Записки по Дискретна математика

Стефан Вътев[1]

20 май 2016 г.

[1] ел. поща: stefanv@fmi.uni-sofia.bg

Съдържание

Глава 1

Основни понятия по логика

1.1 Съждително смятане

На англ. Propositional calculus

Съждителното смятане наподобява аритметичното смятане. Вместо аритметичните операции $+, -, \cdot, /$, имаме съждителни операции като $\neg, \wedge, \vee$. Например, $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ е логически израз. Освен това, докато аритметичните променливи приемат стойности произволни числа, то съждителните променливи приемат само стойности **истина (1)** или **лъжа (0)**.

Съждителен израз наричаме съвкупността от съждителни променливи $p, q, r, \ldots$, свързани със знаците за логически операции $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ и скоби, определящи реда на операциите.

Съждителни операции

- Отрицание $\neg$
- Дизюнкция $\vee$
- Конюнкция $\wedge$
- Импликация $\rightarrow$
- Еквивалентност $\leftrightarrow$

Ще използваме таблица за истинност за да определим стойностите на основните съждителни операции при всички възможни набори на стойностите на променливите.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$\overline{p}q \vee p\overline{q}$
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1

Съждително верен (валиден) е този логически израз, който има верностна стойност **1** при всички възможни набори на стойностите на съждителните променливи в израза, т.е. стълбът на израза в таблицата за истинност трябва да съдържа само стойности **1**.

За два съждителни израза φ и ψ са **еквивалентни**, означаваме $\varphi \equiv \psi$, ако са съставени от едни и същи съждителни променливи и двата израза имат едни и същи верностни стойности при всички комбинации от верностни стойности на променливите. С други думи, колоните на двата израза в таблиците им за истинност трябва да съвпадат. Например, лесно се вижда, че

$$p \to q \equiv \neg p \vee q.$$

Съждителни закони

А) **Комутативен закон**

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Б) **Асоциативен закон**

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

В) **Дистрибутивен закон**

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Г) **Закони на де Морган**

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

Д) **Закон за контрапозицията**

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

Е) **Обобщен закон за контрапозицията**

$$(p \wedge q) \to r \equiv (p \wedge \neg r) \to \neg q$$

Ж) **Закон за изключеното трето**

$$p \vee \neg p \equiv \mathbf{1}$$

З) **Закон за силогизма (транзитивност)**

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r) \equiv \mathbf{1}$$

Лесно се проверява с таблиците за истинност, че законите са валидни.

Пример 1. Нека например да проверим едно от правилата на де Морган и закона за контрапозицията.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1

При всички стойности на променливите p и q, стълбовете съответстващи на $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$ съвпадат. Следователно, законът на де Морган е валиден. По същия начин се съобразява, че законът за контрапозицията е валиден.

Пример 2. Можем да докажем валидността на законите и по друг начин, а именно чрез допускане на противното. Така ще докажем, че законът за силогизма е валиден.

Да допуснем, че съществува стойност на променливите p,q,r, за които

$$\underbrace{[(p \to q) \ \wedge \ (q \to r)]}_{\mathbf{1}} \to \underbrace{(p \to r)}_{\mathbf{0}} \equiv \mathbf{0}$$

Това означава, че

$$p \equiv \mathbf{1}, r \equiv \mathbf{0}.$$

Тогава

$$\underbrace{[(\mathbf{1} \to q) \ \wedge \ (q \to \mathbf{0})]}_{\mathbf{1}} \to \underbrace{(\mathbf{1} \to \mathbf{0})}_{\mathbf{0}} \equiv \mathbf{0}$$

- Ако $q \equiv \mathbf{0}$, то $(\mathbf{1} \to \mathbf{0}) \ \wedge \ (\mathbf{0} \to \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0} \wedge \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$, следователно този случай е невъзможен.

- Ако $q \equiv \mathbf{1}$, то $(\mathbf{1} \to \mathbf{1}) \ \wedge \ (\mathbf{1} \to \mathbf{0}) \equiv \mathbf{1} \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$, следователно този случай също е невъзможен.

И в двата случая за q достигнахме до противоречие. Следователно нашето допускане не е вярно, което означава, че при всяка стойност на променливите p, q, r,

$$[(p \to q) \ \wedge \ (q \to r)] \to (p \to r) \equiv \mathbf{1}.$$

Задача 1. Проверете дали следните съждителни формули са валидни.

а) $(p \wedge q) \to p$;

б) $p \to (p \vee q)$;

в) $(p \to q) \ \leftrightarrow \ (\neg q \to \neg p)$;

г) $p \to q \equiv \neg p \vee q$

д) $(p \ \wedge \ q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

е) $p \ \wedge \ q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$

ж) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \ \wedge \ (q \to p)$

з) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$;

и) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$;

к) $\neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q)$.

Забележка. Обърнете внимание, че $(p \to q) \to r$ **не** е еквивалентно на $p \to (q \to r)$. Например вземете $p \equiv q \equiv r \equiv \mathbf{0}$.

Забележка. За удобство, понякога ще пишем $\overline{p}$ вместо $\neg p$ и pq вместо $p \wedge q$.

(От [1])

Задача 2. Да предположим, че сме на остров, който се обитава негодници и благородници. Негодниците винаги лъжат, а благородниците винаги казват истината. Срещаме трима обитатели на този остров, наречени **А**, **Б** и **В**.

$a \leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c}$

$b \leftrightarrow (\overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c} \vee a\overline{b}\overline{c})$

а) (а) **А** казва “Всички сме негодници”.
   (б) **Б** казва “Точно един от нас е благородник”.
   (в) Какви са **А**,**Б** и **В**?

$a \leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c}$

$b \leftrightarrow (\overline{a}bc \vee ab\overline{c} \vee a\overline{b}c)$

б) (а) **А** казва “Всички сме негодници”.
   (б) **Б** казва “Точно един от нас е негодник”.
   (в) Може ли да определим какъв е **Б**?
   (г) Може ли да определим какъв е **В**?

$a \leftrightarrow \overline{b}$

$b \leftrightarrow (ac \vee \overline{a}\overline{c})$

в) (а) **А** казва “**Б** е негодник”.
   (б) **Б** казва “**А** и **В** са от един и същ тип, т.е. или и двамата са благородници, или и двамата са негодници”.
   (в) Какъв е **В**?

Доказателство.

а) Нека съждителната променлива a да има стойност $\mathbf{1}$, ако **А** е благородник и нека има стойност $\mathbf{0}$, ако **А** е негодник. Тогава

   а) Ако **А** е благородник, то **А**,**Б**,**В** са негодници се превежда на езика на съждителното смятане като

   $$a \to \overline{a}\overline{b}\overline{c}.$$

   Ако **А** е негодник, то той лъже, следователно не е вярно, че всички са негодници. Това се превежда на езика на съждителното смятане като

   $$\overline{a} \to \overline{\overline{a}\overline{b}\overline{c}},$$

   което е еквивалентно на

   $$\overline{a}\overline{b}\overline{c} \to a.$$

   Следователно, в двата случая за **А** получаваме

   $$(a \to \overline{a}\overline{b}\overline{c}) \wedge (\overline{a}\overline{b}\overline{c} \to a) \equiv \mathbf{1},$$

или

$$a \ \leftrightarrow \ \overline{a}\overline{b}\overline{c} \equiv \mathbf{1}.$$

Сега получаваме следните еквивалентни преобразования:

$$\begin{aligned} a \ \leftrightarrow \ \overline{a}\overline{b}\overline{c} \equiv & \ a\overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee \overline{a}(\overline{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}) \\ \equiv & \ \overline{a}(a \vee b \vee c) \\ \equiv & \ \overline{a}b \vee \overline{a}c \\ \equiv & \ \mathbf{1}. \end{aligned}$$

б) Правим аналогични разсъждения и за **Б**.

$$\begin{aligned} b \ \leftrightarrow \ (\overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c} \vee a\overline{b}\overline{c}) \equiv & \ b(\overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c} \vee a\overline{b}\overline{c}) \vee \overline{b}(\overline{\overline{a}\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c} \vee a\overline{b}\overline{c}}) \\ \equiv & \ \overline{a}b\overline{c} \ \vee \ \overline{b}(a \vee b \vee \overline{c})(a \vee \overline{b} \vee c)(\overline{a} \vee b \vee c) \\ \equiv & \ \overline{a}b\overline{c} \ \vee \ \overline{b}(a \vee a\overline{b} \vee ac \vee ab \vee bc \vee a\overline{c} \vee \overline{b}\overline{c})(\overline{a} \vee b \vee c) \\ \equiv & \ \overline{a}b\overline{c} \ \vee \ \overline{b}(a \vee bc \vee \overline{b}\overline{c})(\overline{a} \vee b \vee c) \\ \equiv & \ \overline{a}b\overline{c} \ \vee \ \overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee a\overline{b}c. \\ \equiv & \ \mathbf{1}. \end{aligned}$$

в) Сега взимаме конюнкцията на А) и Б).

$$(\overline{a}b \vee \overline{a}c) \wedge (\overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee a\overline{b}c \vee \overline{a}b\overline{c}) \equiv \ \overline{a}b\overline{c} \equiv \mathbf{1}.$$

Заключаваме, че **А** и **В** са негодници, а **Б** е благородник.

$\square$

1.2 Предикати и квантори

Квантори

Свойствата или отношенията на елементите в произволно множество се наричат **предикати**. Нека да разгледаме един едноместен предикат $P(\cdot)$.

твърдение	Кога е истина?	Кога е неистина?
$\forall x P(x)$	$P(x)$ е вярно за всяко x	съществува x, за което $P(x)$ **не** е вярно
$\exists x P(x)$	съществува x, за което $P(x)$ е вярно	$P(x)$ **не** е вярно за всяко x

(I) **Квантор за общност** $\forall x$. Записът $(\forall x \in A)P(x)$ означава, че за всеки елемент a в A, твърдението $P(a)$ има стойност истина. Например, $(\forall x \in \mathbb{R})[(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1]$.

(II) **Квантор за съществуване** $\exists x$. Записът $(\exists x \in A)P(x)$ означава, че съществува елемент a в A, за който твърдението $P(a)$ има стойност истина. Например, $(\exists x \in \mathbb{C})[x^2 = -1]$, но $(\forall x \in \mathbb{R})[x^2 \neq -1]$.

