Поправителен изпит по "Дискретни структури" (задачи), СУ, ФМИ, 29. 08. 2016 г.

Име: ________________________________ ФН: _____ Спец.: ____ Курс: ___

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	20	20	35	30	30	135

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки.

Задача 1. Точките в равнината можем да представим чрез техните координати като двойки реални числа: $\mathbb{R}^2 = \left\{(x\,,\,y) \mid x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R}\right\}$. Релацията $P \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ е определена по следния начин:

$$P \;=\; \left\{\; \Big((x_1\,,\,y_1)\;,\;(x_2\,,\,y_2)\Big) \;\Big|\; x_1\,y_1 \,=\, x_2\,y_2 \right\}.$$

а) Да се докаже, че P е релация на еквивалентност. (10 точки)

б) Да се опише и начертае класът на еквивалентност на точката $(5\,,\,6)$. (10 точки)

Задача 2. При провеждане на първата изпитна сесия от 80 студенти в специалност КН, първи поток, изпита по ДИС издържали 38 студенти, по ЛА — 45 студенти, а по ДС — 52 студенти. Било установено, че изпитите по ДИС и ЛА издържали 20 студенти, ДИС и ДС — 28 студенти. 14 студенти заявили покрусени, че не взели нито един от трите изпита. Станало известно още, че 13 студенти взели и трите изпита. Колко студенти са положили успешно изпитите по ЛА и ДС ?

Задача 3. В неориентиран граф от всеки връх излизат точно три ребра.

а) Докажете, че графът има четен брой върхове. (7 точки)

б) Докажете, че в графа има цикъл. (7 точки)

в) Възможно ли е графът да съдържа:

в1) хамилтонов цикъл? в2) ойлеров цикъл? в3) ойлеров път? (по 7 точки)

Задача 4. Точките с цели координати в равнината са оцветени с осем цвята.

а) По колко начина може да бъде оцветен квадратът $\left\{1\,,\,2\,,\,3\right\} \times \left\{1\,,\,2\,,\,3\right\}$? (20 точки)

б) Докажете, че има две едноцветни точки на разстояние, по-малко от 3. (10 точки)

Задача 5. За двоичната функция $f\,(x\,,\,y\,,\,z\,)$, определена с таблицата по-долу, намерете:

а) съвършената дизюнктивна нормална форма; (5 точки)

б) минималната дизюнктивна нормална форма; (15 точки)

в) полинома на Жегалкин. (10 точки)

БОНУС: Шеферова функция ли е f ? (15 точки)

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

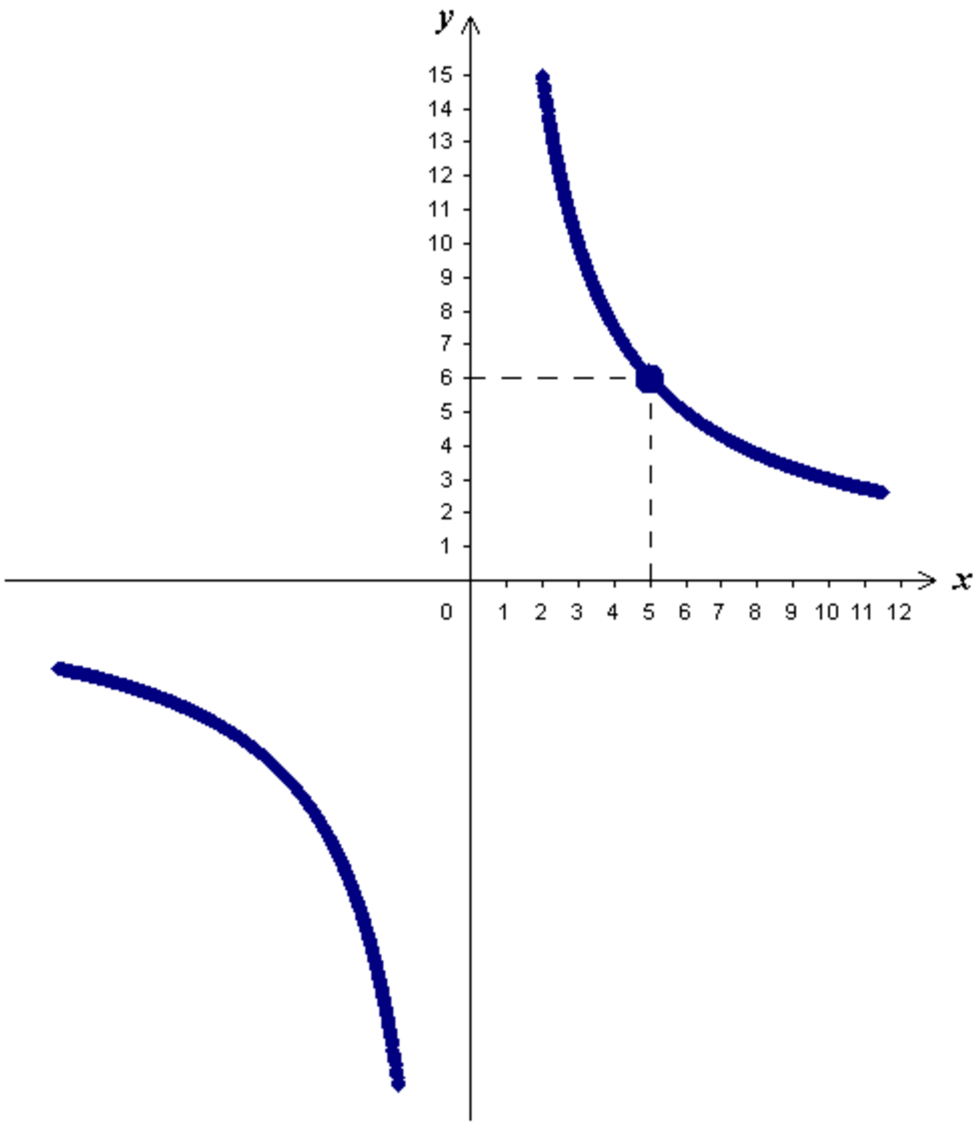
а) Понеже $xy = xy$, то $\big((x\,,\,y)\,,\,(x\,,\,y)\big)\in P$ за $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall y\in\mathbb{R}$, т.е. релацията P е рефлексивна.

