ци $\rightarrow$ и това е изчислимо

$\Rightarrow f(x)$ е изчислима, но не знаем как.

$\uparrow \Rightarrow$ горното е неконструктивно док-во.

- конструктивно - казваме как да построим f -та.

Други неконструктивни:

- Теорема:

$((\exists a, b \text{ не са рационални, } a^b \text{ е рационално.})$
 $\rightarrow$ ~~не може~~ не са комплексни

$\sim \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ е рационално - ОК.

$\sim$ ако $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$
 $\parallel (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \rightarrow$ ОК, рац.

Теорема

- ~~Ф~~ Нека имаме бар, който н-то от хората сме означили
с B . Нека $D(x)$ значи (x тие) за $x \in B$.

Тогава има човек z в бара такъв, че ако z тие, то всички
в бара тият.

- Ако $\forall x \in B \ D(x)$ е вярно $\Rightarrow$ избираме произволно - ОК

- Ако $\exists x \in B$ - който не тие $\Rightarrow$ взимаме него, ОК.

~~###~~

Конструктивни док-ва:

Теорема за непрекъснатост:

ако x е компактно н-во и f е оператор в н-то то
 $\exists y: f(y) = y$ $\parallel$ ако f е непрек. оператор

$\uparrow$ от там възникват констр. док-ва

интуитивистическа логика

$\rightarrow$ ~~ако~~ ~~маха~~ или a е вярно, или не a е вярно $\Rightarrow$
 $\rightarrow$ ~~ако~~ ~~маха~~ + неконструктивни док-ва $\Rightarrow$

λ -смятане

1) λ - н-во от λ -термове

$\left\{ \begin{array}{l} \text{да допуснем, че имаме н-во } V \text{ от изброените на} \\ \text{брой прачетеливи } x, y, z, \dots \end{array} \right.$

- 1) ако $x \in V \Rightarrow x \in \lambda$ -терм
- 2) ако M и N са λ -терми, то $\lambda M(N)$ е λ -терм
(прилагане на ф-та M над арг. N)
- 3) Ако M е λ -терм, x пром., то $\lambda x.M$ е λ -терм
(~~създаване на ф-а~~ конструктор на ф-и)

$\lambda x.X \rightarrow$ взема x , връща X

$\lambda x.Y \rightarrow$ константа

$(X, Y) \rightarrow$ взем x и приложи към y

$\lambda x.\lambda y.Y \rightarrow$ ф-а, която връща идентитет
 $\rightarrow$ проекция

$(X, X) \rightarrow x$ рекурсия.

- може да пропускаме верижните шевки

$((M, N), P) \rightarrow$ идентитет MNP

$\lambda x.\lambda y.M \rightarrow \lambda_{xy} M$

Свободни променливи

$\hookrightarrow$ нека M е λ -терм.

Свободни променливи:

1) $M = x \rightarrow x$

2) $(M, N) \rightarrow$ своб. пром. на M + своб. пром. на N

3) на $\lambda x.M \rightarrow$ своб. пром. на $M - \{x\}$

$\lambda x.X \rightarrow \emptyset$

$\lambda x.Y \rightarrow y$

Ако $M \in \lambda$ наричаме канонизатор, ако M няма
(свободни променливи)

Свързани променливи:

Нека $M \in \lambda$. Свързани променливи:

1) $M = x \rightarrow \emptyset$

2) $(M, N) \rightarrow \text{bnd}(M) \cup \text{bnd}(N)$

3) $\lambda x.M \rightarrow \text{bnd}(M) \cup \{x\}$

От конкретното име на вид нищо не зависи.

Субституция:

Нека M и N са термове, x -променлива

$$M \downarrow_N^x$$

1) M -променлива

$$1.1) M = x \Rightarrow x \downarrow_N^x = N$$

$$1.2) M = y \neq x \Rightarrow M \downarrow_N^x = M$$

$$2) (M, N) \downarrow_T^x \rightarrow (M \downarrow_N^x, N \downarrow_T^x)$$

3) ~~$\lambda x M$~~ M е абстракция

$$M = \lambda y M'$$

$$(\lambda x M) \downarrow_T^x = \lambda x M$$

$$(\lambda y M') \downarrow_N^x = \lambda y M' \downarrow_N^x$$

└

Коректна субституция:

⟨проверка
опять⟩

Определена субституция наричаме коректна, ако

|| 0/3:1

$\text{Free}(M)$ не се пресичат с $\text{bnd}(N)$

Работа в клас

$$\hookrightarrow \lambda x y \downarrow_x^x = \lambda x x \rightarrow \text{това не е коректно}$$

0/3:1) Бенджамин Пирс - types and computer languages

Книга

2) Basic Proof theory

⟨деф. изведе, че $M \downarrow_N^x$ е коректна, ако имаме $\text{bnd}(M) \cap \text{Free}(N) = \emptyset$

⟨Конвенция - всеки път когато правим субст. в M преименуваме свързаните пром. така, че да осигурим условието за кор. субст.

$$\lambda x y \downarrow_x^y \rightarrow \lambda z x$$

$$\lambda x y x \downarrow_x^y \rightarrow \lambda z y z \downarrow_x^y \not\rightarrow \lambda z x z$$

0/3:1) Да се дефинира формално операция M_x^y , която замества всички свързани срещания на x в M с y
└
вотре е свободна, вън - свързана → проблем.

α -еквивалентност.

~~Реле~~ транзитивно $\rightarrow C \in (R)$
 симетр.
 рефлексивно

1) M е α -ев. на N , ако $M \downarrow_N^x \equiv N$ ($\exists$ такава x и y)

2) M е α -ев. на M ($M \downarrow_M^x \equiv M$)

3) Ако M α -ев. на N , то N α -ев. на M

4) M α -ев. N и N α -ев. $P \Rightarrow M \equiv P$

$(\lambda x X$ е един клас на ев. по $\equiv$
 $\rightarrow$ класове на ев. по коректа релация.

(ОЗ. 1) Док. че ако $M, N \in$
 - ако M и N са λ -терми, x -прим
 $\exists M' \equiv M$ така, че $M' \downarrow_N^x$ е коректна
 - ако

фотография
на телесфери

(3) Реализираните на някакъв език операцията
 коректна субституция

$\rightarrow \lambda$ -терми, λ -терми, прим. - да преименува
 $\rightarrow$ по някакъв начин да създ. λ -терми.

4) Да се докаже, че 2-те деф. на субст. са еквивалентни

$\rightarrow$ искаме веднага да не се пресичат

деф.; а след това искаме да не се прес. (визуално)

$\rightarrow$ т.е. когато са дефинирани, съвпадат.

ако $M \downarrow_N^x$ е коректна, то 2-те субст. дават идент. рез.

$\rightarrow$ покажете пример за случай, когато 1-та субст. е дефинирана, а 2-та не е коректна
 ($\rightarrow$ може не коректна)

$(\lambda x M)(N) \equiv M \downarrow_N^x \leftarrow$ прилагане на функцията.
 Тази субст. да е коректна

$(\lambda x \lambda y X Y)(Y) = \lambda z Y Z$

прива да преименуване свързаната прим.

→ Лема:

Нека имаме λ -терми M, N - термине, $x \notin \text{Free}(M)$
 $M \stackrel{x}{\downarrow} N \Rightarrow$ те имаме същата терм.

доказ-во:

Утвърждава по деф. на M :

1) ако $M \equiv x \Rightarrow x \in \text{Free}(M) \Rightarrow$ не ни е от случая
 ако $M \equiv y$ — ОК
 $\neq x$

2) ако $M \in (M_1, M_2)$ по и.п. M_1 и M_2 не се сменят
 (3-то $x \notin \text{Var Free } M$)

~~$M[x \rightarrow N]$~~
 3) $M = \lambda_x M'$
 $(\lambda_x M') [x \rightarrow N] = \lambda_x M'$

$M = \lambda_y M'$
 $(\lambda_y M') [x \rightarrow N]$

$\parallel$
 $\lambda_y (M' [x \rightarrow N])$

$\downarrow$ по и.п. M' отива в M' и $x \notin \text{Free } M' \Rightarrow$ ОК.
 ↑ тук първо
 ще преименуваме

Лема (за сублиституцията):

Нека M, N и P са λ -термове, $x \neq y$ са прам.

Ако $M[x \rightarrow N][y \rightarrow P] = M[y \rightarrow P][x \rightarrow N \stackrel{y}{\downarrow} P]$

е вярно, ако $x \notin \text{Var Free}(P)$

ОЗ: 1) даме пример, в който $x \in \text{Free}(P)$ и Лемата е фалшива

1) M е променлива:

— $M = x \Rightarrow M[x \rightarrow N][y \rightarrow P] \equiv N[y \rightarrow P]$
 $M[y \rightarrow P][x \rightarrow N \stackrel{y}{\downarrow} P] = N[y \rightarrow P] \Rightarrow$ ОК.

— $M = y \Rightarrow M[x \rightarrow N][y \rightarrow P] = P$
 $y[y \rightarrow P][x \rightarrow N \stackrel{y}{\downarrow} P] = P[x \rightarrow N \stackrel{y}{\downarrow} P] = P$ от предната лема.

— $M \neq x$
 $\neq y \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Z[x \rightarrow N][y \rightarrow P] = Z \\ Z[y \rightarrow P][x \rightarrow \dots] = Z \end{array} \right\} \Rightarrow$ ОК

$$2) M = M_1 M_2$$

По и.п. знаем, че $M_1[x \rightarrow N][y \rightarrow P] = M_1[y \rightarrow P][x \rightarrow N]$

$$M[x \rightarrow N][y \rightarrow P] = (M_1[x \rightarrow N][y \rightarrow P] M_2[x \rightarrow N][y \rightarrow P]) =$$

$$= (M_1[y \rightarrow P][x \rightarrow N] M_2[x \rightarrow P][x \rightarrow N])$$

$$= (M_1 M_2)[y \rightarrow P][x \rightarrow N], \text{ ok}$$

$$3) \lambda_x M'[x \rightarrow N][y \rightarrow P] = \lambda_x M'[x \rightarrow N][y \rightarrow P] =$$

$$= \lambda_x M'[y \rightarrow P] \rightarrow \text{по лемата отгоре} =$$

λ_y - аналогично

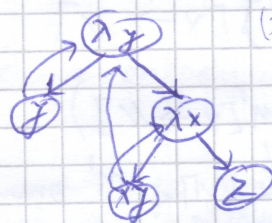
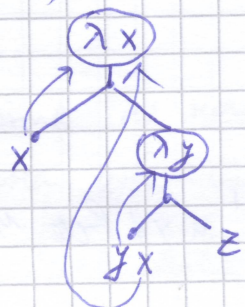
$$\lambda_z M'[x \rightarrow N][y \rightarrow P] = \lambda_z (M'[x \rightarrow N][y \rightarrow P]) =$$

$$= \lambda_z (M'[y \rightarrow P][x \rightarrow N]) = \lambda_z M'[y \rightarrow P][x \rightarrow N]$$

$$= \lambda_x (\lambda_y (\lambda_z (y x) z))$$

$$\lambda_x (x (\lambda_y (y x) z))$$

$$\lambda_y (y (\lambda_x (x y) z))$$



2 терма $\equiv$ когато "дърветата" са изоморфни.

$\rightarrow$ ако искаме да се отървем от имената - може за всички λ -какви скоба колкото е свързана да пазим.

$$\lambda 0 \lambda 1 (1 0)$$

идея на де Бройл:

{ За $n \in \mathbb{N}$ деф. λn -и-во от тези термове с не повече от n свободни променливи

$\hookrightarrow$ езикът се състои от $(,), \lambda, \mathbb{N} \hookrightarrow x$ променливи.

λn - всички свободни променливи в него са номера $\{0, 1, \dots, n-1\}$

- Ако $M \in \lambda_n$ и $N \in \lambda_n \Rightarrow MN \in \lambda_n$

- Ако $M \in \lambda_{n+1}$, то $\lambda M \in \lambda_n$

λ_0

Примери

$$\lambda x X \rightarrow \lambda 0$$

$$\lambda x y \rightarrow \lambda 1, \lambda 2, \dots, \quad k \neq 0$$

$$\lambda x, y X = \lambda \lambda 1$$

$$\lambda x y y = \lambda \lambda 0$$

Тв: $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$

$$\lambda^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

$\hookrightarrow \lambda_n \Rightarrow$ разлика ми y макс. число $\#$ и $\#$ ланџи пред n е $e \leq n-1$

$$1) \lambda(\lambda_0(\lambda_1)20)1)$$

$$2) \lambda x X(\lambda y y(xz(\lambda x y x z)))$$

$$\lambda(\lambda_0(\lambda_1)20)1)$$

$$\lambda x(\lambda y(\lambda z y) x z)$$

$$\lambda x X(\lambda y y(xz(\lambda x y x z)))$$

$$- \lambda_0(\lambda_0(12(\lambda 102)))$$

(@/3:1) програма, правена предвр.)

$$\lambda(\lambda_0)(\lambda_1) \rightarrow \lambda x(\lambda y y)(\lambda z x)$$

$$\lambda x, y, z X(y, z) = \lambda x \lambda y \lambda z x y z = \lambda \lambda \lambda 2 10$$

$$\lambda(\lambda_0((\lambda 1)2)0)1)$$

$$\lambda x(\lambda y(y((\lambda z y)z)y))$$

$\hookrightarrow$ ако разлика ми y макс. е =
 $\uparrow$
 (2/3:1) били
 свест-прим. са равен

→ $\approx$ stack за λ -di
 → ограничава ни в кол м-во свободни пром. може да издирате

- Контекст $\neq$ наричаме краен списък от $\neq$ променливи от V .

- Нека $\Gamma = x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0$

доказваме Γ (dom Γ) - м-во от тези пром.

- Ако $x_i \in \text{dom } \Gamma$ индекс на x
 За $x_i \in \text{dom } \Gamma$ казваме, че i е индекс на x в Γ

(2/3:1) да се дефинират ф-те

addNames (Γ) - взима терм с max пром. номерирани
 $\downarrow$ с числа $0 \dots N-1$
 → да дефинира терм в именното λ -смятане така, че
 x_i да е името на свобод. променлива с индекс i .

- erase Names
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 → за да отложим тамде → за
 → всички термове в λ смятането със свободни
 променливи в Γ

- да се докаже, че ако вземем терм и изтрием му
 имената и пак ги добавим в същ. контекст
 $\downarrow$ → ще получим същия терм.
 и обратното

→ + да го реализираме

Субституция в безименни термове

$\downarrow$
 $0 \leq k < m$
 $\forall c$

ex $\lambda 5 \lambda 6 \lambda 7$

Работа в клас

↑ Субституция при горните

[Операция увеличаване с d от с натамък
 $\Lambda_n \rightarrow$ с n свобод. пром., ще отиде в Λ_{n+d}

$\lambda \uparrow_c^d$ (1) $k \in [0 \dots c] \Rightarrow k$
 $k > c \Rightarrow k+d$
 (2) $(M N) \uparrow_c^d = (M \uparrow_c^d) (N \uparrow_c^d)$
 (3) $(\lambda M) \uparrow_c^d = \lambda M \uparrow_{c+1}^d$

$\uparrow^d = \uparrow_0^d$

- Субституция на безименни термове

Нека ~~M~~ M и N са от Λ^* и нека K е променлива
ще дефинираме $M[K \rightarrow N]$

$$1) K[K \rightarrow N] = N$$

$$2) I[K \rightarrow N] = I, I \neq K$$

$$3) (M_1 M_2)[K \rightarrow N] = (M_1[K \rightarrow N])(M_2[K \rightarrow N])$$

$$4) (\lambda M')[K \rightarrow N] = \lambda (M'[K \rightarrow N])$$

$$\lambda (M'[K \rightarrow N])$$

Д/З: 1) NB - да се докаже, че субституциите са
составящи.

~~I е ако Γ е контекст от имена~~

Нека M е λ -терм, Γ -контекст от имена, $\Gamma \ni \text{Free}(M)$

Док, че $M \neq I$

$\Gamma \ni \text{Free}(N)$
 $\Gamma \ni \{x\}$

$$\text{add } M$$

$$\text{removeNames}(M)[\text{index}(x) \rightarrow \text{removeNames}(N)] \stackrel{\alpha}{=}$$

$$\stackrel{\alpha}{=} \underbrace{(M[x \rightarrow N])}_{\text{removeNames}}$$

(Конвергенция - когато размениваме термове $M_1, \dots, M_n$ в един
и същ контекст считаме, че всички свързани променливи
са $\neq$ от всички свободни променливи.
(за да няма проблем с заместване)

B-редукция

Деф B-редукция ($\xrightarrow{B}$) - релация над Λ -термове.

1) Ако M, N са λ -термове, то

$$(\lambda_x M) N \xrightarrow{B} M[x \rightarrow N]$$

2) Ако M, N и P са λ -термове и $M \xrightarrow{B} N$, то

$$MP \xrightarrow{B} NP, PM \xrightarrow{B} PN, \lambda_x M \xrightarrow{B} \lambda_x N$$

($\downarrow$ замества началото дърво на
 λ -термовете)

- множественная β -редукция

$M \xRightarrow{\beta}$ как рефл. и транзитивное замк. на β

1) $M \xRightarrow{\beta} M$

2) $M \xRightarrow{\beta} N \Rightarrow M \xRightarrow{\beta} N$

3) $M \xRightarrow{\beta} N$ и $N \xRightarrow{\beta} P$, то $M \xRightarrow{\beta} P$

$$(\lambda x. \lambda y. y) (\lambda z. z) \xrightarrow{\beta} \lambda x. z$$

$$(\lambda y. y) (z) = z$$

=

Знач β -равенство.

рефл., симметр. и транзитивное замкательство на $M \xRightarrow{\beta}$

- $M \xRightarrow{\beta} M$ за $M \in \Lambda$

- Если $M \xRightarrow{\beta} N$, то $M \xRightarrow{\beta} N$

- Если $M \xRightarrow{\beta} N$, то $N \xRightarrow{\beta} M$

- Если $M \xRightarrow{\beta} N$ и $N \xRightarrow{\beta} P$, то $M \xRightarrow{\beta} P$

Def 1 $(I \rightarrow \lambda x. x)$ - идентификатор

$(K \lambda x. y x)$ - проекция

$(S \lambda x. \lambda y. z (x z) (y z))$

$I K \xRightarrow{\beta} (\lambda x. x) (\lambda x. y x) \xRightarrow{\beta} \lambda x. y x \xRightarrow{\beta} K$

$K I \xRightarrow{\beta} (\lambda x. y x) (\lambda x. x) \xRightarrow{\beta} (\lambda y. y (\lambda x. x)) \xRightarrow{\beta} K^*$
 $\downarrow$
 норм

$SKK = I$
 SKS

$$(\lambda x. y z (x z) (y z)) (\lambda x. y x) (\lambda x. y x) =$$

$$= (\lambda y. z (\lambda x. y x z) (y z)) (\lambda x. y x) = (\lambda z. (\lambda x. y x z) (\lambda x. y x z))$$

$$\quad \quad \quad \lambda z (\lambda y (\lambda x. y x z) z) =$$

$$= \lambda z (\lambda y (y z z))$$

$$SKK = (\lambda x y z (x z) (y z)) (z \lambda y x)$$

$$SKS = \lambda x$$

$$\begin{aligned} SK &= (\lambda x y z (x z) (y z)) (\lambda x y x) = \\ &= \lambda y z (\lambda x y x) (y z) = (\lambda y z (\lambda y y/z)) = (\lambda y z z) = K^* \end{aligned}$$

$$\underline{SKS = I}$$

«B-редукция при бесконечных λ -термове

$$\lambda M N \rightarrow M E O \rightarrow N$$

$(\lambda M) N \rightarrow$ в M месте за N заменен

$$(\lambda x x) (\lambda x y) = \lambda x y$$

$$(\lambda \lambda 0) (\lambda 1) = \lambda 1$$

$$KI = \begin{cases} I = \lambda 0 \\ K = \lambda \lambda 1 \\ K^* = \lambda \lambda 0 \\ S = \lambda \lambda \lambda 20 10 \end{cases}$$

$$KI = (\lambda \lambda 0) (\lambda 0) = (\lambda \lambda 1) [0 \rightarrow \lambda 0] = \lambda \lambda 0 = K^*$$

$$(\lambda \lambda 0) (\lambda 0)$$

$$(\lambda$$

$$\lambda x y$$

$$\lambda x y$$

Зам. существование в
 $\rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \text{взятие } N \in 1, \text{ после взятия результата} \\ \in 1 \end{array} \right]$
 $\rightarrow$ тогда B-субституция.