Закони на предикатното смятане

(I) $\neg\forall x P(x) \;\leftrightarrow\; \exists x \neg P(x)$

(II) $\neg\exists x P(x) \;\leftrightarrow\; \forall x \neg P(x)$

(III) $\forall x P(x) \;\leftrightarrow\; \neg\exists x \neg P(x)$

(IV) $\exists x P(x) \;\leftrightarrow\; \neg\forall x \neg P(x)$

(V) $\forall x \forall y P(x) \;\leftrightarrow\; \forall y \forall x P(x)$

(VI) $\exists x \exists y P(x,y) \;\leftrightarrow\; \exists y \exists x P(x)$

(VII) $\exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$

Закони на Де Морган за квантори			
твърдение	Еквивалентно твърдение	Кога е истина?	Кога е неистина?
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	за всяко x $P(x)$ **не** е вярно	съществува x, за което $P(x)$ е вярно
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	съществува x, за което $P(x)$ **не** е вярно	$P(x)$ е вярно за всяко x

Задача 3. Да означим с $K(x,y)$ твърдението “x познава y”. Изразете като предикатна формула следните твърдения.

$\forall x \exists y K(x,y)$

1) Всеки познава някого.

2) Някой познава всеки. $\exists x \forall y K(x, y)$

3) Някой е познаван от всички. $\exists x \forall y K(y, x)$

4) Всеки знае някой, който не го познава. $\forall x \exists y (K(x, y) \wedge \neg K(y, x))$

5) Има такъв, който знае всеки, който го познава. $\exists x \forall y (K(y, x) \ \rightarrow K(x, y))$

6) Всеки двама познати имат общ познат. $(\forall x, y)(K(x, y) \ \& \ K(y, x) \rightarrow \exists z (K(x, z) \ \& \ K(y, z))$

Задача 4. Нека $G(x)$ означава, че човекът x е добър.

1) Изразете с формула твърдението, че всички хора са добри *без* да използвате квантора $\forall$, а само квантора $\exists$ и логическите връзки.

2) Изразете с формула твърдението, че *поне един* човек е добър *без* да използвате квантора $\exists$, а само квантора $\forall$ и логическите връзки.

Пример 3. Казваме, че редицата $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ е сходяща и клони към a, ако

$$(\forall \varepsilon)(\exists N)(\forall n)[n > N \implies |a - q_n| < \varepsilon].$$

Обикновено това означаваме като $\lim_n q_n = a$. Да видим какво означава, че $\lim_n q_n \neq a$.

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall \varepsilon)(\exists N)(\forall n)[n > N \implies |a - q_n| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&\neg(\forall \varepsilon)(\exists N)(\forall n)[n \leq N \vee |a - q_n| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon)\neg(\exists N)(\forall n)[n \leq N \vee |a - q_n| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon)(\forall N)\neg(\forall n)[n \leq N \vee |a - q_n| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon)(\forall N)(\exists n)\neg[n \leq N \vee |a - q_n| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon)(\forall N)(\exists n)\neg[n \leq N \vee |a - q_n| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon)(\forall N)(\exists n)[n > N \ \wedge \ |a - q_n| \geq \varepsilon].
\end{aligned}$$

Пример 4. Казваме, че $f : D \to \mathbb{R}$ е *непрекъсната* в точката $x_0 \in D$, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)[|x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon].$$

Да видим какво означава f да бъде *прекъсната* в точката $x_0 \in D$: f е прекъсната в x_0 ако f не е непрекъсната в x_0

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)[|x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon > 0)\neg(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)[|x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)\neg(\forall x \in D)[|x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D)\neg[|x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D)\neg[\neg(|x_0 - x| < \delta) \vee |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D)[\neg\neg(|x_0 - x| < \delta) \wedge \neg(|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon)] \ \leftrightarrow \\
&(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in D)[|x_0 - x| < \delta \ \wedge \ |f(x_0) - f(x)| \geq \varepsilon].
\end{aligned}$$

Задача 5. Казваме, че $f : D \to \mathbb{R}$ е *равномерно непрекъсната*, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)(\forall y \in D)[|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Напишете формула, която казва, че f не е равномерно непрекъсната.

(От [1])

Задача 6. На един остров живеели два вида обитатели - благородници и негодници. Благородниците винаги казвали истината, а негодниците винаги лъжели. Един пътешественик попаднал на този остров и искал да разбере повече за неговите обитатели. Всеки обитател на острова му казал:

$\forall x(K(x) \leftrightarrow (\forall x K(x) \vee \forall x \neg K(x))) \to ?$

$\forall x(K(x) \leftrightarrow (\exists x K(x) \wedge \exists x \neg K(x))) \to ?$

а) "Всички тук сме от един и същ вид". Какви са жителите на острова?

б) "Някои от нас са благородници и някои от нас са негодници". Какви са жителите на острова?

Доказателство. Нека с $K(x)$ да означаваме, че жителят x е благородник (от англ. Knight), и съответно с $\neg K(x)$ ще означаваме, че жителят x е негодник.

а) Твърдението, което казва, че всички обитетели са от един и същ вид може да се преведе на езика на предикатното смятане като:

$$\forall x K(x) \vee \forall x \neg K(x).$$

Тогава, понеже ако обитателят x е благородник, той винаги казва истината, следната формула е вярна:

$$(\forall x)[K(x) \to (\forall x K(x) \vee \forall x \neg K(x))].$$

Съответно ако x е негодник, то той винаги казва лъжа,

$$(\forall x)[\neg K(x) \to \neg(\forall x K(x) \vee \forall x \neg K(x))].$$

Така получаваме формулата

$$(\forall x)[K(x) \ \leftrightarrow \ (\forall x K(x) \vee \forall x \neg K(x))].$$

- Ако има благородник на острова, то всички са благородници.
- Ако има негодник на острова, то има и благородник. Но щом има благородник, всички са благородници. Противоречие.

б)
- Ако има негодник на острова, то всички са негодници.
- Ако има благородник на острова, то има и негодник. Щом има негодник, то всички са негодници. Противоречие.

□

Задача 7. След това пътешественикът попаднал на друг остров, на който той силно се интересувал от това дали обитателите пушат. Жителите на този остров му отговорили така.

$\forall x(K(x) \leftrightarrow \forall y(K(y) \to S(y))) \to ?$

а) "Всички благородници пушат." Какви са жителите на острова и пушат ли ?

$\forall x(K(x) \leftrightarrow \exists y(\neg K(y) \wedge S(y))) \to ?$

б) "Някои негодници пушат." Какви са жителите на острова и пушат ли ?

Решение.

а) • Има благородник на острова. Тогава всички благородници пушат. Ако има също така и негодник на острова, то тогава има благородник, който не пуше. Това е противоречие. Следователно, ако има поне един благородник, то всички обитатели са благородници.

• Има негодник на острова. Тогава има благородник на острова, който не пуше. Но тогава пък всички благородници пушат, което е противоречие.

Заключаваме, че всички обитателя на острова са благородни пушачи.

б) Да допуснем, че има благородник на острова. Следователно има и негодник, който пуше. Но тогава $(\forall y)[K(y) \vee \neg S(y)]$, което означава, че всички негодници са непушачи. Достигнахме до противоречие. Следователно всички обитатели на острова са негодници, които са непушачи.

$\square$

Задача 8. Пътешественикът отишъл и на трети остров, на който всички обитатели били от един и същ вид.

Добавяме $\forall x K(x) \vee \forall x \neg K(x)$

а) "Ако аз пуша, то всички пушат."

$\forall x(K(x) \leftrightarrow (S(x) \rightarrow \forall y S(y)))$

б) "Ако някой обитател на острова пуше, то и аз пуша."

$\forall x(K(x) \leftrightarrow (\exists y S(y) \rightarrow S(x)))$

в) "Някои пушат, но аз не."

$\forall x(K(x) \leftrightarrow (\exists y S(y) \wedge \neg S(x)))$

г) "Някои пушат." и след това добавили - "Аз не пуша.".

$\forall x(K(x) \leftrightarrow \exists y S(y)) \wedge$
$\forall x(K(x) \leftrightarrow \neg S(x))$

Какво можем да кажем за обитателите на този остров?

Решение.

а) Ако всички негодници, то $(\forall x)[S(x) \wedge \exists y \neg S(y)]$, което е невъзможно. Следователно, всички са благородници. Тогава или всички пушат или никой не пуше.

б) Ако всички са негодници, то $(\forall x)[\exists y S(y) \wedge \neg S(x)]$, което е невъзможно. Следователно, всички са благородници. Тогава или всички пушат или никой не пуше.

в) Ако всички са благородници, то $(\forall x)[\exists y S(y) \wedge \neg S(x)]$, което е невъзможно. Следователно, всички са негодници. Тогава $(\forall x)[\forall y \neg S(y) \vee S(x)]$, което означава, че или всички пушат или никой не пуше.

г) Тази ситуация е невъзможна!

$\square$

Глава 2

Множества

2.1 Основни понятия

Множество е съвкупност от обекти (елементи). Едно множество може също така да бъде елемент на някое друго множество. Използваме означението $x \in A$, че обектът x принадлежи на множеството A.

Празното множество означаваме с $\emptyset$. То има следното свойство:

$$(\forall x)[x \notin \emptyset]$$

или еквивалентно,

$$\neg(\exists x)[x \in \emptyset].$$

Пример 5. Ето няколко примера за множества, които ще използваме често:

- Естествените числа,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\};$$

- Целите числа,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\};$$

- Рационалните числа,

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \;\&\; n \neq 0\}.$$

2.2 Сравняване на множества

Казваме, че едно множество A **се включва в** множеството B, което означаваме с $A \subseteq B$, ако всеки елемент, който принадлежи на A, принадлежи и на B, т.е.

$$(\forall x)[x \in A \;\rightarrow\; x \in B].$$

Обикновено ще казваме, че A е **подмножество** на B. Ето няколко примера:

- $\emptyset \subseteq A$, за всяко множество A.
- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.
- $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$.
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Две множества A и B са **равни**, ако

$$A = B \ \leftrightarrow \ A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A.$$

2.3 Операции върху множества

Ще разгледаме няколко операции върху произволни множества A и B.

(I) Сечение

$$A \cap B = \{x \ \mid \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Казано по-формално, $A \cap B$ е множеството, за което е изпълнена формулата

$$(\forall x)[x \in A \cap B \ \leftrightarrow \ (x \in A \ \wedge \ x \in B)].$$

Примери:

- $A \cap A = A$, за всяко множество A.
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, за всяко множество A.
- $\{1, \emptyset, \{\emptyset\}\} \cap \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.
- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \cap \{1, \{1\}\} = \{1\}$.