$\big((x_1\,,\,y_1)\,,\,(x_2\,,\,y_2)\big)\in P \;\Longrightarrow\; x_1\,y_1 = x_2\,y_2 \;\Longrightarrow\; x_2\,y_2 = x_1\,y_1 \;\Longrightarrow\; \big((x_2\,,\,y_2)\,,\,(x_1\,,\,y_1)\big)\in P.$ Следователно релацията P е симетрична.

$\big((x_1\,,\,y_1)\,,\,(x_2\,,\,y_2)\big)\in P \;\wedge\; \big((x_2\,,\,y_2)\,,\,(x_3\,,\,y_3)\big)\in P \;\Longrightarrow\; x_1\,y_1 = x_2\,y_2 \;\wedge\; x_2\,y_2 = x_3\,y_3$ $\Longrightarrow\; x_1\,y_1 = x_3\,y_3 \;\Longrightarrow\; \big((x_1\,,\,y_1)\,,\,(x_3\,,\,y_3)\big)\in P.$ Ето защо P е транзитивна релация.

Щом релацията P е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност.

б) Класът на еквивалентност на точката $(5\,,\,6)$ е множеството от всички точки $(x\,,\,y)$, за които $xy = 5\,.\,6$, т.е. $xy = 30$. Графиката на обратната пропорционалност $y = \dfrac{30}{x}$ е хипербола, чиито два клона са разположени в първи и трети квадрант.



Задача 2. Щом 14 студенти не са взели нито един изпит, то останалите $80 - 14 = 66$ студенти са взели поне един изпит. Прилагаме принципа за включване и изключване:

$$\begin{aligned}\left|\text{ДИС} \cup \text{ЛА} \cup \text{ДС}\right| = \left|\text{ДИС}\right| + \left|\text{ЛА}\right| + \left|\text{ДС}\right| - \\ - \left|\text{ДИС} \cap \text{ЛА}\right| - \left|\text{ДИС} \cap \text{ДС}\right| - \left|\text{ЛА} \cap \text{ДС}\right| + \\ + \left|\text{ДИС} \cap \text{ЛА} \cap \text{ДС}\right|.\end{aligned}$$

За да не усложняваме решението с нови обозначения, използваме названието на всеки учебен предмет като обозначение на множеството на студентите, които са взели изпита по този предмет.

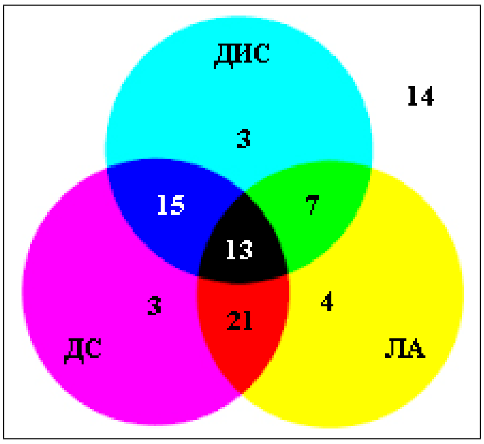
Заместваме числата, дадени в условието на задачата, и пресметнатата стойност 66:

$66 = 38 + 45 + 52 - 20 - 28 - \left|\text{ЛА} \cap \text{ДС}\right| + 13$, тоест $66 = 100 - \left|\text{ЛА} \cap \text{ДС}\right|$,

откъдето намираме $\left|\text{ЛА} \cap \text{ДС}\right| = 100 - 66 = 34.$

Отговор: 34 студенти са положили успешно и изпита по ЛА, и този по ДС.