Лемма: ~~св-ва~~ $\underline{B \vdash}$

$$- SKK \equiv I$$

$$- \lambda y M \stackrel{B}{=} KM, \text{ где } x \text{ не является свободным произв. в } M$$

$$- \lambda x (M N) = S(\lambda x M) (\lambda x N)$$

$x, y \notin \text{Var free } M$

$$\rightarrow KM = \lambda_{xy} M \stackrel{\beta}{=} \lambda_y M$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S(\lambda_x M)(\lambda_x N) &= (\lambda_{xyz} (x z)(y z)) (\lambda_x M) (\lambda_x N) = \\ &= (\lambda_{yz} (\lambda_x M z) (y z)) (\lambda_x N) = \\ &= (\lambda z (\lambda_x M z) (\lambda_x N z)) = (\lambda_x M (\lambda_x N z)) = \\ &= (\lambda_x M (N[x \rightarrow z])) \stackrel{\alpha}{=} \lambda_x (MN) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ замкнут терм.

(0/3:1) Терм M е комбинатор.

Това означава λ -терм M' , в който се извършва абстракция (замени λ) и е изразен само от S и K така, че $M \stackrel{\beta}{=} M'$

аппликативни термове:

- ако x е Var , то x е апл.
- ако M, N са апл. термове, то MN е апл. терм.

$\rightarrow \forall M$ съществува аппликативен терм

своб. пром $(s, k) \rightarrow SK \lambda s k' \rightarrow$ ще

верне същото нещо

$\rightarrow$ комбинаторна логика $\rightarrow$ SK .

като заместим $\begin{matrix} S \in S \\ K \in K \end{matrix} \}$ ще получим

(0/3:1) Напишете програма, която превръща λ -терм (замкнут) в SK ...

$$\lambda_{xy} yx \quad \lambda_{xy} yx$$

"

$$\lambda_x \lambda_y yx$$

$$(\lambda_x \lambda_y yx)$$

K

~~KK~~

$\lambda_{xy} X$

$$KK (\lambda_{xy} X) (\lambda_{xy} X) = (\lambda_{xy} \lambda_{xy} X)$$

$$KK = (\lambda_{xy} X) (\lambda_{xy} X) = \lambda_{xy} \lambda_{xy} X$$

(5K)

$$\begin{aligned} (\lambda_{xyz} (x z)(y z)) (\lambda_{xy} X) &= \lambda_{yz} ((\lambda_{xy} X) (y z)) = \\ &= \lambda_{yz} (\lambda_{yz} y z) = \lambda_{yz} y z \end{aligned}$$

$$(\lambda_x \lambda_y^T J X) = (\lambda_x S K) = (\lambda_x S S K K K X) = S(\lambda_x S S K K) (\lambda_x K_x) =$$

$$= (K S S K K) \underbrace{(S(\lambda_x K))}_{KK} \underbrace{(\lambda_x X)}_I = (K S S K K) (S K K I)$$

β -равенство $\rightarrow$ ето-равенство $\rightarrow$ дават 1 и същ. резултат.
 β -равенство $\rightarrow$ рефл., сим. транз. $\rightarrow$ екзистенциалност $=$ -во
 (2/3/1) Винаги

β -равенство $\rightarrow$ рефл., сим. и транзитивно затваряне
 $\text{на } \beta = \text{и } \eta = \text{ -во}$

Казваме, че в λ -смятането е вярно $M = N$ за $M, N \in \Lambda$
 ако $M \stackrel{\beta}{=} N$

Казваме, че в λ -смятането, разширено с ext (екзистенциалност);
 е вярно, че $M = N$, ако $M \stackrel{\beta}{=} N$ или за всяко x имаме $\lambda_x M x = \lambda_x N x$
 $\rightarrow$ т.е. β -равни и за всеки резултат съвпадат

$$M \stackrel{\beta}{=} N \Leftrightarrow \lambda + \text{ext } M = N$$

Доказ-во:

$$\Rightarrow 1) \text{ ако } M \stackrel{\beta}{=} N \Rightarrow \text{в } \lambda \text{ } M = N \Rightarrow \text{в } \lambda + \text{ext } M = N - \text{ОК}$$

$$2) \text{ ако } M \not\stackrel{\beta}{=} N, \text{ тогава } M \neq \lambda_x N x \text{ за } x \notin \text{VarFree}(N).$$

Нека z е произв. променлива

$$(M z) \stackrel{\beta}{=} (\lambda_x M x)(z) \stackrel{\beta}{=} N z \rightarrow \text{в } \lambda \text{ } M = N - \text{ОК.}$$

$\lambda + \text{ext}$ е вярно-ОК.

$$\Leftarrow \text{Нека } \lambda + \text{ext } M = N$$

$$I: \text{Нека в } \lambda \text{ } M = N \Rightarrow \text{по def. } M \stackrel{\beta}{=} N - \text{ОК.}$$

$$II: \text{Нека знаем, че } \forall x \lambda + \text{ext } M x = N x$$

$$\text{По и.П. знаем, че } M x \stackrel{\beta}{=} N x$$

$$\text{имаме } M \stackrel{\beta}{=} N$$

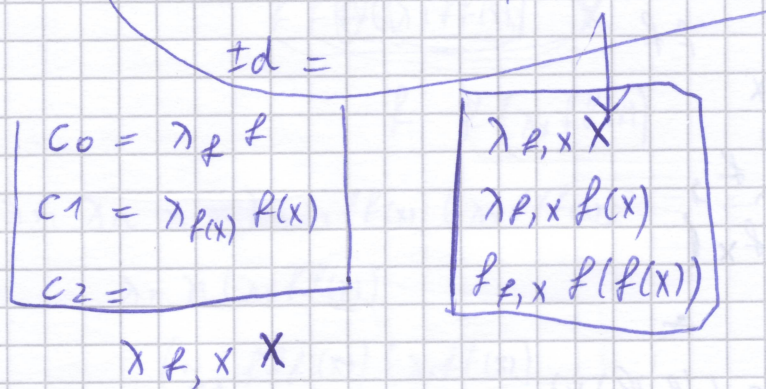
$$M \stackrel{\beta}{=} \lambda_x N x \text{ за някое } x$$

$$\lambda_x M x \stackrel{\beta}{=} N \rightarrow \text{ОК } \checkmark$$

→ Индукция на $\mathbb{N}$ по:

$\forall n \in \mathbb{N}$ определение $c_n = \lambda$ $f(\dots f(x))$

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) \quad \lambda_{f(x)} f^n(x)$$



$N2 \rightarrow$ правило +

$N3 \rightarrow$ правило succ

$$\lambda_{f,x} X, \lambda_{f,x} f(x)$$

$$(\lambda_{f,x} f(x)) f(x)$$

$$\lambda_{f,x} f(x) [t, \lambda_{f,x} f(x)]$$

$$((\lambda_{f,x} f(x)) t) (\lambda_{f,x} f(x)) =$$

$$= \lambda_x t(x) (\lambda_{f,x} f(x))$$

$$\in (\lambda_{f,x} f(x))$$

$$(\lambda_{f,x} f(x)) (\lambda_{f,x} f)(x)$$

$$(\lambda_{f,x} f(x)) (\lambda_{f,x} f)(f(x))$$

$$(\lambda_x (\lambda_{f,x} f)) \lambda_{f,x} f$$

$$(\lambda_{f,x} f(x)) (\lambda_{f,x} f)$$

$$\lambda a (a f) X$$

$$[(\lambda_{f,x} f(x)) (\lambda_{f,x} f)](f(x))$$

$$\lambda a (a f)$$

$$\lambda_n \lambda f \lambda x f(n f x)$$

$$(\lambda_{f,x} f(x)) (\lambda_{f,x} f)(f(x))$$

$$(\lambda_x \lambda_{f,x} f(x)) (f(x)) = \boxed{\lambda_{f,x} f(x)}$$

$$\lambda a ((a f) x) \neq \lambda_{f,x} f(x) =$$

$$= (\lambda_{f,x} f(x) f) x = \lambda_x \lambda_{f,x} f(x)$$

$$\lambda a (a (\lambda_{f,x} f)(f(x))) \neq$$

$$= ((\lambda_{f,x} f(x)) (\lambda_{f,x} f))(f(x))$$

$$\lambda_x \lambda_{f,x} f$$

$$\lambda a (a f) x$$

$$a + b$$

$$(\lambda f \lambda x (f(x)))$$

$$(\lambda f \lambda x f f(x))$$

~~$$\lambda a b \lambda x f f x$$~~

$$\lambda f \lambda x f f x (f,$$

$$\lambda f \lambda x f f x ($$

~~$$\lambda a b \lambda x f f x ($$~~

$$a (b f) x)$$

$$\lambda a b (a ((b f) x))$$

$$(\lambda a b (a ((b f) x))) (\lambda f x f f(x)) (\lambda f x f f(x)) =$$

$$= (\lambda b ((\lambda f x f f(x)) ((b f) x)))$$

$$\lambda b (\lambda f x f f(x) ((b f) x)) (\lambda f x f f(x)) =$$

$$= \lambda f x f f(x) ((\lambda f x f f(x) f) x)$$

$$\lambda x f f(x)$$

Παράδειγμα βέλους

$$plus = \lambda m \lambda n \lambda f \lambda x m f (n f x)$$

$$mul = \lambda m \lambda n \lambda f m (n f)$$

$$exp = \lambda m. \lambda n. n m$$

$$pred = \lambda n \lambda f \lambda x n (\lambda g \lambda u (g f)) (n x) (\lambda u u)$$

$$\in \mathbb{N} \quad \in m \quad \in n$$

$$\in m \quad \in n$$

$$\left[\begin{array}{l} (\lambda m \lambda n \lambda f \lambda x m f (n f x)) \\ \lambda m \lambda n \quad n \quad f \quad x \\ \lambda x f f f(x) \rightarrow \lambda x f f f(x) \\ \lambda f \\ (\lambda n n \lambda x f f f(x)) f f f(x) \end{array} \right]$$

$$(\lambda m \lambda n \lambda f \lambda x m f (n f x)) (\lambda x f f f(x)) (\lambda x f f f(x))$$

$$\lambda x f f f(x) \lambda x f f f(x)$$

$$f f f (\lambda x f f f(x))$$

$(\lambda m \lambda n n m) (\lambda x f f(x)) (\lambda x f f f(x))$

$(\lambda n n (\lambda x f f(x))) (\lambda x f f f(x))$

$(\lambda x f f f(x)) (\lambda x f f(x))$

$f f f(\lambda x f f(x)) \quad \times$

$f f(\lambda x f f(x))$

$(\lambda m \lambda n n m) (\lambda x f f(x)) (\lambda x f f f(x))$

$\lambda n n (\lambda x f f(x))$

$(\lambda x f f f(x)) (\lambda x f f(x))$

$f f f(\lambda x f f(x))$

$(\lambda x f f(x)) (a)$
 $f(\lambda x f f(x))$

$f f(x)$

$(\lambda m \lambda n n) \begin{matrix} m & x \\ \downarrow & \\ \lambda x f f(x) & \end{matrix}$

$(\lambda m \lambda n n m) (x)$
 $(f f f(x)) (f f(x))$

$\lambda n n (f f f(x))$

$\lambda x f(x)$

$(\lambda x f f f(x)) (\lambda x f f(x))$

$f f f(\lambda x f f(x)) (x)$

$\lambda x f f(x)$
 $f(\lambda x f f(x)) (x)$
 $f(\lambda x f f(x))$

$(n!)$

$f(x)$

BOOL

$\lambda m \lambda n \lambda$

True - $\lambda x \lambda y x = K$

False - $\lambda x \lambda y y = K^*$

C if

$(\text{c if } CP \text{ } x \text{ } m \text{ } n) \rightarrow m, \text{ and } CP = \text{True}$
 $\rightarrow n, \text{ and } CP = \text{False}$

$\lambda x \lambda y$
 $\rightarrow \text{C if} = \lambda p CP = \underline{I}$

$C_{zero} \quad c_m \rightarrow \begin{cases} \text{True}, m=0 \\ \text{False}, m \neq 0 \end{cases}$

$C_0 = \lambda a \lambda x X \rightarrow \text{False}$

$\lambda a \lambda b$

$\lambda m \lambda a \lambda$

$C_{zero} \rightarrow (\lambda n \lambda a \lambda b \ n \ b \ a)$

$[0 = \lambda x \lambda x X \rightarrow \text{False}]$

(P)

$[\lambda n \lambda b \ n \ b \ I]$

$C_{zero} \rightarrow \lambda n$

$(\lambda n \lambda b \ n \ b \ I)$

$C_{zero} \quad c_m \rightarrow \begin{cases} \text{True} \\ \text{False} \end{cases}$

$(\lambda n \lambda b \ n \ b \ I)$

$[C_{zero} \rightarrow \lambda 13.1] \text{ not a function}$

~~⊗~~

$C \wedge P \ q \rightarrow P \cup q$

$C \parallel P \ q \rightarrow P \cup \cup q$

$C! \ P \rightarrow !P$

$C_{zero} \ P$

C_{zero}

$\lambda x \lambda y \ X \rightarrow \text{True}$

$\lambda x \lambda y \ Y \rightarrow \text{False}$

$\lambda x \lambda y (\lambda x \lambda y \ X) \ y \ x$

$[C! \rightarrow (\lambda P \lambda x \lambda y \ P \ y \ x)]$

$C \& \ P \ q \rightarrow C \& \ P \cup q$

^

$[P \ \lambda P \lambda x \lambda y]$

$\begin{matrix} \oplus & F \\ (\lambda x \lambda y \ X) (\lambda x \lambda y \ Y) & \times \ y \\ \lambda y \lambda x \lambda y \end{matrix}$

~~fpermissive~~

Q13.1) $=, >, >=, <, <=, \neq$
 $\hookrightarrow$ операция на ZFC.

cons } $\text{car}(\text{cons } x \ y) \rightarrow x$
 car } $\text{cdr}(\text{cons } x \ y) \rightarrow y$
 cdr } $\text{cons}(\text{car } z) (\text{cdr } z) \rightarrow (x, y)$

$\vdash \text{cons} - \lambda x \lambda y \lambda z \text{ } x \ y$
 $\vdash \text{car} - \text{true} \lambda p \text{ } C \text{ true}$
 $\vdash \text{cdr} - \text{false} \lambda p \text{ } C \text{ false}$

~~$x \ y$~~ $x \ y$
 $\lambda x \lambda y \ x \ y$
 $\lambda x \lambda y \ x \ y$

$\vdash \text{cons}(\text{True } z) (\text{False } z)$
 $\vdash$

$\text{Cn!} = \text{cif}(\text{Czero } n) (\lambda x \dots)$
 $\lambda n \lambda f \lambda x \ n \neq x = \text{I}$

$\text{succ} = \lambda n \lambda f \lambda x \ f(n \neq x)$

$(n!, n) \text{ Ccons}$
 $\text{C!} = \lambda n ((\text{Cmult } \text{Ccar } n) (\text{cdr}))$
 $(\text{Csucc } \text{cdr} \dots)$
 $(\text{Ccons } 0 \ 1)$

Q13.1) операция Cce

let $x = e$ in $\dots$
 $(\lambda x \ N) n$

pred $\rightarrow$ предыдущее

$\text{Cpred } Cn \rightarrow \begin{cases} n-1, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

$(n-1, n) \rightarrow (0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)$

$\lambda n \text{ Cif } (\text{Czero } n) (\text{C } 0) (\lambda z \text{ Ccons}(\text{cdr } z) \dots)$
 $(\text{Csucc } \text{cdr } z)$
 $(\text{Ccons}(C, 0), (C, 0))$

→ Факт неперв. и минимал

$$\hookrightarrow f(0) = \emptyset \checkmark$$

$$f_1 = \Gamma f(0)$$

$$f_{n+1} = \Gamma f(n)$$

$$f(0) = \emptyset$$

$$\Gamma f(0) = \begin{cases} 1, f=0 \\ \emptyset, \text{ иначе неперв.} \end{cases} = \begin{cases} 1, f=0 \\ \text{иначе никак не может} \end{cases}$$

$$f(2) = \Gamma f(1) = \begin{cases} 1, f=1, n=0 \\ 1, f(n-1)=1, n=0 \\ \emptyset, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$f_k = \begin{cases} 0, n=0 \\ 1, n=1 \\ 2, n=2 \\ \vdots \\ n! \text{ за } n \leq k \\ \text{неперв. иначе} \end{cases}$$

→ каж-минимал не перв. точка $\rightarrow f(0) \vee f(1) \vee f(2) \vee \dots$

↓
 $\underline{\underline{C}}$ у может быть рекурсия

$$C! = \lambda F \rightarrow \text{я подх. } F$$

~~XXXX~~

$$(\lambda F \lambda n (C! F (C \text{ zero } n) (C1) (C \text{ mul } n F (C \text{ pred } n))))$$

$$(\lambda F \lambda n C! F (C \text{ zero } n) C1 (C \times n (F (C \text{ pred } n))))$$

$$\lambda F (\lambda x F(x, x)) (\lambda x F(x, x))$$

Тема - комбинатор.

$$\begin{aligned} & ((\lambda x y F(x x) y) (\lambda x y F(x x) y)) \rightarrow \text{не получится рекурсия} \\ & \quad \text{элементарных фактов} \\ & (\lambda y F((\lambda x y F(x x) y) (\lambda x y F(x x) y))) \end{aligned}$$

τ-комбинатор

$$\lambda F \lambda x F(\lambda y x x y)$$

$$(\lambda F \lambda x F(\lambda y x x y)) F (\lambda x F(\lambda y x x y)) =$$

Работа в кванти

$N \in \mathcal{X}$

~~$\lambda \in \mathcal{X}$~~

$$\lambda_n \lambda_m \lambda \in \mathcal{X} \left(\underbrace{\left(m \left(\lambda \in \mathcal{X}_1 \left(n \in \mathcal{X}_1 \right) \right) \right) \mathcal{X}}_{\mathcal{X}(\mathcal{X})} \right)$$

Работа в клас

→ ханбикатор на Тюринг, не е това от предния път

$$\mathcal{Q} \mathcal{A} = (\lambda x y \ y(x x y)) (\lambda x y \ y(x x y))$$

Нормализация и каноничност

β -равенство - засега не може ал. да прев.

1) Кажете, че M е β -нормална форма, ако не може да направим β -редукция в нея.

I - е β -нормална форма

(Ix) - не е β -нормална форма

Q(3.1) един терм е β -норм. форма

не стиг. подтерми на M от вида

$\lambda x \ N \ P$ (ако няма β -редук.)

2) A е β -нормална форма на B , ако A е β -норм. форма и са β -равни

X - β -норм. форма на $Ix, IIx, IIIx, \dots$

3) Даден е M -терм.

? има ли β -нормална форма.

? може ли M да има ≥ 1 нормална форма

? може ли по алгоритмичен начин да намерим нормална форма

? важно е, че ако няма нормална форма,

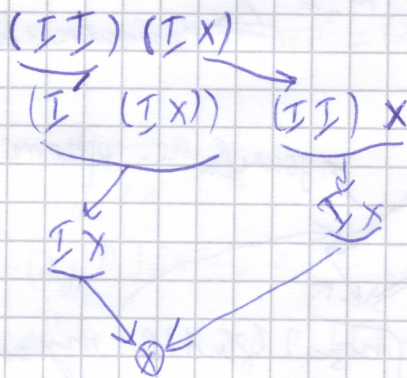
→ нормализация

независимо от реда на редукциите ще стигнем до нива.
 1) $\rightarrow$ дали е нормализируем

Граф на редукциите

Мултиграф с върхове всички M , до които той може да се редукцира.