(II) Обединение

$$A \cup B = \{x \ \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

$A \cup B$ е множеството, за което е изпълнена формулата

$$(\forall x)[x \in A \cup B \ \leftrightarrow \ (x \in A \ \vee \ x \in B)].$$

Примери:

- $A \cup A = A$, за всяко множество A.
- $A \cup \emptyset = A$, за всяко множество A.
- $\{1, 2, \emptyset\} \cup \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{1, 2, \emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \cup \{1, \{1\}\} = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$.

(III) Разлика

$$A \setminus B = \{x \ \mid \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

$A \setminus B$ е множеството, за което е изпълнена формулата

$$(\forall x)[x \in A \setminus B \ \leftrightarrow \ (x \in A \ \wedge \ x \notin B)].$$

Примери:

- $A \setminus A = \emptyset$, за всяко множество A.
- $A \setminus \emptyset = A$, за всяко множество A.
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$, за всяко множество A.
- $\{1, 2, \emptyset\} \setminus \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$.
- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \setminus \{1, \{1\}\} = \{2, \{1, 2\}\}$.

(IV) Симетрична разлика

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

$A \triangle B$ е множеството, за което е изпълнена формулата

$$(\forall x)[x \in A \triangle B \;\leftrightarrow\; [(x \in A \;\wedge\; x \notin B) \vee (x \in B \;\wedge\; x \notin A)]].$$

Примери:

- $A \triangle \emptyset = A$, за всяко множество A.
- $A \triangle A = \emptyset$, за всяко множество A.
- $A \triangle B = B \triangle A$, за всеки две множества A и B.
- $\{1, 2, \emptyset\} \triangle \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- $\{1, 2, \{1, 2\}\} \triangle \{1, \{1\}\} = \{2, \{1, 2\}\} \cup \{\{1\}\} = \{2, \{1\}, \{1, 2\}\}$.

(V) Степенно множество

$$\mathscr{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

$\mathscr{P}(A)$ е множеството, за което е изпълнена формулата

$$(\forall x)[x \in \mathscr{P}(A) \;\leftrightarrow\; (\forall y)[y \in x \rightarrow y \in A]].$$

Примери:

- $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- $\mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- $\mathscr{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
- $\mathscr{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
- $\mathscr{P}(\{\emptyset, \{1\}, 1\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, 1\}, \{1, \{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, 1\}\}$

По-късно ще видим, че ако A има n на брой елемента, то $\mathscr{P}(A)$ има 2^n елемента

Нека имаме редица от множества $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Тогава имаме следните операции:

(I) Обединение на редица от множества

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \exists i (1 \leq i \leq n \;\&\; x \in A_i)\}.$$

$$(\forall x)[x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \;\leftrightarrow\; (\exists i)[1 \leq i \leq n \;\wedge\; x \in A_i]].$$

(II) Сечение на редица от множества

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i(1 \leq i \leq n \to x \in A_i)\}.$$

$$(\forall x)[x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \;\leftrightarrow\; (\forall i)[1 \leq i \leq n \;\to\; x \in A_i]].$$

Пример 6. Нека $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$ и $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$. Тогава :

- $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$,
- $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\}$,
- $A \setminus B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 3\}$,
- $B \setminus A = \emptyset$,
- $A \triangle B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 3\}$

Задача 9. Нека $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq \frac{1}{2}\}$. Намерете:

- $A \cup B$;
- $A \cap B$;
- $A \setminus B$;
- $B \setminus A$;
- $A \triangle B$.

Задача 10. Намерете $\mathscr{P}(A)$, където:

а) $A = \emptyset$. $\{\emptyset\}$

б) $A = \{1, 2\}$. $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

в) $A = \{\{1, 2\}\}$. $\{\emptyset, \{\{1, 2\}\}\}$

г) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

д) $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, 7\}$.

е) $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Задача 11. Проверете верни ли са свойствата:

а) $A \subseteq B \;\leftrightarrow\; A \setminus B = \emptyset \;\leftrightarrow\; A \cup B = B \;\leftrightarrow\; A \cap B = A$;

б) $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$, $A \setminus B = B \setminus A$.

в) $A \cap (B \cup A) = A \cap B$;

г) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

д) $C \subseteq A \;\&\; C \subseteq B \to C \subseteq A \cap B$;

е) $A \subseteq C$ & $B \subseteq C \to A \cup B \subseteq C$;

ж) $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B)$;

з) $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cup B = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cup B)$;

и) $A \setminus B = A \;\leftrightarrow\; A \cap B = \emptyset$;

к) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ и $A \setminus B = A \setminus (A \cup B)$;

Не е вярно!

л) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

м) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$;

Закони на Де Морган

н) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ и $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

о) $C \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n}(C \setminus A_i)$ и $C \setminus (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n}(C \setminus A_i)$;

п) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ и $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

р) $A \triangle B = B \triangle A$ и $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

с) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$;

т) $A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$;

у) $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$;

ф) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$;

х) $A \cap (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$;

ц) $A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$;

ч) $A \triangle A = A$ и $A \triangle B = \emptyset \;\leftrightarrow\; A = B$;

ш) $A \triangle B = C \;\leftrightarrow\; B \triangle C = A \;\leftrightarrow\; C \triangle A = B$;

щ) $A \subseteq B \Rightarrow \mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$;

$X \subseteq A \cup B \overset{?}{\Rightarrow} X \subseteq A \vee X \subseteq B$

ю) $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ и $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$;

я) $\mathscr{P}(A \setminus B) = \mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B)$ и $\mathscr{P}(A \triangle B) = \mathscr{P}(A) \triangle \mathscr{P}(B)$.

Задача 12. Да се решат системите с променлива X:

$X \overset{?}{=} C \cup (A \setminus B)$

а) $\left| \begin{array}{lcl} A \setminus X & = & B \\ X \setminus A & = & C, \end{array} \right.$

където са дадени множествата A, B, C и $B \subseteq A$, $A \cap C = \emptyset$;

б) $\left| \begin{array}{lcl} A \cap X & = & B \\ A \cup X & = & C, \end{array} \right.$

където са дадени множествата A, B, C и $B \subseteq A \subseteq C$;

в) $\left| \begin{array}{lcl} A \setminus X & = & B \\ A \cup X & = & C, \end{array} \right.$

където са дадени множествата A, B, C и $B \subseteq A \subseteq C$.

Следващият пример проказва, че трябва да бъдем внимателни как строим нови множества.

Пример 7. Нека съвкупността от обекти D е определена като

$$D = \{A \mid A \text{ е множество и } A \notin A\}.$$

Тогава:

а) Ако $D \in D$, то $D \notin D$. Противоречие.

б) Ако $D \notin D$, то $D \in D$. Противоречие.

Глава 3

Релации

За да дадем определение на понятието релация, трябва първо да въведем понятието декартово произведение на множества, което пък от своя страна се основава на понятието наредена двойка.

Наредена двойка

За два елемента a и b въвеждаме опрецията **наредена двойка** $\langle a, b\rangle$. Наредената двойка $\langle a, b\rangle$ има следното характеристичното свойство:

$$a_1 = a_2 \ \wedge\ b_1 = b_2 \quad \leftrightarrow \quad \langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle.$$

Понятието наредена двойка може да се дефинира по много начини, стига да изпълнява харектеристичното свойство. Ето примери как това може да стане:

Norbert Wiener (1914)

1) Първото теоретико-множествено определение на понятието наредена двойка е дадено от Норберт Винер:

$$\langle a, b\rangle = \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}.$$

Kazimierz Kuratowski (1921)

2) Определението на Куратовски се приема за „стандартно“ в наши дни:

$$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Задача 13. Докажете, че горните дефиниции наистина изпълняват характеристичното свойство за наредени двойки.

Забележка. Сега можем да въведем понятието наредена n-орка $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ за всяко естествено число $n \geq 1$:

$$\langle a_1\rangle = a_1,$$
$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle = \langle a_1, \langle a_2, \dots, a_n\rangle\rangle$$

3.1 Декартово произведение

На англ. cartesian product

За две множества A и B, определяме тяхното декартово произведение като

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \ \& \ b \in B\}.$$

Считаме, че $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$

За краен брой множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, определяме

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \mid a_1 \in A_1 \ \& \ a_2 \in A_2 \ \& \ \ldots \ \& \ a_n \in A_n\}.$$

Задача 14. Преверете дали:

а) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

в) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

г) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

д) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

е) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

ж) $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$;

з) $\mathscr{P}(A \times B) = \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$;

3.2 Основни видове бинарни релации

Релациите от вида $R \subseteq A \times A$ са важен клас, който ще срещаме често. Да разгледаме няколко основни вида релации от този клас:

I) **рефликсивна**, ако

$$(\forall x \in A)[\langle x, x\rangle \in R].$$

Например, релацията $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е рефлексивна, защото

$$(\forall x \in \mathbb{N})[x \leq x].$$

II) **антирефлексивна**, ако

$$(\forall x \in A)[\langle x, x\rangle \notin R].$$

Например, релацията $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е антирефлексивна, защото

$$(\forall x \in \mathbb{N})[x \not< x].$$

III) **транзитивна**, ако

$$(\forall x, y, z \in A)[\langle x, y\rangle \in R \ \& \ \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R].$$

Например, релацията $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е транзитивна, защото

$$(\forall x, y, z \in A)[x \leq y \ \& \ y \leq z \ \rightarrow \ x \leq z].$$

IV) **симетрична**, ако

$$(\forall x, y \in A)[\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \in R].$$

Например, релацията $= \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е рефлексивна, защото

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[x = y \ \to \ y = x].$$

V) **антисиметрична**, ако

$$(\forall x, y \in A)[\langle x, y\rangle \in R \ \& \ \langle y, x\rangle \in R \to x = y].$$

Например, релацията $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е антисиметрична, защото

$$(\forall x, y, z \in A)[x \leq y \ \& \ y \leq x \ \to \ x = y].$$

VI) **асиметрична**, ако

$$(\forall x, y)[\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \notin R].$$

Например, релацията $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е асиметрична, защото

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[x < y \ \to \ y \not< x].$$

Забележка. Добре е да запомните как се наричат тези основни видове релации, защото ще ги използваме често. Обърнете също внимание, че ако една релация *не* е рефлексивна, то това не означава, че тя е антирефлексивна. Също така, ако една релация *не* е симетрична, то това не означава, че тя е антисиметрична или асиметрична.

Пример 8. Да обобщим примерите от по-горе.