Задачата може да се реши и с диаграма на Вен. Попълваме секторите един по един.



Най-напред в черния сектор нанасяме числото 13 — броя на студентите, взели и трите изпита. На бялата площ нанасяме числото 14 — броят на студентите, невзели нито един изпит. Изпитите по ДИС и ЛА са взети от 20 студенти, които попадат в зеления и черния сектор общо. Следователно в зеления сектор има $20 - 13 = 7$ студенти (те са взели ДИС и ЛА, но не и ДС). Изпитите по ДИС и ДС са взети от 28 студенти (тъмносиния и черния сектор заедно). Значи, в тъмносиния сектор има $28 - 13 = 15$ студенти (те са взели ДИС и ДС, но не и ЛА). Изпитът по ДИС е издържан от 38 студенти (зеления, черния, тъмносиния и светлосиния сектор). За светлосиния сектор остават $38 - 7 - 13 - 15 = 3$ студенти (те са взели само изпита по ДИС). Изпитът по ДС е издържан от 52 студенти (черния, розовия, червения и тъмносиния сектор). Към числото 52 добавяме числата от белия, зеления и светлосиния сектор: $52 + 14 + 7 + 3 = 76$. За жълтия сектор остават $80 - 76 = 4$ студенти (тези студенти са издържали само изпита по ЛА). Изпитът по ЛА е издържан от 45 студенти (черния, зеления, жълтия и червения сектор). За червения сектор остават $45 - 13 - 7 - 4 = 21$ студенти (те са издържали ЛА и ДС, но не и ДИС). (Понеже изпитът по ДС е взет от 52 студенти, то в розовия сектор стои числото $52 - 15 - 13 - 21 = 3$, но то не е нужно за решението; това е броят на студентите, взели само изпита по ДС.)

Студентите, издържали ЛА и ДС, се намират в обединението на черния и червения сектор; техният брой е $21 + 13 = 34$. Това е отговорът на задачата.

Задача 3.

а) Нека n е броят на върховете, а m е броят на ребрата на графа. Щом от всеки връх излизат по три ребра, то всички ребра са $3n$. Но така всяко ребро е броено два пъти — по веднъж за всеки от двата върха, с които е инцидентно. Затова $3n = 2m$. Следователно числото $3n$ е четно, тогава и n е четно.

б) Това, че в графа има цикъл, може да се докаже по много начини.

Първи начин: Нека v_1 е произволен връх на графа. От v_1 излизат три ребра. По някое от тях преминаваме към друг връх v_2. Но и от v_2 излизат три ребра. По едно от тях току-що сме пристигнали във v_2, по някое от другите две продължаваме към друг връх v_3 и тъй нататък. Получава се път v_1, v_2, v_3 и т.н., който не може да е безкраен (в курса по "Дискретни структури" разглеждаме само крайни графи). Следователно на някоя стъпка върхът, в който отиваме, ще съвпада с някой от вече посетените върхове, т.е. ще открием цикъл в графа.

Втори начин: Допускаме противното: че графът не съдържа цикъл. Тогава графът е гора. Всяка гора има поне едно дърво, а всяко дърво има поне едно листо. Но листата са върхове от първа степен. Следователно графът съдържа връх от първа степен, което е противоречие: по условие всички върхове на дадения граф са от трета степен. Това противоречие показва, че допускането не е вярно. Вярно е твърдението на задачата: графът съдържа цикъл.

в1) Възможно е графът да съдържа хамилтонов цикъл. Такива графи са например K_4 и $K_{3,3}$.

в2) Графът не може да съдържа ойлеров цикъл, защото има върхове от нечетна степен: всички върхове на графа са от трета степен.

в3) Графът не съдържа ойлеров път, защото има повече от два върха от нечетна степен: всички върхове са от трета степен и графът има поне четири върха. Последното твърдение се доказва така: ако v_1 е произволен връх на графа, то от v_1 излизат три ребра, например към върховете v_2, v_3 и v_4, така че графът съдържа поне четири върха.

Задача 4.

а) Това подусловие може да се реши по различни начини.

Първи начин: Да номерираме точките на квадрата с числата от 1 до 9. На всяко оцветяване на квадрата съпоставяме редица от цветове, като първият цвят съответства на първата точка, вторият цвят — на втората точка и т.н. Следователно броят на възможните оцветявания е равен на броя на редиците от описания вид, т.е. броя на вариациите с повторения на осем елемента от девети клас, защото за всяка редица избираме девет от осем цвята в определен ред, като имаме право да повтаряме цветове (две точки от квадрата може да бъдат оцветени в един и същи цвят). Затова търсеният брой е равен на $\widetilde{V}_8^9 = 8^9 = 134217728$.