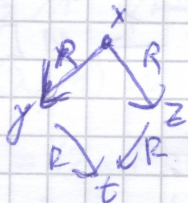
$\hookrightarrow$ и ребра от p до $n \Leftrightarrow p$ се β -ред. до n .



$$\left[\begin{array}{l} w_3 = (\lambda_x xxx)(\lambda_x xxx) \\ w_3 w_3 \xrightarrow{\quad} w_3 w_3 w_3 \rightarrow w_3 w_3 w_3 \dots \end{array} \right]$$

$\rightarrow$ нормална форма $\circledast$

Нека R е релация. Казваме, че R удовлетворява св-то на транзитивност, ако $\forall x y z$, ако $x R y$ и $x R z \Rightarrow \exists t: y R t$ и $z R t$



} искаме само с 1 редукция

$\rightarrow$ дали β -редукция е удовлетворена

(виз. пример, че не може)

$\rightarrow$ Условие за конформатност:

Нека R е релация, R' - рефл. и транзит. замб.

R е конформатна, ако

$$(\forall x y z \quad x R' y \text{ и } x R' z \text{ и } z R' t \Rightarrow \exists R' t)$$

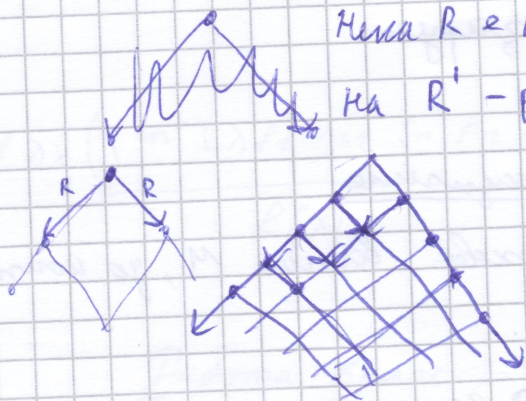
(т.е. R' удовлетв. усл. на транзитивност)
 R' - може напълно да замени R



Лема: Ако R е конгруентна, то R' е конгруентна.

Нека R е конгруентна.

На R' - рефл. и транз. затв. е R' .



$\langle \xrightarrow{R} \rangle$ е конгруентна, т.е. $\xrightarrow{R}$ изпъкнава св-то на значаи

2006-60.

Sezif-лема:
 парциране тези $(\lambda x A)B$ тук когато работим, влизаме къде се разширява нашата и тук всички тези изпъкнаване
 донасяме коркото за 1 стъпка и по индукция
 това + индукция - ОК.

Def 1) $M \xrightarrow{1} M$

2) $M \xrightarrow{1} N$, то $\lambda x M \xrightarrow{1} \lambda x N$

3) $M \xrightarrow{1} M'$
 $N \xrightarrow{1} N'$ $\Rightarrow (MN) \xrightarrow{1} (M'N')$

4) $M \xrightarrow{1} M'$, $N \xrightarrow{1} N' \Rightarrow (\lambda x M) N \xrightarrow{1} M[x \mapsto N']$

Лема: Ако $M \xrightarrow{1} M'$, $N \xrightarrow{1} N'$, то:

$(M[x \mapsto N]) \xrightarrow{1} M'[x \mapsto N']$

Индукция по $M \xrightarrow{1} M'$:

1) $M \equiv M'$

(Трябва да покажем че $M[x \mapsto N] \xrightarrow{1} M[x \mapsto N']$
 1.1) $N \equiv N'$, ОК, те съвпадат
 1.2) или $M = \lambda x P$, $M' = \lambda x P'$, $P \xrightarrow{1} P'$
 то $\xrightarrow{1} M[x \mapsto N']$
 по индукция по M

1.4) $M =$

$\lambda x P$
 $\downarrow$
 $\alpha, \text{свободн. не встречающ.}$

$M \equiv \lambda y P, y \neq \text{Var}_{free}(N)$
 x
 $M[x \rightarrow N'] = \lambda y P[x \rightarrow N'] \rightarrow OK$

2) Если $M \equiv \lambda x P$
 $M' \equiv \lambda x P'$
 $P \xrightarrow{1} P'$ | $? M[x \rightarrow N] \xrightarrow{1} M'[x \rightarrow N']$

2.A) $(\lambda x P)[x \rightarrow N] = \lambda x P \xrightarrow{1} \lambda x P' = (\lambda x P')[x \rightarrow N']$

2.B) $M = \lambda y P$
 $M' = \lambda y P'$ $P \xrightarrow{1} P'$
 $y \neq x$

$$M[x \rightarrow N] = (\lambda y P)[x \rightarrow N] = (\lambda y P[x \rightarrow N]) \xrightarrow{2.1}$$

$$= \lambda y P'[x \rightarrow N'] = (\lambda y P')[x \rightarrow N'] = M'[x \rightarrow N']$$

3) $M = P Q$ $P \xrightarrow{1} P'$
 $M' = P' Q'$ $Q \xrightarrow{1} Q'$

По и.п. $P[x \rightarrow N] \xrightarrow{1} P'[x \rightarrow N']$
 $Q[x \rightarrow N] \xrightarrow{1} Q'[x \rightarrow N']$

$$M[x \rightarrow N] = (P Q)[x \rightarrow N] = (P[x \rightarrow N])(Q[x \rightarrow N]) \xrightarrow{1}$$

$$\xrightarrow{1} (P'[x \rightarrow N'])(Q'[x \rightarrow N']) = (P' Q')[x \rightarrow N']$$

4) $M \xrightarrow{1} M', N \xrightarrow{1} N'$

$$(\lambda x M) N \xrightarrow{1} M[x \rightarrow N']$$

4.A) $M = (\lambda x P) Q, M' = P'[x \rightarrow Q']$
 $P \xrightarrow{1} P', Q \xrightarrow{1} Q', P[x \rightarrow N] \xrightarrow{1} P'[x \rightarrow N']$
 $Q[x \rightarrow N] \xrightarrow{1} P'[x \rightarrow N']$

$$M[x \rightarrow N] = ((\lambda x P) Q)[x \rightarrow N] = ((\lambda x P)[x \rightarrow N] Q[x \rightarrow N]) =$$

$$= P Q \rightarrow \dots, OK$$

$$4. B) M = (\lambda y P) a$$

$$M' = P'[y \rightarrow a]$$

$$P \mapsto P'$$

$$a \mapsto a'$$

$$P[x \rightarrow v] \mapsto P'[x \rightarrow v]$$

$$a[x \rightarrow v] \mapsto a'[x \rightarrow v']$$

$y \neq x$

$$((\lambda y P) a) [x \rightarrow v] =$$

$$= (\lambda y P) [x \rightarrow v] (a [x \rightarrow v]) =$$

$$= (P' [x \rightarrow v']) (a' [x \rightarrow v']) =$$

$$= (P' [x \rightarrow v']) [y \rightarrow a' [x \rightarrow v']]$$

$$M' [x \rightarrow v'] =$$

$$(P' [y \rightarrow a']) [x \rightarrow v']$$

↓ по 4-та аксиома.

по лема за събستگی -
използваме тези сабоки.

Лема 2 (за отрицателно):

1) Ако $(\lambda x M) \mapsto N$, то $N = \lambda x N'$, $N \mapsto N'$

2) Ако $M \mapsto P$, тогава

а) или $P = M' N'$, тогава $M \mapsto M'$, $N \mapsto N'$

а) или $M = \lambda x a$, $P = a' [x \rightarrow v]$, тогава, $a \mapsto a'$

$$N \mapsto N'$$

Лема 3

$\mapsto$ изпълнява св-то на транзитивност.

Доказателство

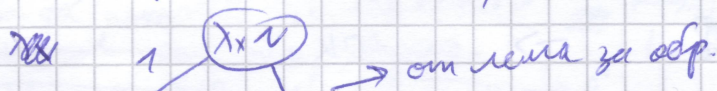
Нека имаме $M \mapsto M_1$ и $M \mapsto M_2$.

Ще покажем, че има M_3 : $M_1 \mapsto M_3$ и $M_2 \mapsto M_3$.

→ правим с индукция по лемата за отрицателно.

1) $M \equiv M_1$ и $M \mapsto M_2$, $\Rightarrow M_3 \equiv M_2$ верни равенства

2) $M = \lambda x N$, $M_1 = \lambda x N_1$, $N \mapsto N_1$



$N \mapsto N_2$. За N, N_1 и N_2 е вярно.

ОК.

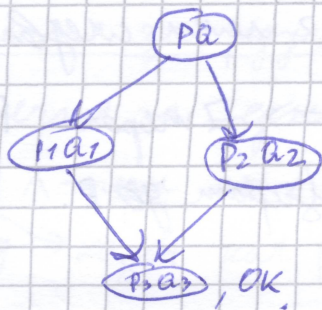
3) $M = PA$ $M_1 = P_1 A_1$

$P \xrightarrow{1} P_1$

$A \xrightarrow{1} A_1$

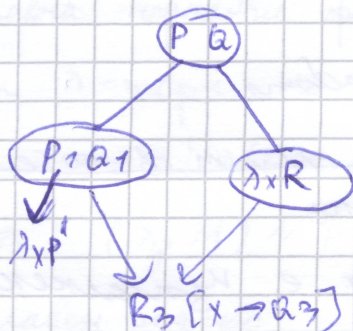
$M = PA \xrightarrow{1} P_1 A_1$

3.A)



$\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} \} \xrightarrow{1} P_3$
 $\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \} \xrightarrow{1} A_3$

3.B)



$R_2[x \rightarrow A_2]$

↓
 и за R, и за P имене $\Diamond$
 $\hookrightarrow \exists P_3 \rightarrow \lambda x R_3 \rightarrow \text{зам. в. грам.}$

4A) $M = (\lambda x P)(A)$

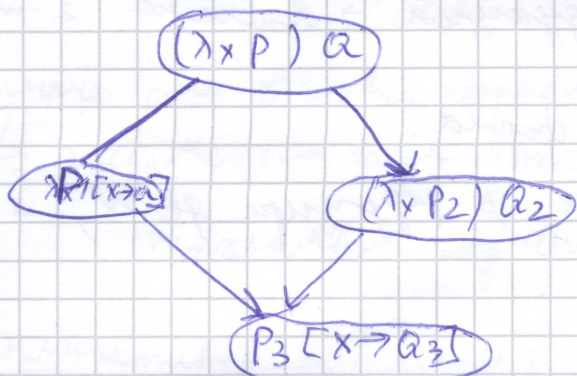
$M_1 = P_1[x \rightarrow A_1]$

$P \xrightarrow{1} P_1$

$A \xrightarrow{1} A_1$

$M \xrightarrow{1} M_1$

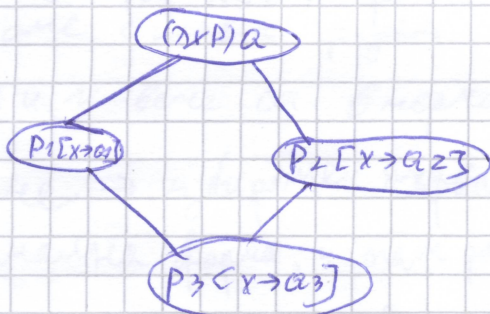
$\hookrightarrow (\lambda x P)(A)$



$P \rightarrow P_2$
 $A \rightarrow A_1$

$\Rightarrow \exists P_3: \begin{matrix} P_1 \rightarrow P_3 \\ P_2 \rightarrow P_3 \end{matrix}$

4.B)



, OK.

→ ~~искам да покажа~~

Лема → D/3.1) докончи док-во → (что доказателств)

Т. на Гур-Посер: $\beta \rightarrow$ е конформанс

↳ от последните 2 лем следва.

Т: Ако M и N са β -равни $\Rightarrow \exists$ терм P таков,
че M и N се β -редуцират до P .

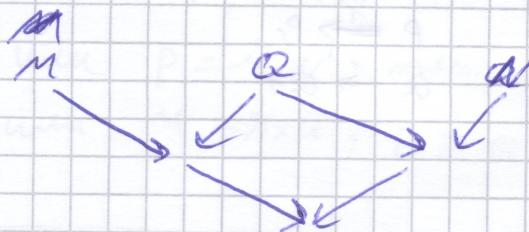
Док-во:

Индукция по $M \equiv^{\beta} N$.

1) $M = N$, $P = M$ върши работата

2) Нека $M \equiv^{\beta} N$ и нека за M и N св-то е в
↳ по и.п. директно

3) $M \equiv^{\beta} Q$ и $Q \equiv^{\beta} N$ и за тях е изпълнено усл.



4) За 1 стъпка β -редукция $\rightarrow$ взимаме 2-то

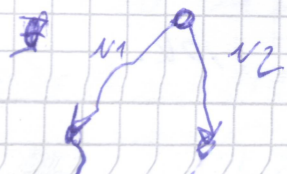
Тв. 3.11 няма нормална форма:

ω трябва да се β -редуцира до N , а $\omega \rightarrow_{\beta} \text{нещо}$

$\Leftrightarrow \text{нещо} = \omega - x$.

Тв. 3.12
Нека N_1 и N_2 са β -нормални форми на N . Тогава
 $N_1 = N_2$

по Т:



$\Rightarrow$ са равни.

D/3.1)
форм

Q - смятането е съвместимо

→ $\exists$ терми M и N такива, че $M \neq N$ и $M \approx N$
→ ω и x например

Стратегия за редукция

→ Стратегия за еднократкова редукция

→ $f: \Lambda\text{-терми} \rightarrow \Lambda\text{-терми}$, $N \xrightarrow{f} M$ // Ако M е норм. форма - не правим нищо.
→ използва как редукция да извършим.

Тв. (за шавна нормална форма (Head Normal Form))

→ всеки λ -терм N е в една от сл. 2 форми

1) $\lambda \lambda \lambda \dots \lambda (\text{Var} \text{ <term>})$ - това е шавна нормална форма.

2) $\lambda x. (\lambda y. M) N P$

→ шавен редукс

→ (ка се доказва формално)

→ Нормална стратегия за редукция

→ ако сме в шавен редукс → прилагаме го
 $M[x \rightarrow N] \dots$

→ иначе сме в шавна нормална форма.

→ следващ 1-я терм M който не е в нормална форма.
използваме β като какво трябва.

→ апериодична стратегия

→ ако сме в шавен редукс → прилагаме го ако
 M и N вече са в нормална форма

→ иначе → избираме първия терм, който не е в нормална форма, и там работим

$\lambda x \lambda y x$

$$(KI)w = (\lambda y I) w = I$$

$KIw \rightarrow$ ще даде същото

$K(Iw)$

$(K(KI\Omega)\Omega) \rightarrow$ нормална стратегия
е ок тук

$K(Iw)$

$K(Iw)$

$$K^* w I \rightarrow (\lambda y y) I = I \leftarrow \text{с нормална стратегия}$$

$$K^* w I = K^*(w) I$$

рекурсивно из приложени в w

=

call by value $\rightarrow \lambda x M \rightarrow \lambda x M$

- ако имаме λ отпред не изчисля, किщо
- ако имаме шабел редукс, изчислява, ако M и N са в нормална форма
- иначе взема 1-я аргумент и го оценява

↑
опити. + под λ не изчисля

(Важно! издете
стратегията
никога не
може да
капне)

call by name $\rightarrow \lambda$ отпред не оценява

→ нормална, под λ не изчисля

(норм-форма $\rightarrow$ стратегията не може да
капне किщо каз тук)

→ шабел нормална форма

=

Т. за Нормализацията

Нека M има нормална форма N . Тогава M може да
се получи от N с нормална стратегия за ре-
дукция
(т.е. винаги най-близкото състояние)

→ сн. Ако нормалната стратегия завършва, то M няма нормална форма.

Def. Нека f е частична f -я (x ест. числа $\rightarrow$ ест. число)
такава, че f е изчислима.

f е λ -представима, ако $\exists c \in \mathbb{N}$ такъв, че:

1) ако $\exists (x) f(x_1 \dots x_k) = y$, то $c f(c x_1 c x_2 \dots c x_k)$

$\downarrow B$

$\forall c y$

2) ако f е деф. $f(x_1 \dots x_k)$, то $c f(c x_1 \dots c x_k)$ няма нормална форма.

Лемма 13.11 f е изчислима $\Leftrightarrow f$ е λ -представима.

Работата в клас

Типово λ -смятане

1) Прости типове:

Нека TV е безкрайно м-во от променливи. Смятаме, че $TV \neq V$
(типови променливи)

1) Ако $\alpha \in TV$, то α е тип ($\alpha \in T$) // Базов тип

2) Ако ρ и σ са типове, то $\rho \rightarrow \sigma$ е тип // функционален тип.
аргумент $\rightarrow$ резултат.

2) Def. Нека N е терм, ρ е тип

$N : \sigma$ или $N \sim$ наричаме типово смятане.

$I = \lambda x. X$ // $I : \alpha \rightarrow \alpha$

$\lambda x y. X$ // $I : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

$M : \rho \rightarrow \sigma$ $N : \rho \Rightarrow (M N) : \sigma$

Ако $M : \sigma$

$\lambda x. M$

ако знаем, че x е от тип $\rho \Rightarrow \rho \rightarrow \sigma$

3) Типов извод е дърво от типови смятания, построено

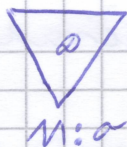
по следните правила

$\rightarrow x : \rho$ е типов извод

$\rightarrow$ Ако имаме типов извод Δ $M : \rho \rightarrow \sigma$ ∇ $N : \rho$, тогава

типовият извод Δ ∇ $(M N) : \sigma$ е типов извод

→ нека имаме:

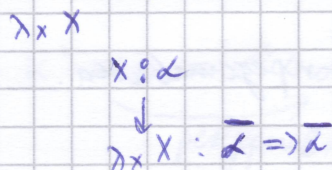


Тогава нека a' е типов извод, получен от a , в който всички места от вида $x:p$ са задржани (маркирани)

Тогава $a': M:$ е типов извод.

Пример:

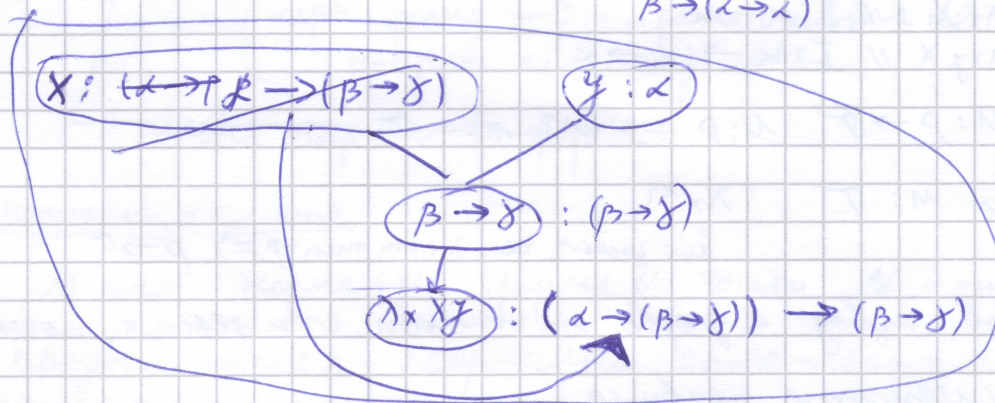
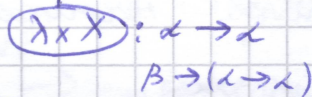
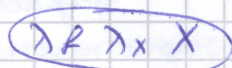
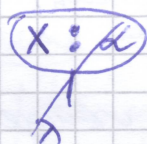
Типов извод на $I : \alpha \rightarrow \alpha$



Лема Казваме, че даден терм или $\vdash M:a$ ако има типов извод на $M:a$, в който всички места са маркирани

$\left. \begin{matrix} x:\alpha \rightarrow \beta \\ y:\alpha \end{matrix} \right\} \text{ то } \vdash M:\beta \text{ не е вярно}$
 x, y от тип β

$Co = \lambda f \lambda x.X$



$$\left(\begin{array}{l} 1) x : \alpha \\ 2) \frac{N : (\alpha \rightarrow \beta), M : \alpha}{NM : \beta} \\ 3) \frac{M : \rho}{\lambda x M \dots} \end{array} \right.$$

Def Нека $x_1 \dots x_n \in V$ са различни променливи

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ са произволни типове

$\{x_1 : \lambda_1, x_2 : \lambda_2, \dots, x_n : \lambda_n\}$ наричаме типов контекст.