а) Релацията $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична.

б) Релацията $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е антирефлексивна, транзитивна и асиметрична.

в) Релацията $= \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е рефлексивна, транзитивна и симетрична.

Задача 15. Проверете кои от горе-изброените свойства притежава релацията R:

Озн. $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$a|b \ \leftrightarrow \ (\exists k \in \mathbb{N})(b = k \cdot a)$

а) $R \subseteq \mathbb{N}^2$ и е определна като

$$(a, b) \in R \ \leftrightarrow \ a|b.$$

б) $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ е определена като

$$(x, y) \in R \ \leftrightarrow \ \text{НОД}(x, y) = 1$$

Озн. $\mathbb{R}$ - реалните числа

в) $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ и е определена като

$$(a, b) \in R \ \leftrightarrow \ a \cdot b > 0.$$

г) $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ и е определена като

$$(a,b) \in R \ \leftrightarrow \ a+b=0.$$

д) $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ и е определена като

$$(a,b) \in R \ \leftrightarrow \ a+b=5.$$

е) $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ и е определена като

$(a,b) \in R \ \leftrightarrow \ a+b$ е четно.

ж) $R \subseteq (\mathbb{Z}^2)^2$ и е определена като

$$(\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle) \in R \ \leftrightarrow \ a+d=b+c.$$

з) $R \subseteq (\mathbb{Z}^2)^2$ и е определена като

$$(\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle) \in R \ \leftrightarrow \ a \cdot d=b \cdot c.$$

и) $R \subseteq (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))^2$ и е определена като

$$(\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle) \in R \ \leftrightarrow \ a \cdot d=b \cdot c.$$

Озн. $\mathbb{Z}$ - целите числа

к) $R_m \subseteq \mathbb{Z}^2, m \in \mathbb{Z}, m > 0$ и е определена като

$$\langle a,b\rangle \in R_m \ \leftrightarrow \ m \mid (a-b).$$

л) $R \subseteq \mathbb{R}^2$ и е определена като

$(x,y) \in R \ \leftrightarrow \ (x-y)$ е рационално число.

Озн. $\mathbb{Q}$ - рационалните числа

м) $R \subseteq \mathbb{Q}^2$ и е определена като

$(p,r) \in R \quad \leftrightarrow \quad p-r$ е цяло число.

н) $R \subseteq \mathbb{N}^2$ и е определена като

$$(a,b) \in R \ \leftrightarrow \ a=b \vee a+1=b.$$

о) $R \subseteq \mathbb{N}^2$ и е определена като

$$\langle a,b\rangle \in R \ \leftrightarrow \ (\exists k \in \mathbb{N})[a+k=b].$$

п) Нека $\leq_1 \subseteq A^2$ и $\leq_2 \subseteq B^2$ са частични наредби. $R \subseteq A^2 \times B^2$ е определена като

$$(\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle) \in R \ \leftrightarrow \ a \leq_1 c \ \wedge \ b \leq_2 d.$$

р) Нека $\leq_1 \subseteq A^2$ и $\leq_2 \subseteq B^2$ са частични наредби. $R \subseteq A^2 \times B^2$ е определена като

$$(\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle) \in R \ \leftrightarrow \ a \leq_1 c \ \vee \ b \leq_2 d.$$

Задача 16. Нека R и S са релации на еквивалентност върху множеството A. Какви свойства притежават следните релации:

а) $R \cap S$;

б) $R \cup S$;

в) $R \setminus S$;

Задача 17. Нека $\Sigma = \{1, 2, \dots, 9\}$ и n е ествествено число. Нека $R \subseteq \Sigma^n \times \Sigma^n$, където $(\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle, \langle b_1, b_2, \dots, b_n\rangle) \in R \leftrightarrow a_i + 1 \equiv b_1(\mod 2)$.

Задача 18. За едно число $x \in \mathbb{N}$, нека с $x_{(2)}$ да означаваме най-късия двоичния запис на n, а с $N_0(x)$ и $N_1(x)$ броя на 0-лите и съответно броя на 1-ците в $x_{(2)}$. Нека $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, където

1. $(x, y) \in R$ iff $N_0(x) \leq N_0(y)$ & $N_1(x) \leq N_1(y)$.

2. $(x, y) \in R$ iff $N_0(x) = N_0(y) \ \vee \ N_1(x) = N_1(y)$.

Задача 19. Кои от следните бинарни релации върху множеството на функциите от $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ са релации на еквивалентност? Опишете техните класове на еквивалентност.

а) $R = \{(f, g) \mid f(1) = g(1)\}$.

б) $R = \{(f, g) \mid f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1)\}$.

в) $R = \{(f, g) \mid (\forall x \in \mathbb{Z})[f(x) - g(x) = 1]\}$.

г) $R = \{(f, g) \mid (\exists c \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})[f(x) - g(x) = c]\}$.

д) $R = \{(f, g) \mid f(0) = g(1) \wedge f(1) = g(0)\}$.

3.3 Релации над думи

- Азбука е крайно множество $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$ като елементите a_i на Σ наричаме **букви**.
- Нека да фиксираме един елемент $\varepsilon \notin \Sigma$. Сега ще определим **думите** над азбуката Σ. Това са:
  - ε е дума над Σ; (наричаме ε празната дума)
  - Нека α е дума над Σ и $a \in \Sigma$ е буква. Тогава αa е дума над Σ; (т.е. думите са крайни последователности от букви)
  - няма други думи над Σ.
- Означаваме с Σ^n множеството от всички думи с дължина n над азбуката Σ, $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$, защото празната дума е единствената дума с дължина 0.
- Със $\Sigma^\star$ означаваме множеството от всички думи над азбуката Σ, т.е. ($0 \in \mathbb{N}$)

$$\Sigma^\star = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n.$$

Сега ще определим функцията **дължина** на дума. Дължината $|\alpha|$ на думата $\alpha \in \Sigma^\star$ се определя с индукция по построението на α.

Функцията $|\cdot| : \Sigma^\star \to \mathbb{N}$ е винаги сюрективна. Кога е биективна?

(i) Нека $\alpha = \varepsilon$. Тогава $|\alpha| = 0$.

(ii) Нека $\alpha = \beta a$, за някоя дума $\beta \in \Sigma^\star$ и някоя буква $a \in X$. Тогава

$$|\alpha| = |\beta| + 1.$$

Определяме функцията **конкатенация** $\cdot$, т.е. слепване на две думи. За всеки две думи α и β от $\Sigma^\star$ определяме тяхната конкатенация с индукция по дължината β:

$\cdot : \Sigma^\star \times \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ е винаги сюрективна. Може ли да бъде биективна?

(i) $|\beta| = 0$, т.е. $\beta = \varepsilon$. Тогава $\alpha \cdot \beta = \alpha$.

(ii) $|\beta| = n + 1$, т.е. $\beta = \gamma b$, за някоя дума γ, $|\gamma| = n$, и някоя буква $b \in \Sigma$. Тогава $\alpha \cdot \beta = (\alpha \cdot \gamma) \cdot b$.

Казваме, че думата α е **начало** на думата β, ако съществува дума $\gamma \in \Sigma^\star$ такава, че $\beta = \alpha \cdot \gamma$. Обикновено означаваме $\alpha \preceq \beta$. Аналогично дефинираме α да бъде **край** на думата β, ако съществува $\gamma \in \Sigma^\star$ такава, че $\beta = \gamma \cdot \alpha$.

Задача 20. Нека $\Sigma = \{0, 1\}$. Какви свойства имат следните бинарни релации над $\Sigma^\star$? Ако R е релация на еквивалентност, то опишете нейните класове на еквивалентност и намерете техния брой.

а) $(\alpha, \beta) \in R \;\leftrightarrow\; \alpha \preceq \beta$;

б) $(\alpha, \beta) \in R \;\leftrightarrow\; (\exists \gamma \in \Sigma^\star)[\exists a, b \in \Sigma)(\gamma a \preceq \alpha \;\&\; \gamma b \preceq \beta \;\&\; a \neq b]$;

в) $(\alpha, \beta) \in R \;\leftrightarrow\; (\exists \gamma \in \Sigma^\star)[\exists a, b \in \Sigma)(\gamma a \preceq \alpha \;\&\; \gamma b \preceq \beta \;\&\; a < b]$;

г) $(\alpha, \beta) \in R \;\leftrightarrow\; \alpha \preceq \beta \vee (\exists \gamma \in \Sigma^\star)[\exists a, b \in \Sigma)(\gamma a \preceq \alpha \;\&\; \gamma b \preceq \beta \;\&\; a < b]$;

д) $(\alpha, \beta) \in R \;\leftrightarrow\; |\alpha| = |\beta| \;\&(\forall i \leq |\alpha|)[a_i \leq b_i]$;

е) $(\alpha, \beta) \in R \;\leftrightarrow\; (\forall i \leq \min\{|\alpha|, |\beta|\})[a_i \leq b_i]$;

ж) $(\alpha, \beta) \in R \;\leftrightarrow\; (\exists \gamma_1, \gamma_2 \in \Sigma^\star)[\beta = \gamma_1 \alpha \gamma_2]$;

з) за фиксирано число n,

$$(\alpha, \beta) \in R \;\leftrightarrow\; (\exists \gamma \in \Sigma^n)[\gamma \preceq \alpha \;\&\; \gamma \preceq \beta].$$

и) за фиксирано число n,

$$(\alpha, \beta) \in R \;\leftrightarrow\; \alpha = \beta \vee (\alpha \neq \beta \;\&\; (\exists \gamma \in \Sigma^n)[\gamma \preceq \alpha \;\&\; \gamma \preceq \beta]).$$

к) за фиксирано число n,

$$(\alpha, \beta) \in R \;\leftrightarrow\; |\alpha| = |\beta| > n \;\&\; (\forall i > n)[a_i = b_i].$$

Задача 21. Да фиксираме две множества $B \subseteq A$. Дефинираме бинарната релация R върху $\mathscr{P}(A)$ по следния начин:

$$R = \{(X, Y) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(A) \mid (X \triangle Y) \subseteq B\}.$$

Докажете, че:

а) R е релация на еквивалентност;

б) за всяко $X \in \mathscr{P}(A)$ съществува точно едно множество $Y \in [X]_R$, за което $Y \cap B = \emptyset$.