Втори начин: За първата точка има осем възможни цвята, за втората — също осем и т.н. до деветата точка включително. Прилагаме правилото за умножение: броят на възможните оцветявания на квадрата е равен на $\underbrace{8\,.\,8\,\ldots\,8}_{9\text{ множителя}} = 8^9 = 134217728$.

б) Квадратът от подусловие "а" има страна с дължина 2 и съдържа девет точки, а разполагаме с осем цвята. От принципа на Дирихле следва, че поне две от деветте точки имат еднакъв цвят. Разстоянието между тези две точки не надхвърля дължината на диагонала на квадрата $2\sqrt{2} < 3$.

Задача 5.

а) Съвършената дизюнктивна нормална форма се получава по теоремата на Бул:

$$f \;=\; \overline{x}\;\overline{y}\;\overline{z} \;\vee\; \overline{x}\;\overline{y}\;z \;\vee\; \overline{x}\;y\;\overline{z} \;\vee\; \overline{x}\;y\;z \;\vee\; x\;\overline{y}\;z \;\vee\; x\;y\;\overline{z}\;.$$

в) За да получим полинома на Жегалкин, в съвършената дизюнктивна нормална форма заменяме включващата дизюнкция с изключваща (имаме право, понеже дизюнктивната нормална форма е съвършена), а отрицанието заменяме със събиране с единица:

$$f \;=\; (x+1)\,(y+1)\,(z+1) \;+\; (x+1)\,(y+1)\,z \;+\; (x+1)\,y\,(z+1) \;+$$
$$+\;(x+1)\,y\,z \;+\; x\,(y+1)\,z \;+\; x\,y\,(z+1)\,.$$

Разкриваме скобите:

$$f \;=\; x\,y\,z + x\,y + x\,z + y\,z + x + y + z + 1 + x\,y\,z + x\,z + y\,z + z +$$
$$+\,x\,y\,z + x\,y + y\,z + y + x\,y\,z + y\,z + x\,y\,z + x\,z + x\,y\,z + x\,y\,.$$

Унищожаваме еднаквите събираеми:

$$f \;=\; x\,y + x\,z + x + 1\,.$$

Полученият израз е полиномът на Жегалкин на функцията f.

б) Минималната дизюнктивна нормална форма намираме по алгоритъма на Куайн—Маккласки.

Таблица на истинност на функцията f:

	x	y	z	f
0:	0	0	0	1
1:	0	0	1	1
2:	0	1	0	1
3:	0	1	1	1
4:	1	0	0	0
5:	1	0	1	1
6:	1	1	0	1
7:	1	1	1	0

Импликанти от нулев ред:

	x	y	z	
0:	0	0	0	$\longrightarrow$
1:	0	0	1	$\longrightarrow$
2:	0	1	0	$\longrightarrow$
3:	0	1	1	$\longrightarrow$
5:	1	0	1	$\longrightarrow$
6:	1	1	0	$\longrightarrow$

Импликанти от първи ред:

	x	y	z	
0, 1:	0	0	–	$\longrightarrow$
0, 2:	0	–	0	$\longrightarrow$
1, 3:	0	–	1	$\longrightarrow$
1, 5:	–	0	1	*
2, 3:	0	1	–	$\longrightarrow$
2, 6:	–	1	0	*

Импликанти от втори ред:

	x	y	z	
0, 1, 2, 3:	0	–	–	*

Таблица на простите импликанти:

	x	y	z	0	1	2	3	5	6	
0, 1, 2, 3:	0	–	–	●	○	○	●			$\overline{x}$
1, 5:	–	0	1		○			●		$\overline{y}z$
2, 6:	–	1	0			○			●	$y\overline{z}$

Всички прости импликанти са съществени / задължителни.

Минимална дизюнктивна нормална форма:

$f = \overline{x} \vee \overline{y}z \vee y\overline{z}\,.$

г) Функцията f е шеферова, защото сама образува пълно множество. Това може да се докаже, като изразим чрез f друго множество от булеви функции, за което знаем, че е пълно, например отрицанието и конюнкцията.

Отрицанието се изразява така: $\overline{p} = f(p, p, p)$.

Конюнкцията се изразява така: $p \wedge q = \overline{f}(p, p, q) = f\Big(f(p, p, q), f(p, p, q), f(p, p, q)\Big)$.

Тези тъждества могат да бъдат проверени по табличния метод.

Задачата може да се реши и с критерия на Пост. За да установим, че функцията f е шеферова, достатъчно е да проверим, че тя не е самодвойнствена и не запазва нито нулата, нито единицата. Това лесно се вижда от таблицата на f.