Def Казваме, че тип σ в контекст Γ е действиен

$\Gamma \models (M : \sigma)$ ако има типов израз с корен $M : \sigma$,

в който всички незадраскани места са в Γ

($x \in \Gamma$ или допускания, които не сме използвали)

Ако $\Gamma = \emptyset$ то действиен $M \in \mathcal{E} \models (M : \sigma)$

$$\left(\begin{array}{l} x : \alpha \rightarrow \beta \\ y : \alpha \end{array} \right) \Rightarrow xy \neq \beta$$

от тези не сме се освободили от
 $\Downarrow$
 трябва да са в Γ

Рб: 1) Ако $x : \sigma \in \Gamma$, то $\Gamma \models (x : \sigma)$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \text{ Ако } \Gamma \models M : \rho \rightarrow \sigma \\ \Gamma \models N : \rho \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \models (NM) : \sigma$$

3) Ако $\Gamma \models M : \sigma$, то $\Gamma / \{x : \rho\} \rightarrow (\lambda x M) : (\rho \rightarrow \sigma)$

4) Ако $\Gamma \leq M : \sigma$ и $\Gamma \leq \Delta$, то $\Delta \models (M : \sigma)$

$$c_2 = \lambda y \lambda x \beta \beta \otimes$$

$$x : \alpha$$

$$\lambda y \lambda x \beta \beta x$$

$$\lambda x \beta \beta x$$

$$\lambda x y x$$

$$\lambda x \lambda y x$$

$$\begin{array}{l} (x \rightarrow \\ (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha) \end{array}$$

$$x : \alpha$$

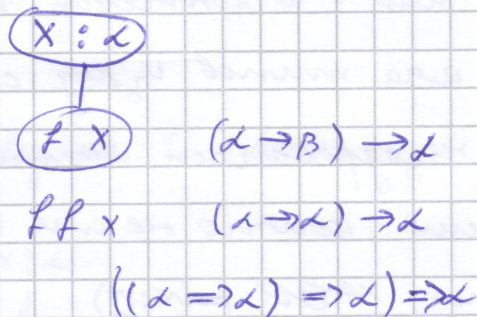
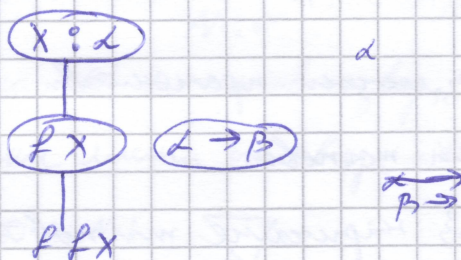
$$(\lambda y x) \beta \rightarrow \alpha$$

$$\lambda x \lambda y x \quad \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

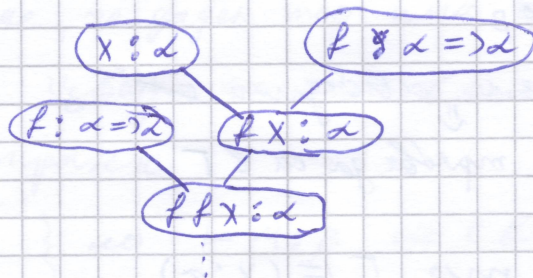
$$\begin{array}{l} c_1: \\ (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \end{array}$$

$$((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$$

$\lambda f \lambda x f f x$



$c_2: \lambda f \lambda x f f x$



Вместо $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ пишем $\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$, т.е. $\Rightarrow$ е десно-асоциативна

Типова субституция:

Нека α е типова променлива, ρ и σ е тип.

Дефинираме $\sigma[\alpha \rightarrow \rho]$ с индукция по σ

$$1) \text{ ако } \sigma = \alpha \Rightarrow \sigma[\alpha \rightarrow \rho] = \rho$$

$$2) \text{ ако } \sigma = \beta \neq \alpha \Rightarrow \sigma[\alpha \rightarrow \rho] = \beta$$

$$3) \text{ ако } \sigma = (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2) \Rightarrow \sigma[\alpha \rightarrow \rho] = (\sigma_1[\alpha \rightarrow \rho] \Rightarrow \sigma_2[\alpha \rightarrow \rho])$$

$=$

Нека $\oplus: TV \rightarrow T$
полна и частична ф. а

Нека σ е тип. $\sigma^\oplus \in T$

$$1) \text{ Ако } \sigma = \alpha, \text{ то } \sigma^\oplus = \oplus(\alpha), \text{ ако е деф. } \alpha, \text{ иначе}$$

$$2) \sigma = (\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2), \text{ то } \sigma^@ = (\sigma_1^@ \Rightarrow \sigma_2^@)$$

В частности, ако $\text{dom}(@) = \alpha$, отбавяне на предикато.

Лема

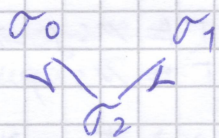
Казваме, че p е no-обх от σ , ако $p \sigma = p^@$

$$C0: \alpha \Rightarrow \alpha$$

$$\lambda \lambda x. x$$

$$C1: \beta \Rightarrow (\alpha =$$

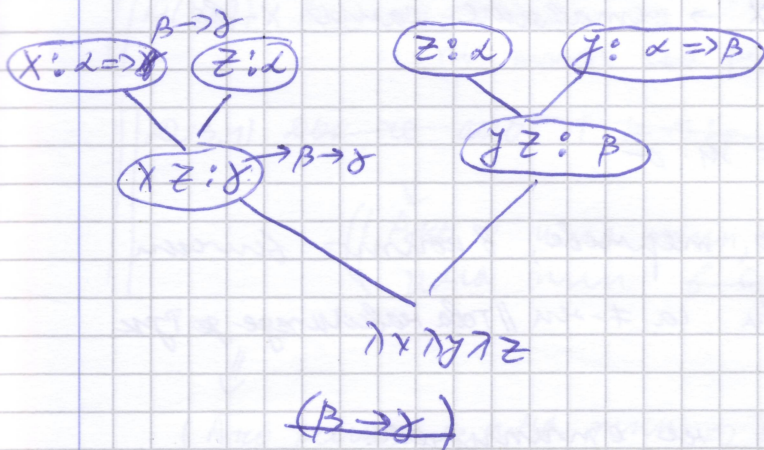
$$C2: (\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$$



Д/З: 1) док, че ако $\Gamma \vdash M : \sigma$
и σ е no-обх от p , то
 $M : p$ е изводимо

Пример:

$$S = \lambda x y z. (x z)(y z)$$



$$((\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \delta)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha) \Rightarrow \delta)$$

$$\text{ТВ: } \Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \text{var}_{free}(M) \in \text{dom}(\Gamma)$$

док-во:

индукция по минимален извод:

$$1) x : p \Rightarrow \text{свободна } x \in \text{dom}(\Gamma)$$

$$2) \text{ нека } M = (M_1 M_2) \text{ и } \Gamma \vdash M_1 : p \rightarrow \sigma, \Gamma \vdash M_2 : p$$

$$\text{По и.п. знаем, че } \left. \begin{array}{l} \text{var}_{free} M_1 \in \text{dom}(\Gamma) \\ \text{var}_{free} M_2 \in \text{dom}(\Gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{var}_{free}(M_1 M_2) \in \text{dom} \Gamma$$

$$3) M = \lambda x. M'$$

$$M : \sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$$

M' е от тип σ_2

Загласаваме още листа от вида $x : \sigma_1$

$$\frac{\text{По и.п. знаем, че } x \notin \text{dom}(\Gamma) \quad \hookrightarrow \text{от } \Gamma \text{ махнаме } x}{\text{Var}_{\text{free}} M = (\text{Var}_{\text{free}} M') - \{x\}} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \text{OK.} \end{array}$$

Лема за обръщането:

$$1) \text{ Ако } \Gamma \vdash x : \rho \Rightarrow x : \rho \in \Gamma$$

$$2) \text{ Ако } \Gamma \vdash (MN) : \sigma \Rightarrow \exists \text{ тип } \rho : \Gamma \vdash M : \rho \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash N : \rho$$

$$3) \text{ Ако } \Gamma \vdash (\lambda x. M) : \sigma \Rightarrow \sigma \text{ е от вида } \sigma_1 \Rightarrow \sigma_2$$

$$\Gamma \cup \{x : \sigma_1\} \vdash M : \sigma_2$$

(Γ не съдържа информ. за x)

Def. 1. Нека x е M -во от пром.

Γ ограничено до $x \rightarrow$ оставяме само x -ве

$$\begin{array}{l} \uparrow \parallel \text{TB: Ако } \Gamma \vdash M : \sigma \\ \Gamma \downarrow \text{Var}_{\text{free}} M \vdash M : \sigma \end{array}$$

Разг. Разместване само термове, в които всички свързани променливи са $\neq$ -ни // това навсякъде е вжк.

(D/3:1) Термът $\lambda x. x x$ не е типизируем.
 $\hookrightarrow$ всички листа са загласаващи

док-во: индукция по извода:

$$1) M = x \Rightarrow x : \sigma \text{ е извода } \Rightarrow \text{с } \Gamma \downarrow \text{V.f. става}$$

$$2) M = (M_1 M_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} M_1 : \sigma \rightarrow \rho \\ M_2 : \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow (M_1 M_2) : \rho$$

$$\text{Т.к. } \begin{array}{l} \Gamma \vdash M_1 : \sigma \rightarrow \rho \\ \Gamma \vdash M_2 : \sigma \end{array} \text{, то по и.п. } \begin{array}{l} \Gamma \downarrow \text{V.f.}(M_1) \vdash M_1 : \sigma \Rightarrow \rho \\ \Gamma \downarrow \text{V.f.}(M_2) \vdash M_2 : \sigma \end{array}$$

$$\text{V.f.}(M_1 M_2) = \text{V.f.}(M_1) \cup \text{V.f.}(M_2)$$

$$\Gamma \downarrow \text{V.f.}(M_1 M_2) \vdash (M_1 M_2) : \rho$$

3) Если $M = \lambda x.M' : \sigma$

Тогда: Если есть такой $\sigma : \sigma_1 = \sigma_2$

↓
значит все выражения имеют от вида $x : \sigma_1$

По и.п. $\Gamma \cup \{x : \sigma_1\} \models M' : \sigma_2$

По и.п. $(\Gamma \cup \{x : \sigma_1\}) \downarrow \vee \#(M') \models M' : \sigma_2$

$(\Gamma \downarrow \vee \#(M)) \cup \{x : \sigma_1\}$

↓
 $\Gamma \downarrow \vee \#(M) \models \lambda x.M' : \sigma$

Лемма 1.1) ~~Если $M : \rho$~~

Если $\Gamma \models M : \rho$. Если $(x : \sigma) \in \Gamma$. Тогда $\#$

Если $\Gamma / \{x : \sigma\} \models M : \sigma$

Тогда $\Gamma / \{x : \sigma\}$

↓
Следствие: $M \xrightarrow{\beta} N$ и $\Gamma \vdash M : \rho \Rightarrow \Gamma \vdash N : \rho$.

рекурсия
не разв.
тип.

(Лемма 1.1) Если $M \xrightarrow{\beta} N$ и N имеет тип ρ , то M имеет тип ρ
(по типу на результата - тип на проп.)

Лемма 1.1) Если, то $\Gamma \models M : \rho$, то $\Gamma \models M' : \sigma$

∃ x

↓
(Если M имеет тип, то всегда есть потеря
или тип в ~~связи~~ Γ какой контекст
(разширяющ Γ)

↓
(Если некто имеет тип $\Rightarrow$ всегда содержится в нем)

Основные задачи:

1) Даден e M -терм, ρ -тип. Вопрос: и.е., e имеет тип ρ . // проверка за тип.

2) Даден e M -терм. Найти тип за M . // type inference

3) Даден e ρ -тип. Имя M терм за него (с тип ρ)
(однаемость на тип)
(type inhabitation)

$\parallel$

Име направим алл., който за Γ и M еалира тит за M

$$x(yx)$$

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((\neg a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg a \Rightarrow b))$$

$$\lambda_{xy} \times (y \times x), \quad \Gamma = \emptyset$$

$x: p$

2/1/1 В право от загуба операция

|| 2/3:1) можно сделать нахождение типов с именами на Prolog

→ право может работать с 30 термом
→ ~~надо убрать~~ можно убрать
флажок.

Работа в классе

2/3.17 a. nym - 6 303

$\alpha \Rightarrow \alpha$ $\alpha \quad (\alpha \Rightarrow \beta)$ $\alpha \Rightarrow \alpha$ $\alpha \Rightarrow \beta$ $\alpha \Rightarrow \beta$ $\lambda \times \lambda$

$\lambda \times \lambda$ $(\alpha \Rightarrow \alpha)$ $\lambda \times \lambda$ $\lambda \times \lambda$ $\lambda \times \lambda$ $\lambda \times \lambda$

$(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$ $\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$ $\lambda \times \lambda$ $(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$ $\lambda \times \lambda$

Кои типове са обитавани:

$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha \quad \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$
 $\lambda y X$
 $\lambda x \lambda y X$
 $(\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \gamma$
 $\lambda x \lambda y \lambda z X(y(z)) = \lambda x \lambda y \lambda z x y z$
 $\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$
 $\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha$

→ Решение:

→ термни фиксирания тип

намираме кой го произвежда и решаваме
свободна заг. за него

$$\boxed{(x \Rightarrow y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow y) \Rightarrow x \Rightarrow z}$$

$\downarrow$
 x

и.т.н.

Типизиране в Харг-стил

↓
зафиксиране обекти (терм, тип)

def/ Използване T -множество от типове

$$\begin{cases} x \in T \\ (x, y \in T \Rightarrow (x \Rightarrow y) \in T) \end{cases}$$

Индуктивно деф. м-то Λ_T -типизиран термове
считаме, че имаме м-ва V_σ за всяко $\sigma \in T$, които
содържат издрочно много тип. променливи

$$\begin{aligned} V_\sigma &= \{x_\sigma, y_\sigma, \dots\} \text{ различноимен } V \\ V_\rho &= \{x_\rho, y_\rho, \dots\} \end{aligned}$$

1) Ако $x_\sigma \in V_\sigma$, то x_σ е тип. терм

2) Ако $M^{\rho \Rightarrow \sigma}$ и N^ρ , то $(M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^\rho)^\sigma$ е λ -терм.

3) Ако $x^\rho \in V_\rho$, то $(\lambda x M^{\sigma \Rightarrow \rho})^\rho \in \Lambda_T$

$\lambda x^\alpha x^\beta$, $\lambda x^\beta x^\alpha$ - това са $\neq$ идентитети, $\neq$ термове.

def/ Изтриване на тип

деф. $| \cdot | : \Lambda_T \rightarrow \Lambda$ с индукция по Λ_T

$$|x_\sigma| \rightarrow x$$

$$|(M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^\rho)| \rightarrow |M| |N|$$

$$|(\lambda x^\rho M^{\sigma \Rightarrow \rho})^\rho| \rightarrow (\lambda x |M|)$$

Q13.1) Ако $M^\sigma \in N$, то $\exists \Gamma$ такава, че $\Gamma \vdash |M| : \sigma$

Q13.1) Ако $M \in \Lambda$ и $\Gamma \vdash M : \sigma$ за някои Γ и σ , то $\exists M^* \in \Lambda^+$ таков, че $|M^*| = M$

Def Слабо типизирани термове

Λ_w

- $x \in V \Rightarrow x$ е слабо тип. тер
 - Ако M и N са с.т.т., то MN е слабо тип. тер.
 - Ако $x \in V$, $\sigma \in T$ и M е с.т.т.
 $\lambda x : \sigma. M$ е с.т.т.
- $\rightarrow$ $\approx$ както и в STT , параметри имат тип.

За Λ_w може да дефинираме $\Gamma \vdash M : \tau$. Ако имаме извод, който зав. на $M : \sigma$, то може да си поемем извода $(\lambda x : \rho. M) : \rho \Rightarrow \sigma$.

Q13.1) Ако $\Gamma \vdash M : \rho$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\rho : \tau$ } достатъчно е да въведем измествания по параметрите

Q13.1) $\Gamma \vdash M : \tau$
 $\Gamma \vdash x : \rho \Rightarrow \Gamma \vdash M[x \mapsto N] : \sigma$ (както в предното Q13.1)
 $\Gamma \vdash N : \rho$

субституцията - трябва име и тип да са = (те са както едно цяло)

$\frac{M : \alpha \Rightarrow \beta}{\forall x. M : \alpha \Rightarrow \beta}$ } Ако тип е полиморфен, то x може да е всеки тип
 това е разширение за полиморфизъм.

Силна нормализация

Def Казваме, че M е силно нормализируем, ако за всяка редица $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$ M_n е в нормална форма
 ↗ максимална
 || Не съществува безкрайна редица от редукции

цел. Вивши термове в Λ_T^* са силно нормализирани.

$$M P \Rightarrow \sigma$$

$$(M N)$$

def SN_k - м-ва

$$1) SN_0 = \{ M^\sigma \in \Lambda^T, M^\sigma \text{ е в н-нормална форма} \}$$

$$2) SN_{k+1} = \{ M^\sigma \in \Lambda^T \text{ такива, че от } M^\sigma \xrightarrow{P} N^\sigma, N^\sigma \in SN_k \}$$

Индукция $\Rightarrow SN_k =$ тези N^σ такива, че вивши възм.

редукция. ред. са с $len \leq k$.

$$TB: SN_k \subseteq SN_{k+1}$$

База: $k=0 \rightarrow OK$.

Стъпка: $SN_k \subseteq SN_{k+1} \rightarrow \dots$

$$\text{Нека } SN = \bigcup_k SN_k$$

$$T: N^\sigma \in SN \Leftrightarrow N^\sigma \text{ е силно норм.}$$

$\Rightarrow$ нека $N^\sigma \in SN \Rightarrow \exists k$ такива, че $N^\sigma \in SN_k$. Следукция по k намираме, че ако $N^\sigma \in SN_k \Rightarrow$ е силно норм. - OK.

$\Leftarrow$ Нека N^σ е силно норм. да доп, че $N^\sigma \notin SN$.

Това не е OK
 $\Downarrow \forall k N^\sigma \notin SN_k$
 $N^\sigma \notin SN_0 \Rightarrow \exists N_1^\sigma$ такива, че $N^\sigma \xrightarrow{P} N_1^\sigma$.
 $\downarrow$ Може да си изберем $N, N_1, N_2, \dots$

Лема 1. ~~Нека $M \in SN \Rightarrow M X \in SN$~~
Нека $M X \in SN \Rightarrow M \in SN$

Док-во:

$\exists k: M X \in SN_k$. Искаме да покажем, че $M \in SN_k$.

1) $k=0 \Rightarrow M X$ е в норм. форма $\Rightarrow M$ е в н.ф.

2) $k > 0$. Нека вземем $N: M \xrightarrow{P} N$. Искаме $N \in SN_{k-1}$
 $M X \xrightarrow{P} N X$ и $N X \in SN_k \Rightarrow$ OK, излезни.