3.4 Операции върху релации

I) **Композиция** на две релации $S \subseteq B \times C$ и $T \subseteq A \times B$ е релацията $S \circ T \subseteq A \times C$, определена като:

$$S \circ T = \{\langle a, c\rangle \mid (\exists b \in B)[\langle a, b\rangle \in T \ \& \ \langle b, c\rangle \in S]\}.$$

II) **Обръщане** на релацията $R \subseteq A \times B$ е релацията $R^{-1} \subseteq B \times A$, определена като:

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}.$$

Очевидно е, че P е рефлексивна релация, дори ако R не е.

III) **Рефлексивно затваряне** на релацията $R \subseteq A \times A$ е релацията

$$P = R \cup \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}.$$

IV) **Итерация** на релацията $R \subseteq A \times A$ дефинираме като за всяко естествено число n, дефинираме релацията R^n по следния начин:

Лесно се вижда, че $R^1 = R$

$$\begin{aligned} R^0 &= A \times A \\ R^{n+1} &= R^n \circ R. \end{aligned}$$

✍ Проверете, че R^+ е транзитивна релация!

V) **Транзитивно затваряне** на $R \subseteq A \times A$ е релацията

$$R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n.$$

За дадена релация R, с $R^\star$ ще означаваме нейното рефлексивно и транзитивно затваряне. От дефинициите е ясно, че

$$R^\star = \bigcup_{n \geq 0} R^n.$$

Задача 22. Ако P е множеството от всички хора, да разгледаме релациите

$$\begin{aligned} E &= \{\langle x, y\rangle \in P \times P \mid x \text{ е враг на } y\}, \\ F &= \{\langle x, y\rangle \in P \times P \mid x \text{ е приятел на } y\}. \end{aligned}$$

Ако приемем, че поговорката „врагът на моя враг е мой приятел” е вярна, то какво ни казва това за релациите E и F ?

Пример 9. Да разгледаме релацията R над $\mathbb{N}$, за която $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x + 1 = y\}$. Тогава:

- $R^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$;
- $R^n = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x + n = y\}$, за всяко $n \in \mathbb{N}$;
- $R^+ = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists n \geq 1)[x + n = y]\} = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x < y\}$;
- $R^\star = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$.

Задача 23. Дайте пример за релации R и S, за които

$$R \circ S \neq S \circ R.$$

Задача 24. Докажете, че:

а) R е симетрична тогава и само тогава, когато $R^{-1} \subseteq R$;

б) R е транзитивна тогава и само тогава, когато $R \circ R \subseteq R$;

в) R е транзитивна и симетрична тогава и само тогава, когато $R = R^{-1} \circ R$.

Доказателство.

а) Задачата се разделя на две подзадачи.

(i) Нека R да бъде симетрична. Ще докажем, че $R^{-1} \subseteq R$, т.е.

$$(\forall x \forall y)[(x,y) \in R^{-1} \rightarrow (x,y) \in R].$$

Нека $(x,y) \in R^{-1}$. Тогава по определение имаме, че $(y,x) \in R$ и следователно $(x,y) \in R$, защото R е симетрична.

(ii) Нека $R^{-1} \subseteq R$. Ще докажем, че R е симетрична, т.е.

$$(\forall x \forall y)[(x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R].$$

Нека $(x,y) \in R$, следователно по определение $(y,x) \in R^{-1}$. Тогава от $R^{-1} \subseteq R$ следва, че $(y,x) \in R$.

б) Тази задача е лесна.

в) Нека $R^{-1} \circ R = R$. Ще докажем, че R е симетрична и транзитивна.

(i) Ще докажем, че R е симетрична. За целта е достатъчно да вземем произволна двойка $\langle x,y \rangle \in R$ и да покажем, че $\langle y,x \rangle \in R$. Нека

$$\begin{aligned}
\langle x,y \rangle \in R \;&\leftrightarrow\; \langle x,y \rangle \in R^{-1} \circ R && \text{(имаме, че } R^{-1} \circ R = R\text{)}\\
&\leftrightarrow\; (\exists z)[\langle x,z \rangle \in R \;\wedge\; \langle z,y \rangle \in R^{-1}]\\
&\leftrightarrow\; (\exists z)[\langle z,x \rangle \in R^{-1} \;\wedge\; \langle y,z \rangle \in R]\\
&\leftrightarrow\; (\exists z)[\langle y,z \rangle \in R \;\wedge\; \langle z,x \rangle \in R^{-1}]\\
&\leftrightarrow\; \langle y,x \rangle \in R^{-1} \circ R\\
&\leftrightarrow\; \langle y,x \rangle \in R.
\end{aligned}$$

Следователно,

$$(\forall x, y \in A)[\langle x,y \rangle \in R \;\rightarrow\; \langle y,x \rangle \in R].$$

(ii) Ще докажем, че R е транзитивна. За целта е достатъчно да вземем произволни двойки $\langle x,y \rangle \in R$ и $\langle y,z \rangle \in R$, то $\langle x,z \rangle \in R$.

$$\dfrac{\dfrac{\langle x,y \rangle \in R \qquad \dfrac{\dfrac{\langle y,z \rangle \in R}{\langle z,y \rangle \in R}\;(R \text{ е симетрична})}{\langle y,z \rangle \in R^{-1}}}{\langle x,z \rangle \in R^{-1} \circ R}}{\langle x,z \rangle \in R}\;(R^{-1} \circ R = R)$$

Следователно,

$$(\forall x, y, z \in A)[(\langle x, y\rangle \in R \ \wedge \ \langle y, z\rangle \in R) \to \ \langle x, z\rangle \in R].$$

Нека сега R е транзитивна и симетрична. Ще докажем, че $R^{-1} \circ R = R$.

(i) Първо да отбележим, че

$$\dfrac{\langle x, y\rangle \in R \qquad \dfrac{\langle x, y\rangle \in R}{\langle y, x\rangle \in R}\,(R \text{ е симетрична})}{\langle x, x\rangle \in R \ \wedge \langle y, y\rangle \in R}\,(R \text{ е транзитивна})$$

Следователно,

$$(\forall x \in Dom(R))[\langle x, x\rangle \in R].$$

(ii) Ще докажем, че $R^{-1} \circ R \subseteq R$.

$$\dfrac{\langle x, z\rangle \in R \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle x, y\rangle \in R^{-1} \circ R}{\langle z, y\rangle \in R^{-1}}\,(\text{Съществува } z)}{\langle y, z\rangle \in R}}{\langle z, y\rangle \in R}\,(R \text{ е симетрична})}{\langle x, y\rangle \in R}\,(R \text{ е транзитивна})$$

(iii) Ще докажем, че $R \subseteq R^{-1} \circ R$.

$$\dfrac{\langle x, y\rangle \in R \qquad \dfrac{\dfrac{\langle x, y\rangle \in R}{\langle y, y\rangle \in R}\,(\text{От (i)})}{\langle y, y\rangle \in R^{-1}}}{\langle x, y\rangle \in R^{-1} \circ R}\,(\text{по деф.})$$

□

Задача 25. Нека $\{\langle a, b\rangle\} \subseteq R$, за някои $a \neq b$. Докажете, че ако R е симетрична, то R не е антисиметрична.

Задача 26. Нека R да бъде релация на еквивалентност върху B и $f : A \to B$. Дефинираме множеството

$$Q = \{((x, y) \in A \times A \mid (f(x), f(y)) \in R\}.$$

Докажете, че Q е релация на еквивалентност.

Задача 27. Нека R е релация върху A. Да определим релациите:

- $S = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \ \wedge \ \langle y, x\rangle \in R\}$;
- $T = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \ \wedge \ \langle y, x\rangle \notin R\}$.

Докажете, че:

а) S е симетрична и T е антисиметрична.

б) $\langle x, y\rangle \in R \ \ \leftrightarrow \ \ (\langle x, y\rangle \in S \vee \langle x, y\rangle \in T)$;

в) ако R е транзитивна, то S и T са също транзитивни, но обратната посока не е вярна.

Нека $R \subseteq A \times A$ е бинарна релация. Да определим множеството $[x]_R$ като

$$[x]_R = \{y \in A \mid \langle x, y\rangle \in R\}.$$

Ако R е релация на еквивалентност и $x \in Field(R)$, то наричаме множеството $[x]_R$ **клас на еквивалентност** за x относно релацията R.

Пример 10. Нека S е множеството от всички студенти, които живеят в Студентски град. Да разгледаме следната бинарна релация над S:

$$R = \{\langle x, y\rangle \in S \times S \mid x \text{ живее в същия блок като } y\}.$$

Лесно се съобразява, че R е релация на еквивалентност. Тогава всеки блок в Студентски град определя отделен клас на еквивалентност. Елементите на такъв клас са всички студенти, които живеят в съответния блок.

Пример 11. Нека $\sim_4 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е бинарна релация, дефинирана като

$x \equiv y \mod 4 \leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x = y + 4 \cdot k)$

$$x \sim_4 y \;\leftrightarrow\; x \equiv y \mod 4.$$

$\sim_4$ е релация на еквивалентност и има четири класа на еквивалентност

$$[0]_{\sim_4}, [1]_{\sim_4}, [2]_{\sim_4}, [3]_{\sim_4}.$$

Задача 28. Да дефинираме релацията $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ като:

$$\langle x, y\rangle \in R \;\leftrightarrow\; (x - y) \in \mathbb{Z}.$$

Намерете множествата $[1]_R$ и $[\frac{1}{2}]_R$.

3.5 Наредби

Обикновено се изучават релации притежаващи различни комбинации от горните свойства. Сега ще изброим няколко основни вида релации (понякога се наричат наредби). Релацията $R \subseteq A \times A$ се нарича:

На англ. partial order

- **частична наредба**, ако тя е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична. Например, $\leq$ е частична наредба. Също така, релацията $\subseteq$ между множества е частична наредба.

На англ. equivalence relation

- **релация на еквивалентност**, ако тя е рефлексивна, транзитивна и симетрична. Например, $=$ е релация на еквивалентност.

На англ. linear order

- **линейна наредба**, ако R е частична наредба, и за всеки два елемента x, y точно едно от $\langle x, y\rangle \in R$, $x = y$, $\langle y, x\rangle \in R$ е изпълнено.

На англ. well-founded order

- **фундирана наредба**, ако всяко непразно подмножество $X \subseteq A$ притежава поне един *минимален* елемент, т.е.

$$(\forall X \subseteq A)[X \neq \emptyset \rightarrow (\exists m \in X)\neg(\exists y \in X)[\langle y, m\rangle \in R]].$$

На англ. well-ordered relation

- **добра наредба**, ако всяко непразно подмножество $X \subseteq A$ има *най-малък* елемент , т.е.

$$(\forall X \subseteq A)[X \neq \emptyset \rightarrow (\exists m \in X)(\forall y \in X)[\langle m, y\rangle \in R \vee m = y]].$$

На англ. lexicographical order

- **лексикографска наредба** върху частичната наредба $(X, <)$ ще наричаме наредбата $(X \times X, \prec)$, където

$$\langle x, y\rangle \prec \langle x', y'\rangle \quad \leftrightarrow \quad x < x' \ \vee \ (x = x' \ \wedge \ y < y').$$

Забележка. Обърнете внимание на разликата между понятията *минимален* и *най-малък* елемент относно релацията R.

- x_0 е **минимален** елемент за множеството $X \subseteq A$ относно R, ако не съществуват елементи $y \in X$, за които $\langle y, x\rangle \in R$, т.е.

$$(\forall y \in X)[\langle y, x\rangle \notin R].$$

- x_0 е **най-малък** елемент за множеството $X \subseteq A$ относно R, ако за всеки друг елемент $y \in X$ е изпълнено $\langle x, y\rangle \in R$, т.е.

$$(\forall y \in X)[x \neq y \rightarrow \langle x, y\rangle \in R].$$

Задача 29. Да се докаже, че $(\mathbb{N}^2, \prec)$ е добре наредено множество.

Задача 30. Докажете, че следните две условия за частично наредено множество $(X, <)$ са еквивалентни:

а) всяко непразно подмножество на X има минимален елемент;

б) не съществува строго намаляваща редица $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$ то елементи на X.

Задача 31. Да се докаже, че частично нареденото множество $(X, <)$ е добре наредено тогава и само тогава, когато $(X, <)$ е фундирано и $<$ е линейна наредба върху X.

Задача 32. Кои от изброените множества са фундирани? Кои са добре наредени?

а) $(\mathbb{N}, <)$;

б) $(\mathbb{Z}, <)$;

в) $(X^*, <)$, където за $\alpha, \beta \in X^*$, $\alpha < \beta \;\leftrightarrow\; \alpha$ е поддума на β;

г) $(2^{\mathbb{N}}, \subsetneq)$;

д) $(Fin(\mathbb{N}), \subsetneq)$, където $Fin(\mathbb{N})$ е съвкупността от всички крайни подмножества на $\mathbb{N}$;

е) $(\mathbb{N}^+, |)$, където $m|n \;\leftrightarrow\; m \neq n \;\&\; m$ дели n.

Задача 33. Докажете, че подмножество на всяка антисиметрична релация е също антисиметрична.

Глава 4

Функции

4.1 Основни свойства

Релацията $R \subseteq A \times B$ се нарича **тотална функция** от A в B, ако

i) $Dom(R) = A$, т.е.

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)[(a, b) \in R].$$

ii) За всеки елемент $a \in A$ съответства *точно един* елемент $b \in B$, т.е.

$$(\forall a \in A)(\forall b_1, b_2 \in B)((\langle a, b_1\rangle \in R \ \wedge \ \langle a, b_2\rangle \in R) \to b_1 = b_2).$$

Обикновено означаваме функциите като $f : A \to B$ и вместо $(a, b) \in f$ пишем $f(a) = b$. Казваме, че функцията f е

- **инекция**, ако

  $$(\forall a_1, a_2 \in A)[a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)],$$

  или еквивалентно,

  $$(\forall a_1, a_2 \in A)[f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2].$$

  или f е **обратима**

- **сюрекция**, ако

  $$(\forall b \in B)(\exists a \in A)[f(a) = b].$$

  или f е **върху** B

- **биекция**, ако е инекция и сюрекция.

Задача 34. Дайте примери за функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, която е:

а) инективна;

б) сюрективна;

в) нито инективна, нито сюрективна;

г) инективна, но не е сюрективна;

д) сюрективна, но не е инективна;

е) сюрективна и инективна.

Да разгледаме функцията $f \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, дефинирана като:

$$f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Както много добре знаем, за стойности от вида $(x, 0)$, функцията f не е дефинирана. Такива функции ще наричаме **частични**. Официалната дефиниция е следната. Релацията $R \subseteq A \times B$ се нарича **частична функция** от A в B, ако за всеки елемент $a \in A$ съответства *най-много един* елемент $b \in B$, т.е.

Тук нямаме условието $Dom(R) = A$

$$(\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)[(\langle x, y_1\rangle \in R \ \wedge \ \langle x, y_2\rangle \in R) \to y_1 = y_2].$$

Задача 35. За всяка от следните тотални функции f определете дали f е инекция, сюрекция или биекция.

а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. (биекция)

б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

в) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 7$.

г) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ако } x \text{ е четно} \\ x - 1, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$

д) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = rem(x, 3)$.

$rem(x, 3)$ - остатък при деление на 3

е) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) =$ НОД(x, y).

НОД - най-голям общ делител

ж) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) =$ НОК(x, y).

НОК - най-малко общо кратно

з) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 3x + 2y$.

и) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1$.

Канторово кодиране

к) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$.

л) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2x(2y + 1)$.

м) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2x(2^y + 1)$.

н) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^x 3^y$.

о) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x, y) = 2^x 6^y$.

п) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Задача 36. Докажете:

а) Ако f, g са функции, то $f \cap g$ е функция;

б) Нека f, g са функции и $(\forall x)[x \in Dom(f) \cap Dom(g) \to f(x) = g(x)]$. Докажете, че $f \cup g$ е функция.

4.2 Операции върху функции

Образ и първообраз

Нека е дадена функцията $f : A \to B$. Ще разгледаме няколко основни операции върху функции.

- **Образ на множеството** $X \subseteq A$ под действието на функцията f, наричаме множеството:

  $$f(X) = \{b \in B \mid f(a) = b \ \wedge \ a \in X\}.$$

- **Първообраз на множеството** $Y \subseteq B$ под действието на функцията f, наричаме множеството:

  $$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) = b \ \wedge \ b \in Y\}.$$

Пример 12. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е дефинирана като $f(x) = |x+1|$. Тогава имаме, че:

а) $f([-1,1)) = \{|x+1| \mid -1 \leq x < 1\} = [0,2)$;

б) $f^{-1}([-1,1)) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq |x+1| < 1\} = [-1,0)$;

в) $f^{-1}([-1,0)) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq |x+1| < 0\} = \emptyset$;

г) $f([-1,0)) = \{|x+1| \mid -1 \leq x < 0\} = [0,1)$;

д) $f^{-1}([0,2)) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq |x+1| < 2\} = (-3,1)$.

Да положим $A = [-1,1)$. От б) и г) виждаме, че $f(f^{-1}(A)) \neq A$, а от а) и д) виждаме, че $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

Задача 37. Нека е дадена произволна функция $f : A \to B$. Проверете:

а) $(\forall X, Y \subseteq B)[f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)]$;

б) $(\forall X, Y \subseteq B)[f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)]$;

в) $(\forall X, Y \subseteq B)[f^{-1}(X \backslash Y) = f^{-1}(X) \backslash f^{-1}(Y)]$;

г) $(\forall X \subseteq A)(\forall Y \subseteq B)[f(X) \cap Y = f(X \cap f^{-1}(Y))]$;

д) $(\forall X \subseteq A)(\forall Y \subseteq B)[f(X) \cap Y = \emptyset \ \leftrightarrow \ X \cap f^{-1}(Y) = \emptyset]$;

е) $(\forall X \subseteq A)(\forall Y \subseteq B)[f(X) \subseteq Y \ \leftrightarrow \ X \subseteq f^{-1}(Y)]$;

ж) $(\forall X, Y \subseteq A)[f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)]$;

з) $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I}(X_i)$;

и) при какви условия за f, $(\forall X \subseteq A)[X = f^{-1}(f(X))]$;

к) при какви условия за f, $(\forall Y \subseteq B)[Y = f(f^{-1}(Y))]$;

л) при какви условия за f, $(\forall X, Y \subseteq A)[f(X) \backslash f(Y) = f(X \backslash Y)]$.

Обратна функция

За всяка биективна функция $f : A \to B$, определяме нейната обратна функция $g : B \to A$ като:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in Ran(f))[g(b) = a \quad \leftrightarrow \quad f(a) = b].$$

Обикновено означаваме g като f^{-1}.

Композиция

Нека са дадени функциите $f : A \to B$ и $g : C \to A$. *Композиция* на f и g е функцията $f \circ g : C \to B$ определена като

$$f \circ g = \{\langle c, b\rangle \mid (\exists a \in A)[g(c) = a \ \wedge \ f(a) = b]\}.$$

Композицията на f и g може да се запише и така:

Най-напред прилагаме g и след това f

$$(\forall c \in C)[(f \circ g)(c) = f(g(c))]$$

Пример 13. Нека $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$. Тогава:

- $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$;
- $(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2$.

Пример 14. Ако дефинираме $f : A \to A$ като $f(x) = x$, то за $f^{-1} : A \to A$ имаме също $f^{-1}(x) = x$.

Среща се студенти да пишат, че $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, което е безумно!

Задача 38. Нека $f : A \to B$, $g : B \to C$ са функции. Вярно ли е, че:

а) Ако f не е инекция, то $g \circ f$ не е инекция?

б) Ако g не е инекция, то $g \circ f$ не е инекция?

в) Ако f не е сюрекция, то $g \circ f$ не е сюрекция?

г) Ако g не е сюрекция, то $g \circ f$ не е сюрекция?

д) f, g са инективни, то $g \circ f$ е инективна? Да

е) f, g са сюрективни, то $g \circ f$ е сюрективна? Да

ж) f, g са биективни, то $g \circ f$ е биективна? Да

з) $g \circ f$ е сюрективна, то f, g са сюрективни ?

и) $g \circ f$ е инективна, то f, g са инективни ?

Задача 39. Нека а дадена произволна функция $f : A \to B$. Проверете:

Опр. $(\forall x \in X)\ id_X(x) = x$

а) при какви условия за f, $f \circ f^{-1} = id_B$.

б) при какви условия за f, $f^{-1} \circ f = id_A$.

Задача 40. Нека f, g са функции. При какви условия :

1. f^{-1} е функция?

2. $f \circ g$ е инективна функция?

Задача 41. Нека е дадена релацията $R \subseteq A \times B$. Докажете, че R е биективна функция тогава и само тогава, когато $R \circ R^{-1} = id_A$ и $R^{-1} \circ R = id_B$.