Лема 2:

Нека $M_1, \dots, M_n \in SN$. Тогава

$$\lambda M_1 \dots M_n \in SN$$

$$\lambda M_1 \dots M_n$$

(213;1)

Лема 3:

Нека $M_1, \dots, M_n \in SN$. Нека $N \in SN$, $P \in SN$ и нека $N[x \rightarrow P] M_1 \dots M_n \in SN$. Тогава $(\lambda x N) P M_1 \dots M_n \in PSN$

С индукция по k ще покажем, че

ако $M_1, \dots, M_n, N, P, N[x \rightarrow P] M_1 \dots M_n \in SN_k$, то

$$(\lambda x N) P M_1 \dots M_n \in SN_{k+1}$$

Доп., че за $k' < k$ е вярно.

Избираме си Q такава, че $A \xrightarrow{B} Q$. Ще покажем, че $Q \in SN_k$.

1) $Q = N[x \rightarrow P] M_1 \dots M_n \in SN_k$ по даденото

2) $Q = (\lambda x N') P M_1 \dots M_n$

Тогава $N' \in SN_{k-1}$, $N \rightarrow N'$

$M_i \in SN_{m_i}$, $N \in SN_N$, $P \in SN_P$, $N[\dots] \in SN_N$.

С индукция по $\sum m_i + SN_N + SN_P + SN_N$

ще покажем, че $(\lambda x N) P M_1 \dots M_n \in SN$.

Нека $(\lambda x N) P M_1 \dots M_n \xrightarrow{B} Q$. Ако $Q \in SN \rightarrow$ всичко е наред (з-то Q -та е наред (са краен #))

1) $Q = N[x \rightarrow P] M_1 \dots M_n \Rightarrow$ ок по даденото

2) $Q = (\lambda x N') P M_1 \dots M_n$ } всичко ще е ок, ако $N'[x \rightarrow P] \in SN$
 $N' \in SN_{sum-1}$

Работа в клас

N е идеал наследствен от предишния път.

Индукция по λ на всички:

$(\lambda \times N) \vdash M_1 \dots M_n \xrightarrow{P} Q$. Искаме да покажем, че $Q \in SN$

1) $Q = N[x \rightarrow M] \vdash M_1 \dots M_n \in SN$ по зп. $\Rightarrow OK$

2) $Q = (\lambda x N') \vdash M_1 \dots M_n$, $N \xrightarrow{P_2} N'$

$N[x \rightarrow M] \vdash P \xrightarrow{P_2} N'[x \rightarrow M] \vdash P$

По и.п. $(\lambda x N') \vdash M_1 \dots M_n \in SN$

3) ... и т.н. по аналогично.

Цел. $\rightarrow SN = A^b$ - λ -термове $\in$ тип.

Def SC^{Ψ} - силно изчислимий термове от тип Ψ .

$$\left. \begin{array}{l} SN \subseteq A^b \\ SC \subseteq SN \\ A^b \subseteq SC \end{array} \right\} \Rightarrow ca = , \text{ това искаме}$$

1) $SC^{\lambda} = SN^{\lambda}$, $SN^{\lambda} \rightarrow$ всички силно нормализирани термове от тип λ

2) $SC^{P \rightarrow \Psi} \rightarrow$ ~~множество~~ $\rightarrow$ всяка силно изчислимия аргумент дават силно изчислимия резултат.

Лема 1:

1) $SC^{\Psi} \subseteq SN^{\Psi}$

2) $x^{\Psi} \in SC^{\Psi}$ за всяко Ψ (всяка пром. е силно изч.)

Индукция по Ψ :

$\rightarrow$ База: $\Psi = \alpha \Rightarrow SC^{\alpha} = SN^{\alpha} - OK$

$\rightarrow x^{\alpha} \in SC^{\alpha}$, ок, $x^{\alpha} \in SN^{\alpha}$

$\rightarrow$ стъпки: $\Psi = (P \Rightarrow \sigma)$, за P и σ е доказано.

Нека $N \in SC^{(P \Rightarrow \sigma)}$. Иначе $N \in SN^{(P \Rightarrow \sigma)}$

~~не е важно~~

Нека си изберем променлива x^p . По и.п. $x^p \in SC^p$

$M^{p \Rightarrow \sigma} \in SC^{p \Rightarrow \sigma} \Rightarrow Mx \in SC^{\sigma}$. По и.п. $Mx \in SN^{\sigma} \Rightarrow$
 $\Rightarrow M \in SN^{\sigma}$ (иначе такава твърдение)

2) Иначе $x^{(P \Rightarrow \sigma)} \in SC^{(P \Rightarrow \sigma)}$

Нека $\Psi = (p_0 \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n)$

Нека M_i са терми, взети от SC^{p_i}

Ако док, че $x M_1 \dots M_n \in SC^{\sigma}$, може да се върнем по
 обратното

$M_i \in SC^{p_i} \xrightarrow{\text{и.п. 1}} M_i$ са силно нормализирани

$\Rightarrow$ Т.к. $M_1 \dots M_n \in SN \Rightarrow x M_1 \dots M_n \in SN$, а $SN^{\sigma} = SC^{\sigma} \Rightarrow x M_1 \dots M_n \in SC^{\sigma}$
 това е от т.п. 1

■

Тб: Ако M, N и P са силно нормализирани и $M[x \rightarrow N]P \in SC^{\Psi}$,
 то $(\lambda x M)NP \in SC^{\Psi}$

Индукция по Ψ :

1) Ако $\Psi = \sigma \Rightarrow SC^{\sigma} = SN^{\sigma} \Rightarrow$ от горното (1-то) твърдение

2) Нека $\Psi = (p \Rightarrow \sigma)$

Нека $M[x \rightarrow N] \vec{P} \in SC^{(p \Rightarrow \sigma)}$

Иначе $(\lambda x M)NP \in SC^{(p \Rightarrow \sigma)}$

↓
 Взимаме аргумент и прилагаме

от предната лема това е силно норм.
 ||

$\lambda x M[x \rightarrow N] \vec{P} \alpha \in SC^{\sigma} \Rightarrow$ По и.п. $(\lambda x M)NP \in SC^{\sigma}$

Всички λ -терми е строго изчислени.
 $M \Rightarrow \Lambda^t \Rightarrow M \in SC^t$

Def $\xi: V^T \rightarrow \Lambda^T$ наричаме субституция, ако типа на арг. и типа на резултата съвпадат
 (Алтернативно: $\xi = \begin{matrix} x_0^{t_0} \rightarrow m_0^{t_0} \\ \vdots \\ x_s^{t_s} \rightarrow m_s^{t_s} \end{matrix} \rightarrow$ намаляване)

Def Накаваме, че ξ е строго изчисленима, ако $\forall x^t \in \xi(x^t) \in SC$ (това строго изчисленими резултати)

Лема 2: Ако ξ е строго изчисленима, то $M\xi$ е строго изчисленима

соф-во: Индукция по M

1) База: $M^t = x^t$

$M\xi = \xi(x) \in SC^t$, понеже ξ е строго изч.

2) $M^t = (M_1^{p \Rightarrow \sigma} M_2^p)$

$$M^t \xi = \underbrace{(M_1^{p \Rightarrow \sigma} \xi)}_{\in SC^{p \Rightarrow \sigma}} \underbrace{(M_2^p \xi)}_{\in SC^p} \Rightarrow M^t \xi \in SC^{\sigma}$$

3) $M^{\hat{\sigma}} = (\lambda x. N)$
 $\downarrow$
 $p \Rightarrow \sigma$

$$M^{\hat{\sigma}} \xi = (\lambda x. N \xi^t)$$

$$\xi^t(\beta) = \begin{cases} SC \vdash \lambda y. y \neq x \\ \text{за } \lambda y. x \end{cases}$$

// Блокиране в x

ξ^t очевидно е строго изчисленимо

$\Downarrow$
 и.п. $(N \xi^t) \in SC^{\sigma}$

Имаме $(\lambda x. p N \xi^t) \in SC^{p \Rightarrow \sigma}$

За целта взимаме произволно $P \in SC^P$. $(\lambda x^P \vee \xi) \wedge P$
 $\downarrow$
 $\xi \wedge P \in SC^P \Rightarrow \xi \wedge P$

$$(\lambda x^P \vee \xi') [x \rightarrow P]$$



това е като да изпитаме $\lambda \xi''$ със ξ'' ^{сильно} изпитана.

$\downarrow$
 по и-т. това е също
 изпитано $\Rightarrow OK$.

~~за $\xi \wedge P$~~

$\Leftarrow$ по Тб. $(\lambda x^P \vee \xi') P \in SC^P, OK$.



Следствие:

$\lambda^2 \subseteq SC \rightarrow$ разменване $\xi = id$
 $\rightarrow$ тази е също изпитана.



$(term) \xi = term$ е също изпитано, OK .

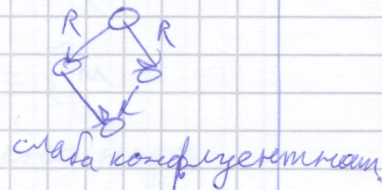
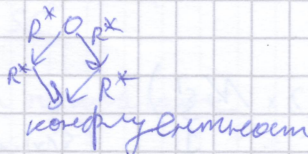
Следствие: В Λ^P всеки терм има точно 1 норм. форма

$\rightarrow$ конфигуентност ≥ 1
 $\rightarrow$ норматив ≥ 1 $\Rightarrow OK$.

$\rightarrow$ както се дава ~~се~~ по всяка възможна
 редукция редукции.

Лема (Клокард):

Нека R е релация, R^* е рефл., транзит., симетр.
 затваряне.



Тб: Нека R е също нормализируема (няма безер. редукции) и
 слабо конфигуентна. $\Rightarrow R$ е конфигуентна.

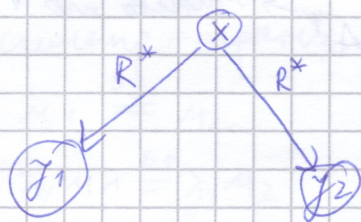
$SN_0 \rightarrow$ тежи в норм. форма | $SN = U SN_K$.
 $SN_K \rightarrow x R y \Rightarrow y \in SN_{K-1}$

$\rightarrow$ + за всяко x и-то $y \rightarrow x R y$ е крайно

Ако R е строго корч. $\Rightarrow SN = (dom R)$

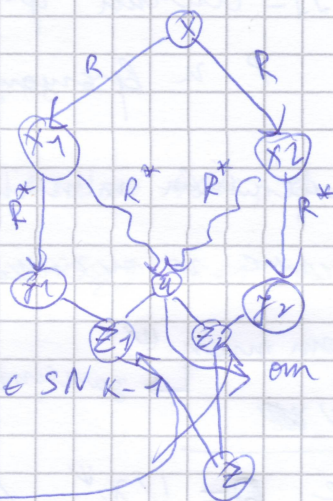
Нека сме взели $x \in SN_K$ (3-мо релацията е крайно разл.)

Нека имаме y_1 и y_2 : $x R^* y_1$, $x R^* y_2$



1) ако $x = y_1$ или y_2 - очевидно
(взимаме $z = y_1$ или y_2)

2) $x R x_1 R^* y_1$
 $x R x_2 R^* y_2$



$\rightarrow x \in SN_K \Rightarrow x_1$ и $x_2 \in SN_{K-1}$ от слаба конфигурация.

по и.п.

между отивам до $z \Rightarrow OK$.

Нормализация чрез оценяване
(normalization by evaluation)

def $\rightarrow$ Модел на λ -изчисления

λ -интерпретация:

Нека имаме изображение $[\cdot]$, като по тип ψ съпоставя M -во и на всеки терм M от тип ψ съпоставя елемент $M^\psi \in \mathcal{U}$
затворен.

Това това изображение наричаме λ -интерпр.

def Ако всеки път от $M \equiv N \Rightarrow [M^\psi] = [N^\psi]$, то
това наричаме модел на λ -изчисления.

Пример:

$$([x] = \{0\}) - \text{OK.}$$

$$([term] = 0)$$

Теоретико-множественный модел:

Дана е функция от M -ва $A^V \rightarrow$ множества V .

Дефиниране:

$$[x] = A^x$$

$$[P \Rightarrow Q] = \text{всички } f\text{-и, взимайки аргумент в } P \text{ и връщащи резултат в } Q.$$

Нека x е променлива от тип $\psi \rightarrow$ стойност от A^ψ
 $\hookrightarrow$ наричаме го оценка.

Нека x е пром. от тип ψ .
 $\hookrightarrow$ заместваме $x \rightarrow a \rightarrow$ така мод. оценка.

Нека имаме $\Theta = \bigcup x^\psi$, M е терм от Λ^+ .

Дефиниране индуктивно M при оценка Θ

1) $x \rightarrow$ ако е променлива - явява

2) $(M \supset N)_x = [M]_x [N]_x \rightarrow$ интерпр. е прилагане на f -а.

3) $[x M] =$ взимаме M в оценката x заместено с взетата конкретна стойност

$\hookrightarrow$ За M -замкрит терм дефиниране като M над произволна оценка Θ .

Лема 3.1 Ако $\forall x \in \text{var } \text{тсв} \ M \ \xi_1(x) = \xi_2(x)$, то $[M]_{\xi_1} = [M]_{\xi_2}$

тв. Дефинираното е модел на λ -м.

Рок - во:

Индукция $\xrightarrow{B} \xrightarrow{B}$

по $\xrightarrow{B}$ - ясно директно по деф.

1) рефл., симетр., транзит. - ясно $\Rightarrow$ ще покаже само за 1 стъпка.

2) Нека $M_1 \stackrel{B_0}{=} M_2$

$$\lambda_x M_1 \stackrel{B_0}{=} \lambda_x M_2$$

$$N M_2 \stackrel{B_0}{=} N M_1$$

$$M_2 N \stackrel{B_0}{=} M_1 N$$

$\downarrow$
Значи:

$$[[M_1 N]]_x = [[M_1]]_x [[N]]_x \rightarrow \text{ок, ф-и заедно дават равни арг. дават резултати.}$$

3) Нека $M \xrightarrow{B} N$.

$$(\lambda_x M) N \stackrel{B_0}{=} M[x \rightarrow N].$$

Чекане за видни интерпр.

Нека x е оценка

$$[[(\lambda_x M) N]]_x = [[\lambda_x M]]_x [[N]]_x = \underbrace{[[M]]_x}_{\text{резултат}} \rightarrow [[N]]_x =$$

$$= \underbrace{[[M[x \rightarrow N]]]}_x$$

Р/З: 1) субст. е съгласувана относно интерпр.

4) Нека $(\lambda_x M x) \stackrel{B_0}{=} M_x$

$$[(\lambda_x M x)]_x = [[M_x]]_x$$

$\downarrow$ взимане произволно x

$$[(\lambda_x M x)]_x(x) = [[M_x]]_{x \rightarrow A} = \underbrace{[[M]]_x}_{\text{резултат}} \xrightarrow{x \rightarrow A} \underbrace{[[x]]_x}_{A} = \underbrace{[[M]]_x(A)}_{\text{резултат}}$$

⇒ Возмемуже

$$A_{\lambda} = \{ M_{\lambda} \mid M_{\lambda} \in \Lambda_{\lambda} \text{ и } M_{\lambda} \text{ удовлетворяет условиям} \}$$

↓
только по базовым типам

$$[[M]] = M', \text{ нормальная форма на } M$$

уже док., что ако M е в норм. форма $\Rightarrow [[M]] = M$
 ↓
 от това ще получим

$$\begin{array}{l} M \xrightarrow{\beta} N \\ \Gamma \vdash N : \tau \\ \Gamma \vdash M : \tau \end{array}$$

$$\lambda x y X$$

$$\lambda x \lambda y X$$

$$(\lambda x X) (\lambda y X) = \lambda y X$$

↓
 $a \Rightarrow a \quad a \Rightarrow a$

def Дана β нормална форма.

→ M е в н.а., ако не $\exists N$ такова, че 1) $M \xrightarrow{\beta} N$

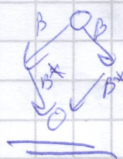
$$2) \exists N: N \xrightarrow{\beta} M$$

↓
 λ не можем всички възможни λ -зи.

↓
 за да стане базов тип-вдвонето

0/3:1) $\forall N$ съществува единствена β норм. форма (с точност до α -редукция). $\Leftarrow$

2) 0/3:1) $\xrightarrow{\beta}$ е слабо конгруентна



цел: $[[M]] = M$ ако M е в нормална форма.

ще дефинираме изобразението:



- не е дефиниране с индукция по τ

$$1) \uparrow_{\tau} (M^{\sigma}) = M^{\sigma} \rightarrow \text{идентитет}$$

$$\downarrow_{\tau} M^{\sigma} = M^{\sigma}$$

$$2) \uparrow_{\rho \Rightarrow \sigma} (M^{\rho \Rightarrow \sigma}) (a)$$

от тук $\rho \Rightarrow \sigma$

} разширяване id

$$\downarrow_{\rho \Rightarrow \sigma} (f) = \lambda x^{\rho} \downarrow (f (\uparrow x^{\rho}))$$

$\downarrow_{\rho \Rightarrow \sigma}$ $\downarrow$ избиране нова пром. x^{ρ}

Лема 1

ДЗ.1) Нека имаме типове ρ_i за i от 1 до n и нека a_i са елементи от σ_i . Нека M е терм от тип $\rho_1 \Rightarrow \rho_2 \Rightarrow \rho_3 \dots \Rightarrow \sigma$.

$$\text{Тогава } (\uparrow M) (A_1) (A_2) (A_3) \dots (A_n) = \uparrow (M \downarrow_{\rho_1} A_1 \downarrow_{\rho_2} A_2 \dots)$$

ДЗ.2) Нека M е в дълга ρ нормална форма. Тогава имаме един от следните случаи

$$1) M = \lambda x^{\rho} N, N \text{ е в дълга нормална форма}$$

$$2) M = x^{\rho \Rightarrow \sigma} N \text{ и } N \text{ е в дълга нормална форма}$$

$\rightarrow$ в дефинициите λ означава $\rightarrow$ глава норм. форма

Т. за коректност.

Нека M^{σ} е в дълга нормална форма.

Тогава $\downarrow_{\tau} [\uparrow M]_{\uparrow} = M$ (λ -субвалентност)

$\rightarrow$ индукция по τ

$$1) M = \lambda x^{\rho} N. \text{ Тогава по и.п. } (\downarrow_{\tau} [\uparrow N^{\sigma}]_{\uparrow}) = N$$

и $\tau = \rho \Rightarrow \sigma$

$$\downarrow_{\tau} [\uparrow \lambda x^{\rho} N^{\sigma}]_{\uparrow} = \lambda x^{\rho} \downarrow_{\tau} ([\uparrow \lambda x^{\rho} N^{\sigma}]_{\uparrow}) (\dots) = \lambda x^{\rho} \downarrow_{\tau} [\uparrow N]_{\uparrow} \dots$$

$$= \dots \llbracket N[x \rightarrow j] \rrbracket \dots \stackrel{n.p.}{=} \lambda x N$$

2) Мелка $M = x \vec{N}^{\vec{p}}$
 $\hookrightarrow$ м ом мум τ , $\tilde{\tau} = \tau - \text{дгдв мум}$.

$$\downarrow \llbracket N_i^{p_i} \rrbracket \uparrow = N_i^{\tau}$$

$$\downarrow \llbracket x \vec{N} \rrbracket \uparrow = \llbracket x \vec{N} \rrbracket_{\tau} = \llbracket x \rrbracket_{\tau} (\llbracket N_1 \rrbracket_{\tau}, \llbracket N_2 \rrbracket_{\tau}, \dots, \llbracket N_k \rrbracket_{\tau}) \stackrel{id}{=} \dots$$

$$= \uparrow_{\tau} (x^{\vec{p} \Rightarrow \tau} (\underbrace{\downarrow \llbracket N_1 \rrbracket \uparrow}_{N_1}, \underbrace{\downarrow \llbracket N_2 \rrbracket \uparrow}_{N_2}, \dots, \underbrace{\downarrow \llbracket N_k \rrbracket \uparrow}_{N_k})) =$$

$$= x \vec{N}^{\tau}, \sigma_K$$

$\downarrow$ 2/3.1) Reading uprite горното на scheme! $\uparrow$

Работа в клас

$$\begin{array}{c|c} M \xrightarrow{B} N & M \xrightarrow{B} N \\ \hline \Gamma \vdash N:p & \Gamma \vdash N:p \\ \Gamma \vdash M:p & \Gamma \vdash M:p \end{array}$$

Теория на доказателствата

(Basic Proof Theory - книга)

$L = \langle G, F, P \rangle$
 $\downarrow$ константи $\rightarrow$ предикатни символи
 $\rightarrow$ функции символи
 $\rightarrow$ реви са кройни n -ва
 $\text{Var} \rightarrow$ изоброщено много променливи

Терм: 1) const е терм

2) var е терм

3) $f \in F$, $\#f = n$

$\Downarrow$
 $f(t_1, \dots, t_n)$ е терм.