Задача 42. Нека f е инективна функция от A в B и $g : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B)$, дефинирана като

$$(\forall X \subseteq A)[g(X) = f(X)].$$

Докажете, че g е инективна.

Задача 43. Нека $f : A \to B$ и $g : B \to \mathscr{P}(A)$, дефинирана като

$$(\forall b \in B)[g(b) = \{x \in A \mid f(x) = b\}].$$

Докажете, че ако f е сюрективна, то g е инективна. Вярна ли е обратната посока?

Задача 44. Нека $\mathscr{F} = \{f | f : A \to B\}$ и R е бинарна релация върху B. Да разгледаме бинарната релация S върху $\mathscr{F}$:

$$S = \{\langle f, g\rangle \in \mathscr{F} \times \mathscr{F} \mid (\forall a \in A)[\langle f(a), g(a)\rangle \in R]\}.$$

Докажете или дайте контра-пример за следните твърдения:

а) ако R е рефликсивна, то S е рефликсивна?

б) ако R е симетрична, то S е симетрична?

в) ако R е транзитивна, то S е транзитивна?

Задача 45. Нека $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Да рагледаме функцията $f : A \to A$ определена като

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Докажете, че:

а) f е инективна и сюрективна;

б) $f \circ f = id_A$.

Задача 46. Нека $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Да разгледаме $f : A \to B$, където

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2.$$

Проверете дали f е инективна и сюрективна. Ако да, то намерете f^{-1}. $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-2}$

Задача 47. Нека $A = \mathbb{R}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Да разгледаме $f : A \to B$, където

$$f(x) = x^2.$$

Проверете дали f е инективна и сюрективна. Ако да, то намерете f^{-1}. f^{-1} не е инективна

Упътване. За да бъде една функция g обратната на f, трабва да имаме свойствата $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$. Не е достатъчно да имаме само едното. Ако вземем $g(x) = \sqrt{x}$, то $g(f(-3)) = \sqrt{(-3)^2} = 3 \neq -3$. $\square$

Задача 48. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е определена като

$$f(x) = \frac{2x+5}{3}.$$

Покажете, че f е инективна и сюрективна. Намерете f^{-1}.

Задача 49. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е определена като

$$f = \frac{x+7}{5}.$$

а) Докажете, че f е биективна и намерете f^{-1}.

б) Покажете, че $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}}$ и $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

Да разгледаме сега следните функции:

$$f_1(x) = x + 7, \quad f_2(x) = \frac{x}{5}.$$

Проверете, че:

а) $f = f_2 \circ f_1$;

б) $f^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$.

Предишната задача ни подсказва, че трябва да имаме следното свойство.

Задача 50. Нека $f : A \to B$, $g : B \to C$ са *биективни* функции. Докажете, че

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Задача 51. За дадена функция $f : A \to B$, определяме бинарна релация R_f по следния начин:

а) $R_f = \{\langle X, Y\rangle \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(A) \mid f(X) = f(Y)\}$;

б) $R_f = \{\langle X, Y\rangle \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(A) \mid f(X) \subseteq f(Y)\}$;

в) $R_f = \{\langle X, Y\rangle \in \mathscr{P}(B) \times \mathscr{P}(A) \mid f^{-1}(X) = f^{-1}(Y)\}$;

г) $R_f = \{\langle X, Y\rangle \in \mathscr{P}(B) \times \mathscr{P}(A) \mid f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)\}$.

В зависимост от това какви свойства има релацията f, определете свойствата на R_f.

Задача 52. Нека A е непразно множество и тоталната функция $f : A \to B$. Дефинираме бинарната релация R над A като:

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}.$$

Докажете, че:

а) R е релация на еквивалентност.

б) Определете класовете на еквивалентност на R.

Задача 53. Да разгледаме функциите $f : A \to B$ и $g : B \to A$.

Възможно ли е да са частични функции?

а) Ако f е сюрективна и $g \circ f = id_A$, то докажете, че $g = f^{-1}$.

б) Ако f е инективна и $f \circ g = id_B$, то докажете, че $g = f^{-1}$.

Доказателство.

Да напомним, че $id_A(a) = a$ за всяко $a \in A$

а) Възможно ли е g да не е тотална функция, т.е. да съществува $b \in B$, за което $g(b)$ не е дефинирана ? Да допуснем, че съществува такова b. Понеже f е сюрективна, съществува поне едно $a \in A$, за което $f(a) = b$. Това означава, че $(g \circ f)(a)$ не е дефинирана. Това е противоречие с условието, че $g \circ f = id_A$.

Сега ще проверим, че f е инективна. От това ще следва, че f^{-1} е функция. Нека да разгледаме $a, a' \in A$, за които $f(a) = b = f(a')$. Ще докажем, че $a = a'$. Щом $g \circ f = id_A$, то $g(f(a)) = g(b) = a$ и $g(f(a')) = g(b) = a'$. Ясно е, че $a = a'$, защото g е функция.

Вече знаем, че f е биективна и следователно f^{-1} е биективна функция. Понеже g е тотална, достатъчно е да докажем, че $g \subseteq f^{-1}$, т.е.

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)[g(b) = a \implies f(a) = b].$$

Нека $g(b) = a$ и $f(a') = b$. Знаем, че такова a' съществува, защото f е сюрективна. Но тогава $(g \circ f)(a') = a$ и следователно $a = a'$, защото $g \circ f = id_A$.

Да напомним, че $id_B(b) = b$ за всяко $b \in B$

б) Отново, възможно ли е g да не е тотална функция, т.е. да съществува $b \in B$, за което $g(b)$ не е дефинирана? Но тогава е ясно, че $(f \circ g)(b)$ също няма да е дефинирана, което е противоречие с условието, че $f \circ g = id_B$. Щом g е тотална, за да докажем, че $g = f^{-1}$ е достатъчно да проверим, че $g \subseteq f^{-1}$, т.е.

Добре е да отбележим, че понеже f е инективна ние знаем, че f^{-1} е функция.

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)[g(b) = a \implies f(a) = b].$$

Това е лесно да се провери. Нека $g(b) = a$. Понеже $(f \circ g)(b) = b$, то $f(g(b)) = f(a) = b$.

Вярно ли е, че f е сюрктивна?

□

Глава 5

Мощност на множества

5.1 Основни понятия

- Казваме, че едно множество A е **изброимо безкрайно**, ако съществува биекция от A върху $\mathbb{N}$.
- Едно множество е **изброимо**, ако е или крайно или безкрайно изброимо.
- Казваме, че едно множество A е **неизброимо**, ако A е безкрайно и **не** съществува биекция от A върху $\mathbb{N}$.
- Казваме, че мощността на едно множество A е не по-голяма от мощността на множеството B, което записваме като $|A| \leq |B|$, ако съществува *инекция* $f : A \to B$. Възможно е да използваме и означението $A \preceq B$.
- Когато множеството A е крайно, например $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, ще записваме $|A| = n$.
- Две множества A и B са равномощни, $|A| = |B|$, ако съществува биекция от A върху B. Алтернативен запис е $A \sim B$.
- Записваме $|A| < |B|$, ако $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$. Алтернативен запис е $A \precneqq B$, т.е. $A \preceq B$ и $A \not\sim B$.

5.2 Сравняване на мощности

Теорема 1 (Кантор-Шрьодер-Бернщайн)**.** За всеки две множества A и B,

$$A \preceq B \;\&\; B \preceq A \implies A \sim B.$$

Доказателство. Без ограничение на общността, нека $A \cap B = \emptyset$. Нека също така да фиксираме инективни функции $f : A \to B$ и $g : B \to A$. Ще построим биективна функция $h : A \to B$.

Според уикипедия това доказателство е на Гюла Кьониг(1906), синът на Денеш Кьониг

Понеже g е инективна, то g^{-1} също е (частична) функция. За $a \in A$, имаме следното:

$$g^{-1}(\{a\}) = \begin{cases} \emptyset, & a \notin Range(g) \\ \{b\}, & g(a) = b \end{cases}$$

Ако $g^{-1}(\{a\}) = \{b\}$, то наричаме b *наследник* на a. Аналогично, понеже f е инективна, то f^{-1} също е (частична) функция и за $b \in B$:

$$f^{-1}(\{b\}) = \begin{cases} \emptyset, & a \notin Range(f) \\ \{a\}, & f(b) = a \end{cases}$$

Ако $f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$, то казваме, че a е *наследник* на b. Продължавайки същата схема, можем да се опитаме да намерим наследника на a и т.н. За елемента a имаме три възможни изхода от тази процедура:

i) a има като последен наследник някой елемент от A;

ii) a има като последен наследник някой елемент от B;

iii) a има безкрайно много наследника.

Например, следната верига

$$a \xrightarrow{g^{-1}} b \xrightarrow{f^{-1}} a_1 \xrightarrow{g^{-1}} b_1 \xrightarrow{f^{-1}} a_2 \xrightarrow{g^{-1}} \emptyset$$

показва, че $a \in A_1$, защото последния наследник на a е елемента $a_2 \in A$. Да означим множествата:

$$\begin{aligned} A_1 =& \{a \in A \mid \text{ веригата с начало } a \text{ завършва с елемент от } A\} \\ A_2 =& \{a \in A \mid \text{ веригата с начало } a \text{ завършва с елемент от } B\} \\ A_3 =& \{a \in A \mid \text{ веригата с начало } a \text{ е безкрайна}\}. \end{aligned}$$

Лесно се съобразява, че $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$ и множествата A_1, A_2 и A_3 нямат общи елементи. Аналогично дефинираме:

$$\begin{aligned} B_1 =& \{b \in B \mid \text{ веригата с начало } b \text{ завършва с елемент от} A\} \\ B_2 =& \{b \in B \mid \text{ веригата с начало } b \text{ завършва с елемент от } B\} \\ B_3 =& \{b \in B \mid \text{ веригата с начало } b \text{ е безкрайна}\}. \end{aligned}$$

Отново $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = B$ и множествата B_1, B_2 и B_3 нямат общи елементи.

Да разгледаме функциите $f_i = f \upharpoonright A_i$ и $g_i = g \upharpoonright B_i$, $i = 1, 2, 3$. Лесно се съобразява, че

$$\begin{aligned} f_i :& A_i \to B_i, \\ g_i :& B_i \to A_i. \end{aligned}$$

Например, нека $a \in A_1$ и $b = f(a)$. Да съобразим, че наистина $b \in B_1$. Имаме, че $f^{-1}(\{b\}) = \{a\}$, т.е. a е *наследник* на b. Получаваме веригата:

$$b \xrightarrow{f^{-1}} a \xrightarrow{g^{-1}} b_1 \xrightarrow{f^{-1}} a_1 \xrightarrow{g^{-1}} \cdots \xrightarrow{g^{-1}} a' \in A$$

Това означава, че наистина $b \in B_1$.