=
 формула: 1) Ако $p \in P$, $\#p = n$
 $\Downarrow$
 $p(t_1, \dots, t_n)$ е ф-ла (атомарна ф-ла)
 2) ако a, b са формули, то $a \rightarrow b$ са ф-ли.
 $a \wedge b$
 $a \vee b$

3) Ако x е пром., то

$\forall x A$ и $\exists x A$ са ф-ми

diff

- свободни пром. на терм
- свобод. пром. на ф-ма
- свързани пром.
- заместителни с терм

Лема: $x \notin VF(T)$, субст. няма ефект.

{ Считаме, че иначе фиксиран предикатен символ $\perp \rightarrow$ лъжа
 $\neg A := A \rightarrow \perp$

$$A \wedge B = (A \rightarrow B \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$$

~~$\rightarrow$ не е вярно, че~~

$\vdash A \wedge B$ - не вярно поема.

$$A \vee B = (A \rightarrow \perp) \rightarrow (B \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$$

и $\perp$ -те да не са вярни е лъжа.

$$\neg \forall x A := \neg \forall x \neg A$$

$\rightarrow$ минимална логика

$\rightarrow$ интуиционистка логика

$\rightarrow$ класическа логика

$\rightarrow$ Хилбертови с-ми

$\rightarrow$ Гьоттлоу с-ми

$\rightarrow$ системи за ~~не~~ естествен извод.

Хилбертови системи

1) Аксиоми на Хилберт

$$\rightarrow \forall A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow B \rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$1) (A \wedge B) \rightarrow A \quad (A \wedge B) \rightarrow B$$

$$A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$$

$$2) A \rightarrow A \vee B, B \rightarrow A \vee B$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B) \rightarrow C$$

$$3) (\forall x A \rightarrow A[x \mapsto t]), t \text{ - произволен}$$

$$(\forall x (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow \forall x A), x \notin FV(B) \\ \text{или} \\ x \notin FV(A)$$

$$4) A[x \mapsto t] \rightarrow (\exists x A)$$

$$(\forall x (A \rightarrow B)) \rightarrow ((\exists x A) \rightarrow B), x \notin FV(B) \\ \text{или} \\ x \notin FV(A)$$

(MP)
сигурително правило

Def Нека Γ е м-во от формули

Def. $\Gamma \vdash A$ като:

Имаме списък от ф-ли $A_0, \dots, A_n$, $A_n \equiv A$ и
освен това $\forall A_i$ е изписано:

- $A_i \in \Gamma$
- A_i е инстанция на някоя от аксиомите
- $\exists j < i$ такова, че $A_i = A_j \rightarrow A_i$
- $\exists j < i$ такова, че $A_i \equiv \forall x A_j$ и $x \notin FV(\Gamma)$

не $\downarrow$ сред
сводените
правила
на дотукващо

Пример:

$$\vdash A \rightarrow A \rightarrow A \quad A \rightarrow A$$

$$\vdash (A \wedge A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow A \rightarrow A)$$

$$2) A \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$3) \text{от 1) и 2) } (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow A \rightarrow A$$

4) $A \rightarrow B \rightarrow A$ аксиома

5) отсюда 9) $A \rightarrow A$

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

$$\vdash A \rightarrow \neg \neg A$$

$$A \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$$

$$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\begin{array}{l} B \\ A \rightarrow C \\ B \rightarrow C \end{array}$$

$$A \rightarrow A \rightarrow A$$

$$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

$$A \rightarrow A$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A \rightarrow B$$

$$\begin{array}{l} B \rightarrow B \\ (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \end{array}$$

$$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$$\cancel{A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)}$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B))$$

$\downarrow$
от $(\lambda x y Jx) \rightarrow$ от нуля сдвиг $\Rightarrow$ гек-мо

Теорема за дедукцията

$\Gamma \cup \{A\} \rightarrow B$, то $\Gamma \rightarrow (A \rightarrow B)$

док-во:

Нека $A_0 \dots A_n$ е док. $\Gamma \cup \{A\} \rightarrow B$

Ще построим док-во, което ще съдържа ф-те

$A \rightarrow A_i$. Винаги $A \rightarrow A_n$, което ни трябва

$\rightarrow$ индукция по док-то

1) $A_i \in \Gamma$

заместване $\{A_i \rightarrow A \rightarrow A_i\}_{A_i} \Rightarrow A \rightarrow A_i$

2) Ако $A_i = A \rightarrow$ имаме $A \rightarrow A$ на предната стр.

3) A_i е аксиома: $\{A_i \rightarrow A \rightarrow A_i\}_{A_i} \Rightarrow A \rightarrow A_i$, ок.

4) $\exists k, j < i$, $A_k = A_j \rightarrow A_i$

$\downarrow$
 $A \rightarrow A_k \Rightarrow A \rightarrow (A_j \rightarrow A_i)$

$A \rightarrow A_j$

по акс.

$(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow \dots$

$\downarrow \Rightarrow$ по л. $A \rightarrow A_i$

5) $\exists j < i$: $A_i = \forall x A_j$, $x \notin VF(\Gamma) \cup VF(A)$

По и.р. $A \rightarrow A_j$

? $A \rightarrow A_i$

$\forall x A \rightarrow A_j$

$\rightarrow \forall x (A \rightarrow A_j)$

$\downarrow$
 $A \rightarrow \forall x A_j \Rightarrow A \rightarrow A_i$, ок.

Заб: 1) $A \wedge B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
 $\neg \exists x A \rightarrow \forall x \neg A$

— Тук не може да док. $(\neg \neg A) \rightarrow A$

$(H_i = H \cup V)$ → хилбертова с-на от горе
 $(\perp \rightarrow A)$ - аксиома {интуиционистка логика}

$(H_c = H \cup V + (\neg\neg A \rightarrow A))$
 ↓ аксиома за стабилност
 класическа логика

$\neg \forall x A \rightarrow \exists x \neg A$ → в класическа логика е вярно
 в интуиционистка не е
 → "не може да дадем свидетел"

$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ → вярно в класическа логика
 но не в интуиционистка
 → ф-ла на Пирс.

$A \vee \neg A$ → вярно в клас., не вярно в интуиционистка.

Системи за секвенциално
смятане

(Герхард Генцен)

61

~~def~~ Секвенс - израз от вида $\Gamma \Rightarrow \Delta$, където Γ и Δ
 са мултимножества от ф-ли
 $\{A, A\}$ е мултипл. $\neq \{A\}$.

(AKC) - аксиома: $(A \rightarrow A)$

Структурни правила:

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Delta, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

$$\frac{A, \Gamma, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

{ ляво-предпоставки
 десно-резултати.

Правила

$$\frac{A_0, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

дисъюнкция) $\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta}$

$\downarrow$
или и за
 $\frac{\Gamma \Rightarrow A \vee B}{\dots}$

$\rightarrow)$ $\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta}$

$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$

$\forall)$ $\frac{A[x \rightarrow t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad || \text{ още 1 правило за използване}$

$\exists)$ $\frac{\Gamma \Rightarrow A[x \rightarrow t]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A} \quad || \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}, x \notin FV(A)$

$\uparrow$
~~това е минимална логика~~
док-во - дърво, завершващо на ф-ла.

$\frac{+}{\perp \Rightarrow}$
прозек от гласно.

Δ

$G \vdash A \Leftrightarrow$ може да построим док-во на следващата
 $\emptyset \Rightarrow A$

Пример

$G \vdash (A \Rightarrow A)$

$\hookrightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \Rightarrow B}$

$$A \Rightarrow \neg \neg A$$

$$\frac{A \Rightarrow \neg}{A, \neg A \Rightarrow \perp}$$

$$\emptyset \Rightarrow A, \neg A \quad \text{д/з: 1) поимоти.}$$

$$\frac{B \Rightarrow B}{B \Rightarrow C, B} \quad \frac{C, B \Rightarrow C}{B \Rightarrow C, A, B} \quad \frac{A, B \Rightarrow C, B}{C}$$

интуиционистика $\rightarrow$ в десните страни само по 1 ф-ла
 $\downarrow$ $G1I = G1C$, в което Δ се заменя с не повече от 1 ф-ла

$$\langle G1M \rightarrow G1I \text{ д/з } (\perp \Rightarrow) \rangle$$

$$v1) \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\emptyset \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A \Rightarrow A$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow C), A \Rightarrow C, A$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow C), (A \rightarrow B), A \Rightarrow C$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow C), (A \rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

$$(A \rightarrow B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$\emptyset \Rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

(д/з: 1) доказателств. аксиомите на Хилберт.

$$\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\Rightarrow \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \wedge B), \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$(A \wedge B) \rightarrow \perp \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\emptyset \Rightarrow \neg A \vee \neg B, A \wedge B$$

$$\perp \Rightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\perp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$$

~~$\emptyset \Rightarrow$~~

$$(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

$$(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow (A \wedge B) \Rightarrow \perp$$

$$(A \wedge B), (\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \perp$$

$$\neg A, (A \wedge B) \Rightarrow \perp \quad ; \quad \neg B, (A \wedge B) \Rightarrow \perp$$

$$\neg A, A \Rightarrow \perp$$

$$\boxed{\text{Q13.1) } \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B}$$

$$\vdash \neg \forall x A \Rightarrow \exists x \neg A$$

$$\vdash \exists x \neg A \Rightarrow \neg \forall x A$$

$$\Rightarrow \neg \forall x A \rightarrow \exists x \neg A$$

$$\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$$

$$(\forall x A) \rightarrow \perp \Rightarrow \exists x (A \rightarrow \perp)$$

$$(\forall x A) \rightarrow \perp \Rightarrow (A \rightarrow \perp)$$

$$\emptyset \Rightarrow \exists x \neg A, \forall x A$$

$$\emptyset \Rightarrow \exists x \neg A, A \text{ (crossed out)}$$

$$\perp, \Rightarrow \exists x (A \rightarrow \perp)$$

$$\perp \Rightarrow$$

$$\Gamma \Rightarrow \neg A, A$$

$$\Gamma \Rightarrow A \rightarrow \perp, A$$

$$\Rightarrow \exists x \neg A \rightarrow \neg \forall x A$$

$$\exists x \neg A \Rightarrow \neg \forall x A$$

$$\exists x (A \rightarrow \perp) \Leftrightarrow (\forall x A) \Rightarrow \perp$$

$$\exists x (A \rightarrow \perp), (\forall x A) \Rightarrow \perp$$

$$A[x/t], \exists x (A \rightarrow \perp) \Rightarrow \perp$$

$$A[x/t], (A \rightarrow \perp)[x/t] \Rightarrow \perp \mid A, A \rightarrow \perp \Rightarrow \perp \mid A \Rightarrow A \quad \perp \Rightarrow \text{OK}$$

$$\textcircled{2/3.1) (\neg \exists x A \mid \Leftrightarrow \forall x \neg A}$$

$$\frac{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A}{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \Rightarrow A}$$

$$\frac{((A \rightarrow B) \rightarrow A) \Rightarrow A}{\emptyset \Rightarrow (A \rightarrow B), A \mid \Rightarrow A \rightarrow A}$$

$$\frac{A \Rightarrow B, A}{A \Rightarrow A} \quad \text{OK.}$$

$$A \Rightarrow B, A$$

$$A \Rightarrow A$$

OK.

$$\Rightarrow \exists x (A \rightarrow \forall x A)$$

$$\Rightarrow \exists x (A \rightarrow \forall x A), \exists x (A \rightarrow \forall x A)$$

$$\Rightarrow A[x/c] \rightarrow \forall x A$$

$$A[x/c] \Rightarrow \forall x A$$

$$A[x/c] \Rightarrow A$$

$\rightarrow x \notin FV(A) \Rightarrow c \text{ с } x \text{ не може да заменим}$

$$\Rightarrow \exists x (A \rightarrow \forall x A), \exists x (A \rightarrow \forall x A)$$

$$\Rightarrow A[x/c] \rightarrow \forall x A, \exists x (A \rightarrow \forall x A)$$

$$A[x/c] \Rightarrow \forall x A, \exists x (A \rightarrow \forall x A)$$

$$A[x/c] \Rightarrow A, \exists x (A \rightarrow \forall x A)$$

$$A[x/c] \Rightarrow A, A \rightarrow \forall x A$$

$$A[x/c], A \Rightarrow A, \forall x A$$

$$A \Rightarrow A, \text{OK.}$$

Правило за отсичане:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \quad \left. \vphantom{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}} \right\} \text{зичане леми}$$

За индукци...

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta}$$

$$\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

и аналог. за

Теорема: Ако в G_1 може да докажем $A \Rightarrow$
 свт-ф-ла

$\Rightarrow$ може да докажем и без свт-правило

$\hookrightarrow$ т.е. може да използваме леми

T: Ако в G_1 имаме док. на A , тогава всички
 ф-ли в док-то са подформули на A

$\hookrightarrow$ т.е. може да имаме само в по-прости ф-ли

Работа в клас

// Консипетентна - да няма док-во на $\perp$
 $\frac{P, \neg P}{\perp}$ да ~~не~~ са изводими

// Свт Правило:
$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

T: $G_1 + \text{свт} \vdash A \Rightarrow G_1 \vdash A$

def: A е подформула на B ($A \leq B$)

1) $A \leq A$

2) Ако $A \leq B$, то $A \leq B \rightarrow C$ $B \wedge C$
 $C \rightarrow B$ $C \vee B$
 $B \vee C$ $C \wedge B$

3) Ако Σ е три, X -променлива,

$A \leq B[X/\Sigma]$, то $A \leq \forall x B$ и $A \leq \exists x B$

T: Ако в $G_1 \vdash A$, то за всяка аксиома в доказа-
 телството B е подформула на A

От G може също така да се нахванат структурн. акс.

к/з: 1) Ако в $G_1[\bar{m}, \bar{c}] \vdash A$, то може да се
 намери такова док-во, в което се използват
 само акс. $p(t_1 \dots t_n) \Rightarrow p(t_1 \dots t_n)$
 $\hookrightarrow$ само атомарни ф-ли може да изн.

✓

отнасяване:

то ва е G3

$\{P, \Gamma \Rightarrow \Delta, P$ (р-атомарна ф-ла)
 $\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta$

за класически

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$\frac{\forall x A, A[x/z], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}, \quad x \notin FV(\Gamma, A)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad x \notin FV(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/z], \exists x A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}$$

1 D/B:1) по петтези - също време / също така

Системи за естествен извод

Док-ва са дървета от формули, построени по логически правила. За всеки логически символ има 2 типа правила - за въвеждане (introduction) и изнасяване (elimination).

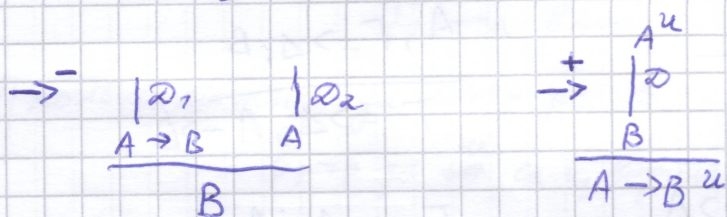
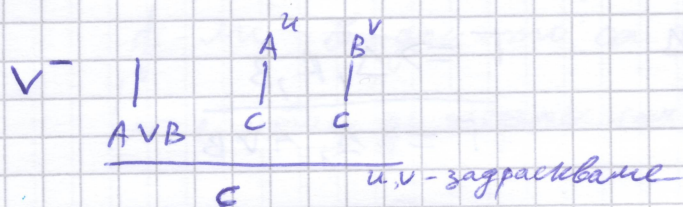
$$\begin{array}{c} \wedge^+ : \frac{\begin{array}{c} | \mathcal{D}_1 \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} | \mathcal{D}_2 \\ B \end{array}}{A \wedge B} \quad \left| \quad \wedge^- : \frac{\begin{array}{c} | \mathcal{D} \\ A \wedge B \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} | \mathcal{D} \\ A \wedge B \\ B \end{array}}{A \quad B} \right. \\ \vee^+ : \frac{\begin{array}{c} | \mathcal{D} \\ A \end{array} \quad \begin{array}{c} | \mathcal{D} \\ B \end{array}}{A \vee B \quad A \vee B} \quad \left| \quad \vee^- : \frac{\begin{array}{c} | \\ A \vee B \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ A \vee B \\ C \end{array}}{C} \right. \end{array}$$

листата на дърветата са допускания.

При използване на допускание го задраскване

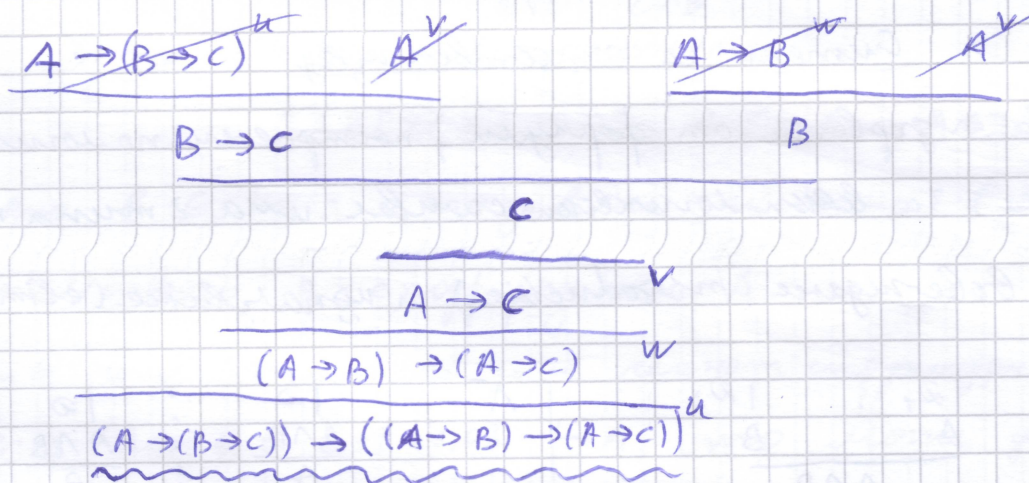
↓
при V^- - задраскване A и B

Всичко листо на дървото означаване с етикет от дадено изчислено и-во етикети. Всички етикети трябва да се използват за една и съща ф-ла. (обратно незад).



{ Казваме, че $N[m; c]$ се доказва A когато имаме док-во
с корен A , в което всички допускания са задраскани

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$



$\forall^+$ $| \mathcal{D}$
 A
 $\forall x A$ x не се среща в свободните допускания, които не са задраскани

$$\forall^-: \frac{\forall x A}{A[x/z]} \quad \frac{\forall x A}{A[x/z]} z$$

$$\exists x^+: \frac{\mid \mathcal{D} \quad A[x/z]}{\exists x A}$$

$\exists x^-:$

$$\frac{\exists x A \quad \frac{\mid \mathcal{D}_1}{\exists x A} \quad \frac{\mid \mathcal{D}_2}{A[x \rightarrow t]} \quad \frac{A[x \rightarrow t]}{C} u}{C} u$$

Това е за N_m минимална логика

x не се среща във $FV(C)$.

С изключване на A x не се среща в $\mathcal{D}$ незадръжкани допускания в $\mathcal{D}_2$

$$N_i = N_m + \frac{\mid \mathcal{D} \quad \perp}{\perp : \frac{\perp}{A}}$$

$$N_c = N_m + \frac{A \rightarrow \perp^u \quad \perp}{A} u$$

извеждаме A , като допуснем $\neg A$

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B \quad \text{ДВ:1) другото}$$

$$((A \vee B) \rightarrow \perp) \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp))$$

$$\frac{\frac{B}{A \vee B} \quad \frac{(A \vee B) \rightarrow \perp^u}{(A \vee B) \rightarrow \perp^v} \quad \perp}{B \rightarrow \perp}$$

$$\frac{A \rightarrow \perp^u \quad (A \vee B) \rightarrow \perp^v}{A \vee B} \quad \frac{\perp}{(A \rightarrow \perp)}$$

$$((A \vee B) \rightarrow \perp) \rightarrow ((A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp))$$

→ този закон използва изложено с мик.
логика

$$\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$$

|| другият → една посока → мин.
гр. посока - клас

$$(A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp) \rightarrow (A \vee B) \rightarrow \perp$$

$$\begin{array}{c} (A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp) \textcircled{1} \\ \hline A \rightarrow \perp \\ \hline A \textcircled{2} \\ \hline \perp \\ \hline A \rightarrow \perp \end{array}$$

$$\begin{array}{c} A \textcircled{1} \\ \hline A \vee B \\ \hline A \vee B \end{array} \quad A \rightarrow \text{false}$$

$$\begin{array}{c} (A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp) \textcircled{1} \\ \hline A \rightarrow \perp \\ \hline A \textcircled{2} \\ \hline \perp \end{array}$$

$\begin{array}{c} (A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp) \\ \hline A \rightarrow \perp \\ \hline \perp \\ \hline (A \vee B) \rightarrow \perp \end{array}$	$\begin{array}{c} A \vee B \\ \hline A \\ \hline \perp \end{array}$	$\begin{array}{c} A \vee B \\ \hline B \\ \hline \perp \end{array}$
--	---	---

$\begin{array}{c} (A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp) \textcircled{1} \\ \hline A \rightarrow \perp \\ \hline \perp \\ \hline (A \vee B) \rightarrow \perp \\ \hline ((A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow \perp) \end{array}$	$\begin{array}{c} A \vee B \textcircled{2} \\ \hline A \\ \hline \perp \end{array}$	$\begin{array}{c} A \vee B \textcircled{1} \quad A \textcircled{2} \quad (A \rightarrow \perp) \wedge (B \rightarrow \perp) \textcircled{3} \\ \hline A \rightarrow \perp \\ \hline \perp \\ \hline \perp \end{array}$
--	---	--

→ minlog - с.-ма за подобен извод.

$$\neg \exists x D(x) \leftrightarrow \forall x \neg D(x)$$

$$((\exists x D(x) \rightarrow \perp) \rightarrow (\forall x (D(x) \rightarrow \perp)))$$

$$\neg \forall x D(x) \leftrightarrow \exists x \neg D(x)$$

$$\exists x \neg D(x) \rightarrow (\forall x D(x) \rightarrow \perp)$$

$$\exists x (D(x) \rightarrow \perp) \rightarrow (\forall x D(x) \rightarrow \perp)$$

$$\exists x (D(x) \rightarrow \perp) \quad (1)$$

$$D(x) \rightarrow \perp \quad (2)$$

$$\forall x D(x) \quad (3)$$

$$D(x) \quad x=x$$

$$\perp$$

$$\frac{\frac{\perp}{\forall x D(x) \rightarrow \perp}}{(\exists x (D(x) \rightarrow \perp) \rightarrow (\forall x D(x) \rightarrow \perp))}$$

.....

$$((\exists x (D(x) \rightarrow \perp) \rightarrow (\forall x D(x) \rightarrow \perp)) \rightarrow (\exists x (D(x) \rightarrow \perp)))$$

$$D(x) \rightarrow \perp \quad (4)$$

$$\exists x (D(x) \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \quad (5)$$

$$\exists x (D(x) \rightarrow \perp)$$

$$\frac{\frac{\perp}{D(x)}}{\forall x D(x)}$$

$$\forall x D(x) \rightarrow \perp$$

$$\frac{\perp}{\exists x (D(x) \rightarrow \perp)}$$

$$((\exists x (D(x) \rightarrow \perp) \rightarrow (\forall x D(x) \rightarrow \perp)) \rightarrow (\exists x (D(x) \rightarrow \perp)))$$

Интерпретация на Брауер - Хейтингс - Кошгорова:

Всяка ф-ла поставя задача. Всяко док-во конструира решение на задачата.

- 1) $P(z_1 \dots z_n)$ - се изисква решение
- 2) $A \wedge B$ - да намерим 2-ка решения на A и B
- 3) $A \vee B$ - да намерим решение на A или B и да знаем коя от 2-те решаваме.
- 4) $A \rightarrow B$ - ф-я, която преобразува решение на A в решение на B .
- 5) $\forall x A$ - ф-я, която по x прави решение на $A(x)$
- 6) $\exists x A$ - наредена 2-ка $\langle t, z \rangle$ такава, че z е решение на $A[x/t]$

$$\Lambda^+ \xrightarrow{\substack{M \text{ и } N \\ \downarrow \text{ на } A \quad \downarrow \text{ на } B}} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda^+(M, N) = (M, N) : \text{cons} \\ \Lambda^-(M) = \text{car}(M) = M_L : \text{car} \\ \quad \text{cdr}(M) = M_R : \text{cdr} \\ \rightarrow^+(M, N) = M(N) \\ \rightarrow^-(u, M) = \lambda u M \quad \leftarrow \text{заместване} \\ \forall x^+(M, t) = M(t) \\ \forall x^-(x, M) = \lambda x M \quad \leftarrow \text{променлива} \\ \exists^+(M, t) = \langle t, M \rangle \\ \exists^- \dots \end{array} \right.$$

$\left\{ \begin{array}{l} \sim \text{формули} - \text{типове} \\ \sim \text{дек-ви} - \text{програми} \end{array} \right\}$ изоморфизъм на λ -теори - Харард

2/3:1) 6. ноем - 25. ноем
 2) още проб. 2/3:1)

Работа в клас
 2/3:1) 29 май - лекция по същото време

Интерпретация на Брауер - Хейтинг - Климов

- Минимална си, т.е. всяка ф-ла A дава задача, която изисква свидетел на решение

- Доказателствата дават тези решения

1) $p(z)$ - не изисква свидетел

2) Конюнкцията изисква z -ка свидетел - на A и B

3) Дизюнкцията изисква свидетел с етикет

↳ свидетел на A с етикет a или свидетел на B с етикет b .

4) $A \rightarrow B$ изисква свидетел - ф-я, която трансформира произволен свидетел на A в свидетел на B .

5) $\forall x$ изисква за свидетел ф-я, която преобразува обект x в свидетел на $A(x)$.

6) $\exists x$ изисква за свидетел z -ка от терм t и свидетел за $A[t/x]$

съответствие на Кори-Хазард:

λ -термове	доказателства
примениви	етикети на допускания
свързване на пром.	задрасване
абстракция	въвеждане на $\rightarrow$ аргумент - док-во въвеждане на $\forall \rightarrow \lambda x M$ аргумент - етикет
апликация	използване на $\rightarrow$ или $\forall$
$\alpha \Rightarrow \beta$, тип	импликация, $A \rightarrow B$
типове	ф-ли
минимална логика $\Leftrightarrow \lambda$ -сията с прости типове	атомарна ф-ла
базов тип	свидетелна логика ($\rightarrow$)
λ^T	и/у тези и/а изоморфизми.

константни	аксиомни
"затворен терм"	доказателство без свободни дотукания
коректност на типа	коректност на док-во
намиране на заключението на дадено док-во	изводимост на тип.
обитаемост на тип.	търсене на доказателство
обитави тип	теорема
β -редукция	СИТ-правило
нормализация	елиминация на СИТ
силна нормализация	док-во за конечететност на аритметика (частен случай на свързана идея)
конфигуретност (както и да правим едно и също нещо)	конфигуретност на ред.
η -редукция $(\lambda x. M) x \equiv M$	η -редукция
$\beta\eta$ -нормална форма	използване на атомарни ф-ли

$\Rightarrow$ ако вземем доказателство и го приложим
 $\rightarrow$ ново док-во ще получим ---
 което ще ни даде отговор

В интуиционистката логика: $\perp$ - празен тип, не можем такава програма да напишем

$\frac{\perp}{A} \rightarrow \approx \text{abort до ниска точка}$

$\neg \neg A \rightarrow A \approx \text{callcc} \rightarrow \text{в scheme}$
(call continuation)

С-ми за естествен извод

ф-ла: $p(B) \mid A \rightarrow B \mid A \vee B \mid A \wedge B \mid \forall x A \mid \exists x A$

М, N : $\downarrow$ доказателство
и : $\downarrow$ етикет
 $\frac{A \rightarrow \text{ф-ла}}{(M \xrightarrow{A \rightarrow B} N) B}$ елиминация на $\Rightarrow$

$(\wedge^+ M B)^{A \Rightarrow B}$

Ввеждане на $\rightarrow$

Аксиомна схема за ввеждане:

$\mid \wedge^+_{A,B} : A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B \mid$

Аксиомна схема за елими.

$\mid \wedge^-_{A,B,C} : (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow C$

$\rightarrow$ реда на парам. премени.

$\mid \vee^+_{AB} : A \rightarrow (A \vee B) \mid \mid \vee^- : (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B) \rightarrow C$

$\mid \exists^+_{AB} : B \rightarrow (A \vee B) \mid$

$\mid \exists^+ : \lambda$ използване на $\forall$
 $(M \forall x A) A[x \rightarrow t]$
 $\downarrow$ не е свобод. прем.
на x

Ввеждане на $\forall$
 $(\lambda x M) A \forall x A$
 $\downarrow$ $\forall^+$

существование:

$\exists^+_{\text{acc, ф-ла}} : \forall x (A \rightarrow \exists x A)$

$\exists^-_{x, a, c} : (\exists x A) \rightarrow (\forall x (A \rightarrow c) \rightarrow c)$
 $\hookrightarrow x$ не е свободна в c

~~cons~~ Λ

$\text{cons}(M^A, N^{A \Rightarrow B}) = \lambda^+ M, N$ - въвеждане.

$\text{car}(M^{A \times B}) = \lambda_{A, B}^+ (\lambda_{A, B}^+ M)$...
 $\text{cdr}(M^{A \times B}) = \lambda_{A, B}^+ (\lambda_{A, B}^+ M)$... } елимин. на Λ

$(M^A, N^A) \rightarrow \begin{cases} \text{union-min} \\ \text{1-то за } V \\ \text{2-то за min} \end{cases}$

$\frac{A[x \rightarrow t]}{\exists x A} \rightarrow$ от нашите правила $\rightarrow$ те $\exists x \rightarrow$ имаме пара
 t , което го и подаваме
 $\Downarrow$
 имаме терм $t + \text{доказ. за } A[t]$

$\langle t, M^{A[x \rightarrow t]} \rangle = \exists_{x, A}^+ \in M$
 $\hookrightarrow$ друг вид cons

=

интуиционистка логика: минимална $+(I \rightarrow A)$
 $\hookrightarrow$ нова const.

класическа = минимална + стабилност: $\neg \neg A \rightarrow A$

~~минимална~~

минимална до импликация $\Leftrightarrow$ конструктивна логика

~~минимална~~

минимална $+(I \rightarrow, \vee)$ е изоморфна на класическа логи.
 с всички символи
 $\hookrightarrow$ резултат на Гьодел.

$$A \wedge B = (A \rightarrow B \rightarrow I) \rightarrow I$$

$$A \vee B = (A \rightarrow I) \rightarrow (B \rightarrow I) \rightarrow I$$

$$\exists x A = \neg \forall x \neg A$$

Д/З: 1) Нека $A \in \mathcal{M}(\rightarrow, \vee, \wedge, \vee, \exists)$.

Тогава нека имаме произволни нека за всеки
 предикатен символ P имаме допускание ε_P от тип

$$\forall \vec{x} (I \rightarrow \dots)$$

Тогава имаме док-во M на $I \rightarrow A$ така, че своб. доп.
 са подмножество на ε_P , P става в A

$$\left(\text{за } \rightarrow: \begin{array}{l} M: \perp \rightarrow A \\ N: \perp \rightarrow P \end{array} \right) \Rightarrow P: \perp \rightarrow (A \rightarrow B) \\ P: (\lambda u \perp v^A (N v u)) \perp \rightarrow A \rightarrow B$$

Лема 1:

Нека $A \in N_m(\rightarrow, \forall)$. Нека за всеки през. символ p имаме

$$s_p: \forall x (\neg \neg p(\bar{x}) \rightarrow p(x)).$$

Тогава имаме гл. -во P , че $\neg \neg A \rightarrow A$ такова, че $FV(-P) \in s_p$

док -во:

Индукция по A :

$$1) A \text{ е от вида } p(\bar{x}) \rightarrow s_p(t) \quad \neg \neg p(t) \rightarrow p(t)$$

$$2) \text{ Нека } A = M N$$

$$M: \neg \neg B \rightarrow B$$

$$(\neg \neg (B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C))$$

$$N: \neg \neg C \rightarrow C$$

$$\left(\begin{array}{l} \neg u^{\neg \neg (B \rightarrow C)}, v^B (N (\lambda w^{\neg \neg C} (u^{\neg \neg (B \rightarrow C)} (\lambda a^{B \rightarrow C} (W(a(N))) \\ // \\ P = \lambda u^{\neg \neg (B \rightarrow C)}, v^B (N (\lambda w^{\neg \neg C} \dots \dots) \end{array} \right)$$

$$3) A = \forall x B$$

$$M: \neg \neg B \rightarrow B$$

$$P: (\neg \neg \forall x B) \rightarrow (\forall x B)$$

$$(\neg \neg \forall x B) \rightarrow (\forall x B)$$

$$\left(\begin{array}{l} \lambda_{x^{\forall x B}} P := \lambda u^{\neg \neg \forall x B}, x (M (\lambda v^{\neg \neg B} (u (\lambda w^{\forall x B} (\\ u (\forall (x)) \dots \dots) \end{array} \right)$$

Лема 2:

$$1) N_m(\rightarrow, \forall) \vdash \tilde{\Lambda}_{A,B}^+, \tilde{\forall}_{A,B}^{+,1}, \tilde{\forall}_{A,B}^{+,2}, \tilde{\exists}_{x,A}^+ \text{ за произволни } A \text{ и } B \text{ (може да заменим всички символи)}$$

$$2) N \subseteq (\rightarrow, \forall) \vdash \tilde{\Lambda}_{A,B,C}^-, \tilde{\forall}_{A,B,C}^-, \tilde{\exists}^- \text{ за произволни } A, B, C, \text{ в които се използват само } \rightarrow, \forall \\ // \quad u, v, \bar{x}, \dots \quad a, b, c, \text{ в които се използват само } \rightarrow, \forall \\ N_m(\rightarrow, \forall) \text{ + стабилност.}$$

2/3: 1) $\uparrow$ направо верно.

доказ-во:

1) $\tilde{\exists}_{x,A}^+$

$$\forall x (A \rightarrow \tilde{\exists}_x A) \equiv \forall x (A \rightarrow \forall x (A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$$

$$\lambda_{x,u} A, \forall x (A \rightarrow \perp) (\forall x u) \rightarrow \perp$$

2) $\tilde{\exists}_{x,A,C}^-$

$$\tilde{\exists}_x A \rightarrow \forall x (A \rightarrow C) \rightarrow C, x \notin FV(C)$$

$$((\forall x A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow (\forall x (A \rightarrow C)) \rightarrow C$$

$$\lambda_u (\forall x A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \lambda_{\forall x (A \rightarrow C)} (\text{stab}_C^{\pi_C \rightarrow C} (\lambda_w \neg C (u (\lambda_{x,a} A (w (V(x a)) \dots)))$$

сл. 1/ Ако A, B и $C \in N_C(\rightarrow, \forall)$, то аксиомите схем са изведени от $Sp: \forall x (\neg \neg p(x) \rightarrow p(x))$ в минимална логика

сл. 2/ $N_C \vdash (A \wedge B) \leftrightarrow (A \tilde{\wedge} B) \xrightarrow{Nm}$

$N_C \vdash (A \vee B) \leftrightarrow (A \tilde{\vee} B) \xleftarrow{N_C}$

$N_C \vdash (\exists x A) \leftrightarrow (\tilde{\exists}_x A)$

2/3: 1) доказателство за $\circ$ см. $\uparrow$

1) $(\exists x A) \rightarrow (\tilde{\exists}_x A)$

$$\lambda_u \exists x A (\lambda_{\tilde{\exists}_x A} \tilde{\exists}_x A, \perp u) \tilde{\exists}_x A$$

2) $(\tilde{\exists}_x A) \rightarrow (\exists x A)$

$$\tilde{\exists}_x A, A, \exists x A (\exists \lambda_u \tilde{\exists}_x A (\tilde{\exists}_{x,A}^- (u \tilde{\exists}_x A)))$$

Гуден - Гениева трансляция

def За $A \in N_c(\rightarrow, \forall, \vee, \wedge, \exists)$ def. $A^g \in N_m(\rightarrow, \forall)$

1) за предикатен символ $(p(t)) \rightarrow \neg \neg p(t)$

2) $(A \rightarrow B)^g = A^g \rightarrow B^g$

3) $(A \wedge B)^g = A^g \wedge B^g$

5) $(\forall x A)^g = \forall x A^g$

6) $(\exists x A)^g = \exists x A^g$

Цел: 1) Ако $\Gamma \vdash_{N_c(\rightarrow, \forall, \wedge, \vee, \dots)} A$, то $\Gamma^g \vdash_{N_m(\rightarrow, \forall)} A^g$ } коректност

2) Ако $\Gamma^g \vdash_{N_m(\rightarrow, \forall)} A^g$
 $\Gamma, A \in N_m(\rightarrow, \forall, \wedge, \vee, \dots)$

то $\Gamma \vdash_{N_c(\rightarrow, \forall, \wedge, \vee)} A$

Лема 3: $\vdash_{N_m(\rightarrow, \forall)} \neg \neg A^g \rightarrow A^g$ за произволно $A \in N_c(\rightarrow, \forall, \wedge, \vee, \dots)$

използване лема 1: Нема си нищо, че $(p(\vec{t}))^g = p_g(\vec{t})$
нов пред. символ.

После $p_g(\vec{t}) \rightarrow \neg \neg p(t)$ превеждаме до $\neg \neg p(t)$

т.к. $A^g \in N_m(\rightarrow, \forall)$ по лема 1 може да докажем

и $\neg \neg A^g \rightarrow A^g$ с заместване $sp_g: \forall x (\neg \neg p_g(x) \rightarrow p_g(x))$

и $\neg \neg A^g \rightarrow A^g$

$(sp_g)^{g(x)}: \forall x (\neg \neg \neg \neg p(\vec{x}) \rightarrow \neg \neg p(\vec{x}))$

$(sp_g)^{g^2} = \lambda x, u \neg \neg \neg \neg p(x), \forall^{\neg \neg} (u (\lambda w \neg \neg p(x)) (w w)) \dots$

" $\lambda x \dots$
 ((P/3:1)) поимотри

→ като имаме поне 777-вече и нах до 7
 в N_m време.

P/3:1) Б-та - същото време/става - лемата

$$N_c(\rightarrow, \forall, \wedge, \vee, \exists) \subseteq N_m(\rightarrow, \forall)$$

$$p(\vec{t})^{\#} := \neg \neg p(\vec{t})$$

$$(A \rightarrow B)^{\#} := A^{\#} \rightarrow B^{\#} ; (\forall x A)^{\#} \rightarrow \forall x A^{\#}$$

$$(A \vee B)^{\#} := A^{\#} \vee B^{\#} \text{ - др. аналогични резулти}$$

Лема 1: Нека $A \in N_m(\rightarrow, \forall)$. Имаме $sp: \forall \vec{x}(\neg \neg p(\vec{x}) \rightarrow p(\vec{x}))$.

Тогав имаме док-во на $\neg \neg A \rightarrow A$, свободни допускания са само сред sp .

Лема 2: - В $N_m(\rightarrow, \forall)$ може да симулираме правилата за въвеждане на $\wedge, \vee, \dots$

- В N_c - може да сим. правилата за използване

Лема 3: $\forall A \in N_c(\rightarrow, \forall, \wedge, \vee, \dots)$

$$N_m(\rightarrow, \forall) \vdash \neg \neg A^{\#} \rightarrow A^{\#}$$

=

Т: Нека $\Gamma, A \in N_c(\rightarrow, \forall, \wedge, \vee, \dots)$

Ако $\Gamma \vdash_{N_c} A$, то $\Gamma^{\#} \vdash_{N_m} A^{\#}$.

Ако $\Gamma^{\#} \vdash_{N_m} A^{\#}$, то $\Gamma \vdash_{N_c} A$.

Док-во:

Индукция по $\Gamma \vdash A$

(м-док-во на това) $\hookrightarrow$ всички свободни доп-ния в доказателството.



$$1.1) M \equiv u^B \Rightarrow M_g \equiv u_g^B$$

$$1.2) M \equiv \text{stab}_B \Rightarrow M_g \text{ е дек-то от лема 3.}$$

$$1.3) M \equiv M_1, M_2, \lambda^M, N^M, \lambda^N, \lambda^{\times N} \\ \rightarrow^-, \rightarrow^+, \vee^-, \vee^+$$

↳ директно привеждане по правилата.

1.4) Ако $M \equiv \wedge^+, \vee^+, \exists^+$ - тогава замества се дек-то от лема 2.1)

1.5) Ако $M \equiv \vee^-, \wedge^-, \exists^-$, тогава $M_g = \text{Рот}$ лема 2.2, в което замества всички участници на stab с това от лема 3

⇐ Винаги, че в $N_c \vdash B \leftrightarrow B^g$

(Лема: Нека $A \in N_c(\rightarrow, \vee, \dots)$. Тогава $N_c \vdash A \leftrightarrow A^g$)

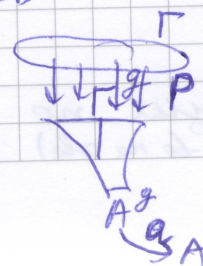
~~Д/з: 1) Дек-тата, се дефинира.~~

Нека M^g е дек-во на A^g , $FA(M) \subseteq \Gamma^g$

По лема 4) имаме дек-ва:

$$P_B: B \rightarrow B^g \quad \text{и} \quad Q_B: B^g \rightarrow B$$

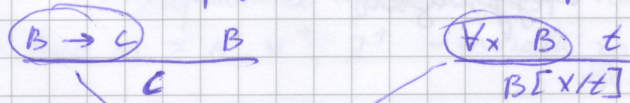
$$M = Q_A (M^g [u_g^{P_i} \rightarrow P_{B_i}])$$



0/3:1) $N_m(\rightarrow, \forall)$ е слабо конформатна
(3 м. $c \rightarrow u \forall$)

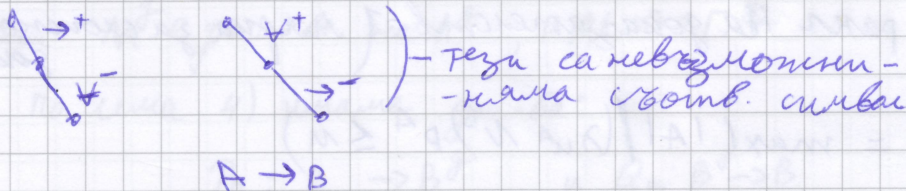
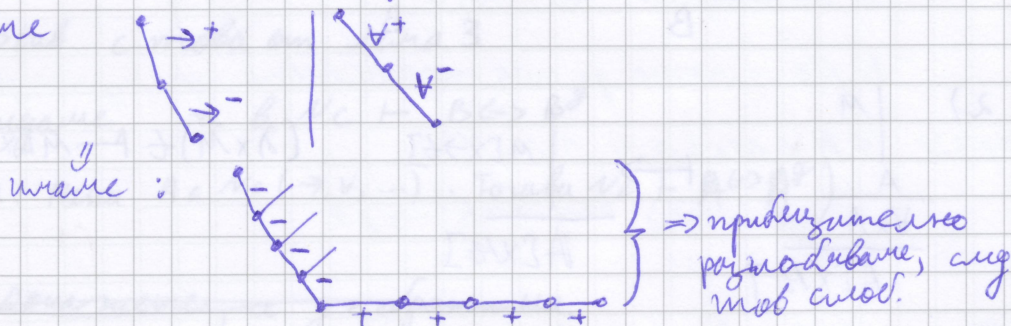
Структура на нормалните доказателства

def Главна предпоставка на правило за елиминация



→ тази ф-ла, след елиминирания символ.

→ Ако едно док-во е в норм. форма, то не може да има



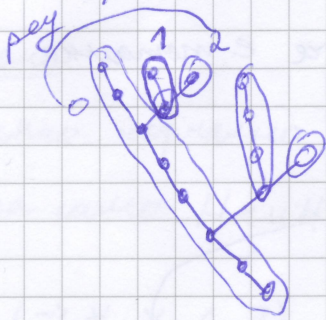
$A \rightarrow B$



def Потока от ред и наричане редиза отбърши

$A_0 \dots A_n$ така, че A_0 е исто, A_i е главна предпоставка на правило за елиминация със заключение A_{i+1} или A_i е единствената

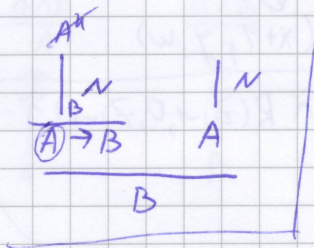
предпоставка на правилото за въвеждане със зам. A_{i+1}
 A_n е заключението на док-то или е вторична предпоставка
 на $\rightarrow$, което е част от пътека от ред $n+1$.



Д/З: 1) Док., че всяко срещане на ф-ла
 в док-то лежи на някоя пътека

Д/З: 1) В нормално док-во на $\Gamma \vdash A$
 всяка ф-ла B е подформула или на
 A , или на подформула в Γ .

Док-во: симуляция по реда на пътешествието.



$(C \rightarrow C) \rightarrow$

Големината на док-ва при нормализация

1 В-редукция може да вдигне len на 2

$M \vdash N$ $\rightarrow$
 норм. форма

Д/З: 1) $\rightarrow$ Ако $M \vdash N$ така, че $sz(N) < sz(M)$ по не s ,
 то $|N| < O(2^{|M|})$



$|A|$ - брой ~~разн.~~ лог. символи в A

$$|A \rightarrow B| = \max(|A|, |B|) + 1, \quad |\forall x A| = |A| + 1$$

Следствие Ако N е норм. форма на M , то

$$|N| = O(2^{2^{n-2}} c_2(n))$$

↑ това също се доказва

$$f(x, y) = 2^x + y \rightarrow \text{ще докажем, че е тотална.}$$

$$R(x, y, z) = \#t \Leftrightarrow z = 2^x + y$$

$$f(x+1, y) = f(x, f(x, y))$$

$$f(x, 0) = f(0, f(0, f(0, \dots f(0, 0) \dots))$$

2^x пъти ще се умножи

$$H_0: \forall y R(0, y, y+1)$$

$$H_1: \forall x, y, z, w R(x, y, z) \rightarrow R(x, z, w) \rightarrow R(x+1, y, w)$$

$$D_i: \exists z_0 \dots z_i (R(0, 0, z_i) \wedge R(z_i, 0, z_{i-1}) \wedge R(z_{i-1}, 0, z_{i-2}) \wedge \dots \wedge R(z_1, 0, z_0))$$

$$z_0 = 2^{2^{2^{\dots 2^1}}}$$

$$C_i: H_0 \rightarrow H_1 \rightarrow D_i // A_0: \forall x \exists z R(x, y, z) \rightarrow A_0 \rightarrow \exists 2^x$$

$$T: \exists M$$

$$\forall y \exists z R(x, y, z) \rightarrow A_1 \rightarrow \exists 2^x$$

$$\forall y A_i(y) \rightarrow \exists z (A_i(z) \wedge R(x, y, z))$$



$$\text{Лема: } \exists m: A_i(0)$$

$$\exists N: \forall x (A_i(x) \rightarrow A_i(\bigvee_{k=1}^{x+1} k)) \text{ така, че}$$

сепка N и m не зависят от i .

Теорема:

∃ док-во P на D_i такова, че сред свобод. доп. са само H₁ и H₂ така, че веп P е линейно по i

Теорема:

Всяко нормално док-во на D_i такова, че свобод. доп-я са само H₁ и H₂ ⇒ |M| ≤ O(2ⁱ⁻² i^{poly})

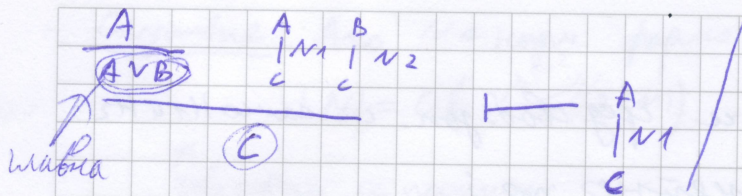
$N_m(-, \forall, \vee, \wedge, \exists)$

$$\frac{\frac{A \quad B}{A \wedge B}}{A} \quad \frac{\frac{A \quad B}{A \wedge B}}{B}$$
$$\frac{\frac{A \quad B}{A \wedge B}}{A} \quad \frac{\frac{A \quad B}{A \wedge B}}{B}$$
$$\frac{\frac{A \quad B}{A \wedge B} \quad \frac{A, B}{C}}{C} \quad \frac{A, B}{C} \rightarrow \text{заменяване на } C \text{ с } A, B$$

} β-редукция
за ∧

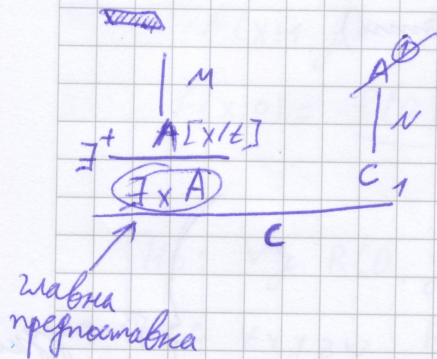
$$\left. \begin{array}{l} \langle M, N \rangle = \Lambda^+ M N \\ M_L = \Lambda^- M(-) \\ M_L = \Lambda^- M(-) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (\langle M, N \rangle \downarrow) \vdash M \\ (\langle M, N \rangle L) \vdash N \end{array}$$





$$\vdash AVB \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

$$(VABC (VAB^{+1,2} MB) N_1^{A \rightarrow C} N_2^{B \rightarrow C})^C \rightarrow (N_2^{B \rightarrow C} M^B)^C$$



$$x \notin FV(C)$$

$$x \notin FV(M)$$

$$\frac{M}{A[x/E]} \quad \frac{N}{C[x/E]}$$

$C[x/E]$, което е C , защото $x \notin FV(C)$

$$\exists^+ x: \quad \forall x (A \rightarrow \exists x A)$$

$$\exists^- \quad \exists x A \rightarrow \forall x (A \rightarrow C) \rightarrow C$$

$$\left((\exists^+ t, M) \exists x A \quad N^{\forall x (A \rightarrow C)} \right)^C \rightarrow N \in M$$

в λ -сиктансе $\rightarrow$ главна предпоставка е
 1-а аргумента на аксиомите



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline M \\ \hline \exists x A \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 B^{\textcircled{1}} \\
 \begin{array}{|c|} \hline N A^v \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 C \quad 1 \\
 B \rightarrow C \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{B \rightarrow C \quad B}{C}$$

$$(\exists x M) \wedge A$$

2/3:1) / остатками не om нбу за об

$\wedge^-$	$\rightarrow^-$	$\forall^-$	$\wedge^-$	$\vee^-$	$\exists^-$
$\vee^-$					
$\exists^-$					

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline M \\ \hline \exists x A \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|} \hline N \\ \hline B \rightarrow C \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|} \hline P \\ \hline B \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{B \rightarrow C \quad B}{C}$$

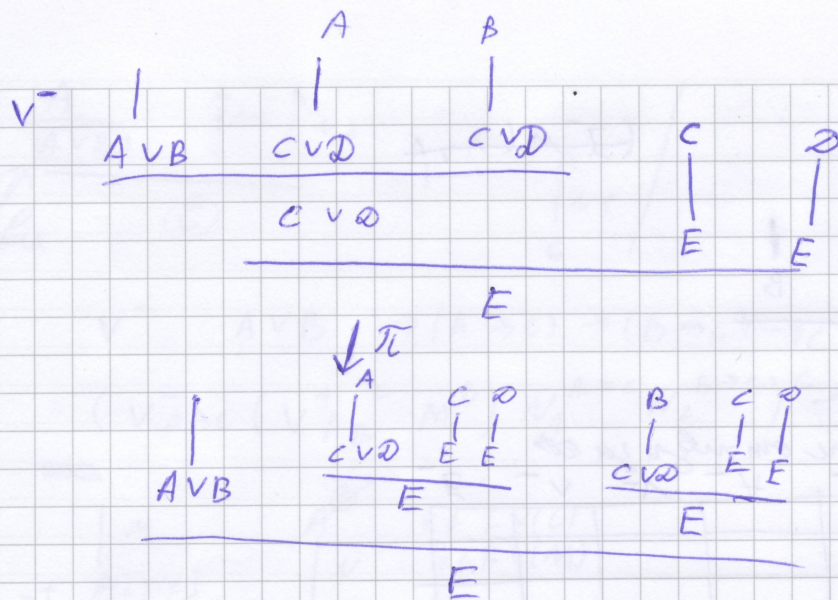
$$\frac{\exists x A \quad \rightarrow B \rightarrow C \quad B}{C}$$

$$((\exists^- M N) P \vdash \exists^- M(NP))$$

$$\begin{array}{c}
 \wedge^-:
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline M \\ \hline A \wedge B \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 A, B \\
 \begin{array}{|c|} \hline N \\ \hline \forall x C \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \forall x C \quad \epsilon \\
 \hline
 C[x/\epsilon]
 \end{array}
 \quad
 \vdash
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline A \wedge B \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 A, B \\
 \begin{array}{|c|} \hline N \\ \hline \forall x C \quad \epsilon \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 C[x/\epsilon]
 \end{array}$$

$$(\wedge^- M N) \epsilon \vdash (\wedge^- M(N\epsilon))$$



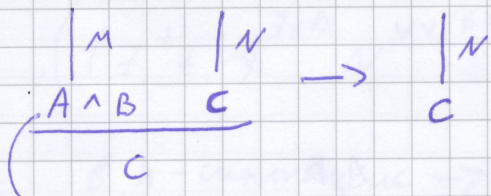


$$V^-: (A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow C$$

$$(V^- (V^- M \vee P) R S) \vdash V^- (M (V^- N$$

$$\leftarrow V^- M (\lambda u (V^- (V u) R S)) (\lambda v (V^- (P v) R S)))$$

Определение конверсии



→ не сме анализирам $A \wedge B$

$$(V^- M \pi) \vdash N$$

$$(\lambda u V N)$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline N_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline N_2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{тук не сме използвали } B}{\begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array}} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline N_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{|c|} \hline N_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline B \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline N_2 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array}} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline N_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array}$$

$\neg M(\lambda)$

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \exists x A \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline N \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array}} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline N \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array} \quad \exists^M M(\lambda x \vee A N) \rightarrow N$$

T: Ако M е дек-во в $N_m(\rightarrow, \vee, \wedge, \neg, \exists, \dots)$, то има нормална форма (в по-нормална форма). И др. добри св-ва (конфликтност, силна норм.) има.

def Сегмент наричаме последователност от брешания на една и съща ф-ла $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, където A_0 не е заключение на $\vee, \wedge, \exists$ (най-горна ф-ла), A_i е вторична предпоставка на $\vee, \wedge, \exists$ със заключение A_{i+1} , A_n не е вторична предпоставка на $\vee, \wedge, \exists$.



Def. Тестера - последовательность от срезования на ф-ли

$A_0, \dots, A_n$, където 1) A_0 е листо, незадраскано от $v^-, \bar{A}, \bar{A}^+$

2) А; не е вторична предпоставка $\neg A \rightarrow \neg B$ и

2.1) Е вторична предпоставка на $\forall, \wedge, \exists, \neg$
 A_{i+1} е зам.

2.2) e ... при этом на v^-, v^+, E^- и A_{i+1} e зад. гом.

(от при „лошите“ правила се карват в задр.)

3) A_n е заключение или вторична предпоставка на $\rightarrow$ или ~~нима~~ A_n е главна предпоставка на $\vee, \wedge, \exists$ и ~~нима~~ ^{забранено допускане.} ~~мамо допускане~~, към което да продължим

Т: Всяко срещане на ф-ла в док-во се казва на някоя пътека.

Q13:1) Всяка потокa може да се разбие на последователност от сегменти

Д/З: 9) Если $\pi \xrightarrow{A_0 \dots A_K}$ — цепочка в нормальном док-во $N_m(\rightarrow, \vdash)$

Тодата сгужествува $i \in (0 \dots k)$ така, че $\forall j < i \ A_j \notin A$.

$\forall j > i \quad A_j \not\leq A_i$. A_i се нарича най-малка формула.

1) $\forall j < i$ $A_j \leq A_{j+1} \rightarrow$ аналог! само же с $\leq$

2) $j > i$ $A_j \geq A_{j-1}$ и A_{j-1} е предпоставка на A_j + -правилото за зам.

γ -редукция позволява лог. ф-ла да е атачарна.

Св-ва на дизюнктивна и съществуване

T_1 (св-во на дизюнкцията)

Def Строго положителна подформула $A \leq B$

1) $A \leq A$ 2) $A \leq B$, то $A \leq C \rightarrow B$ → друго го намене!

$A \leq B \vee C$ $B \wedge C$
 $C \vee B$ $C \wedge B$

3) Ако $A \leq B[x/\epsilon]$, то $A \leq \forall x B$
 $A \leq \exists x B$

Пример:

$A \leq \neg \neg A$, γ -то $(A \rightarrow I) \rightarrow I$

Нека имаме $\Gamma \vdash_{N_m} A \vee B$ и хитро една ф-ла в Γ няма дизюнктивна строго положителна подформула.

Тогава $\Gamma \vdash A$ или $\Gamma \vdash B$ и знаем кое от 2-те е.

Док-во:

Нека M е нормално док-во на $\Gamma \vdash A \vee B$. Различаваме главната пътека в него (свързва началото)

1) началото $\vdash$ -част.

Т.к. док-то е нормално всяка ф-ла в него

$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \dots \supset A \vee B \Rightarrow A \vee B$ е строго $\vdash$ подф. на начално док. $\vdash$.



II a.: имаме + част

1) посм. ф-ла е

$$\frac{A}{A \vee B} \quad \left\{ \quad \frac{B}{A \vee B} \right.$$

знаем кое да вземем - ок.

✓ + 2) $A \vee B$ е част от сегмент

$$\frac{\frac{A^-}{A^-} \quad (A \vee B)}{(A \vee B)}$$

Т: св-вта $\exists$:

Нека Γ док-ва $\exists x A$ и в Γ няма допускание, което има строго положителна екзистенциална модформ. Тогава има термове $\tau_1 \dots \tau_n$ - крайно н-во такива, че $\Gamma \vdash A(\tau_1) \vee A(\tau_2) \vee \dots \vee A(\tau_n)$.

Следствие: Ако в Γ няма строго дизъюнкт.

тери, то от предиктo и това $\Rightarrow$ има единствен.

тери $\Gamma \vdash A(\tau)$

↑

Така от конструктивни док-ва се извършва конструкция