Ясно е, че всички тези функции f_i, g_i са инективни, $i = 1, 2, 3$. За да построим биективна функция $h : A \to B$ е достатъчно да докажем, че поне една функция във всяка от двойките (f_i, g_i), $i = 1, 2, 3$ е биективна. Тогава ще получим h като „слепим" три такива биекции. Кои от тях са биективни? Достатъчно е да проверим кои от тях са сюрективни. Ще разгледаме всички шест функции.

i) Да разгледаме $b \in B_1$. Това означава, че веригата започваща с b завършва в A. Следователно, съществува $a \in A_1$, за който $a = f^{-1}(b)$. Заключаваме, че f_1 е сюрективна и следователно биективна.

ii) Да разгледаме $b \in B_2$. Това означава, че веригата започваща с b завършва в B. Обаче може b изобщо да няма наследници, т.е. възможно е $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$. Това означава, че може $Range(f_2) \subsetneqq B_2$ и нямаме гаранция, че f_2 е сюрективна.

iii) Да разгледаме $b \in B_3$. Това означава, че веригата за b е безкрайно дълга. Следователно, съществува $a \in A_3$, за което $f^{-1}(b) = a$. Заключаваме, че f_3 е сюрективна и следователно биективна.

iv) Да разгледаме $a \in A_1$. Това означава, че веригата за a завършва в A. Обаче пак както в *ii)* може a изобщо да няма наследници, т.е. $g^{-1}(\{a\}) = \emptyset$. Това означава, че може $Range(g_1) \subsetneqq A_1$ и може g_1 да не е сюрективна.

v) Да разгледаме $a \in A_2$. Това означава, че веригата за a завършва в B. Следователно, съществува $b \in B_2$, за който $b = g^{-1}(a)$. Заключаваме, че g_2 е сюрективна и следователно биективна.

vi) Да разгледаме $a \in A_3$. Това означава, че веригата с начало a е безкрайно дълга. Следователно, съществува $b \in B_3$, за което $g^{-1}(a) = b$. Заключаваме, че g_3 е сюрективна и следователно.

Накрая получаваме, че функциите f_1, f_3 и g_2, g_3 са биективни.

Да определим биекция $h : A \to B$ по следния начин:

$$h(a) = \begin{cases} f_1(a), & \text{ако } a \in A_1 \\ g_2^{-1}(a), & \text{ако } a \in A_2 \\ f_3(a), & \text{ако } a \in A_3 \end{cases}$$

Така доказахме, че множествата A и B са **равномощни**, т.е. $A \sim B$. □

Следствие 1. Ако $A \subseteq B \subseteq C$ и $A \sim C$, то $B \sim C$.

Пример 15. Не е лесно да се докаже, че $(0, 1)_{\mathbb{R}} \sim (0, 1]_{\mathbb{R}}$ като се посочи биекция. Обаче с *Теорема 1* това не е толкова трудно.

1) Очевидно е, че има инекция $(0, 1)_{\mathbb{R}}$ в $(0, 1]_{\mathbb{R}}$;

2) Можем да дефинираме инекция $f : (0, 1]_{\mathbb{R}} \to (0, 1)_{\mathbb{R}}$ като $f(x) = \frac{x}{2}$.

Като имаме 1) и 2), от *Теорема 1* следва, че двете множества са равномощни. Макар и да не сме посочили такава биекция, то от теоремата знаем, че тя съществува.

Забележка. Напълно възможно е за две множества A и B да имаме, че $B \subsetneqq A$, но $A \sim B$. Например, нека $A = \mathbb{N}$ и $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Това означава, че можем да образуваме все по-неизброими множества. Например, $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ има по-голяма мощност от $\mathbb{R}$

Теорема 2. Нека A е множество и $\mathscr{P}(A)$ е множеството от всички подмножества на A. Докажете, че $A \precneqq \mathscr{P}(A)$.

Доказателство. Функцията $h : A \to \mathscr{P}(A)$ определена като $h(a) = \{a\}$ е инекция. Следователно, $A \preceq \mathscr{P}(A)$.

Да допуснем, че $A \sim \mathscr{P}(A)$, т.е. съществува биекция $f : A \to \mathscr{P}(A)$. Да разгледаме множеството

$$B = \{a \in A \ \mid a \notin f(a)\} \in \mathscr{P}(A).$$

Щом f е биекция, съществува *единствено* $a_0 \in A : f(a_0) = B$. Но тогава имаме следното:

- ако $a_0 \in B$, то $a_0 \notin f(a_0)$ и тогава $a_0 \notin B$;
- ако $a_0 \notin B$, то $a_0 \in f(a_0)$ и тогава $a_0 \in B$.

И в двата случая достигаме до противоречие. Следователно **не съществува биекция** от A върху $\mathscr{P}(A)$. Накрая заключаваме, че $A \precneqq \mathscr{P}(A)$. $\square$

5.3 Изброими множества

Твърдение 1. Множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо безкрайно.

Упътване. Целта е да намерим биекция от $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ върху $\mathbb{N}$. Съществуват много такива функции.

Нарича се Канторово кодиране. Има удобно графично представяне

а) Разгледайте функцията

$$\pi(x, y) = \frac{1}{2}((x + y)^2 + 3x + y).$$

б) Разгледайте функцията

$$\pi(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1.$$

$\square$

Твърдение 2. За всяко k, множеството $\mathbb{N}^k$ е изброимо безкрайно.

Упътване. Индукция по $k \geq 2$.

- За $k = 2$, от предишното твърдение имаме биекцията $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Да положим $\pi_2 = \pi$.
- Нека $k = m + 1$. Тогава

  $$\pi_{m+1}(n_1, \ldots, n_{m+1}) = \pi_m(f(n_1, \ldots, n_m), n_{m+1}),$$

  където сме използвали биекцията $\pi_m : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, която имаме от И.П.

$\square$

Твърдение 3. Ако A е изброимо безкрайно множество, то A^k също е изброимо безкрайно множество, където $k \geq 2$ е естествено число.

Твърдение 4. Да разгледаме редица от изброимо безкрайни множества $A_0, A_1, \ldots$ със свойството, че $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$. Тогава множеството

$$B = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

е изброимо безкрайно.

> **Теорема 3** (Кантор 1874). Множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$ е изброимо безкрайно.

Упътване. Разгледайте за $n = 1, 2, 3 \ldots$ множествата

$$Q_n = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \ \& \ \text{НОД}(m, n) = 1 \right\}.$$

Всяко от тези множества е изброимо безкрайно. Тогава

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \geq 1} Q_n$$

е изброимо безкрайно множество. $\square$

Задача 54. Докажете, че следните множества са изброимо безкрайни:

а) $A \cup B$, където поне едното от A и B е изброимо безкрайно;

б) $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, където всяко от множествата A_i да е изброимо безкрайно, за $i = 0, 1, 2, \ldots$;

в) $A \times B$, където поне едно от множествата A и B е изброимо безкрайно;

Озн. $A^\star = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$

г) $A^\star$, където A е крайна азбука;

д) $A^\star$, където A е изброимо безкрайна азбука;

е) B - множеството от тези думи над азбуката $\{0, 1\}$, които не започват с 0, с изключение на думата 0, т.е. $B = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \ldots\}$;

ж) $\mathscr{P}_{fin}(\mathbb{N})$ - множеството от всички крайни подмножества от естествени числа;

з) $\mathscr{P}_{fin}(A^*)$ - множеството от всички крайни подмножества на A^*, за произволна азбука крайна или изброимо безкрайна азбука A;

и) съвкупността от всички полиноми на една променлива с цели коефициенти;

к) съвкупността от всички реални алгебрични числа (т.е. корени на полиноми с цели коефициенти).

л) $[0,1]_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \leq 1\}$;

м) $[a,b]_{\mathbb{Q}} = \{q \in \mathbb{Q} \mid a \leq q \leq b\}$, за произволни рационални числа $a < b$;

Доказателство.

г) Нека $A = \{a_1, \dots, a_k\}$. Лесно се съобразява, че $|A^n| = k^n$. За някое n, да разгледаме множеството от думи

$$A^n = \{\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_{k^n}^n\}.$$

Можем да дефинираме инективната функция $f_n : A^n \to \mathbb{N}$ като

✍ Докажете, че f е биекция!

$$f_n(\alpha_i^n) = \sum_{i<n} k^i + i.$$

Понеже $A^n \cap A^{n+1} = \emptyset$, то $f = \bigcup_n f_n : A^\star \to \mathbb{N}$ е функция.

д) Нека $\kappa : \mathbb{N} \to A$ е биекция. Да изброим всички букви като $a_i = \kappa(i)$ за $i = 0, 1, 2, \dots$. Дефинираме биекция $f : A^\star \to \mathbb{N}$ по следния начин:

✍ Докажете, че f е биекция!

$$f(a_0, \dots, a_n) = \pi(n, \pi_{n+1}(a_0, \dots, a_n)),$$

където използваме функциите дефинирани в Твърдение 2.

ж) Нека на крайното множество от естествени числа

$$D = \{n_0 < n_1 < \dots < n_k\}$$

да съпоставим числото $v = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \dots + 2^{n_k}$, което ще наричаме код на D. С D_v ще означаваме крайното множество с код v. Разгледайте $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}_{fin}(\mathbb{N})$ дефинирана като $f(v) = D_v$.

Ако $D = \{1, 3, 4\}$, то $v = (11010)_2 = 26$

✍ Докажете, че f е биекция!

□

Задача 55. Нека A е изброимо безкрайно множество. Докажете, че всяко $I \subseteq A$ е изброимо безкрайно или крайно.

Упътване. Достатъчно е да разгледаме случая $A = \mathbb{N}$. Да разгледаме безкрайното подмножество $I \subseteq \mathbb{N}$. За да докажем, че то е *изброимо*, ще построим биекция $f : \mathbb{N} \to I$. Нека

$$\begin{aligned} f(0) &= \min\{i \mid i \in I\} \\ f(n+1) &= \min\{i \mid i \in I \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}\}. \end{aligned}$$

Докажете, че f е биекция от $\mathbb{N}$ върху I. □

5.4 Неизброими множества

Задача 56. Докажете, че $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ е неизброимо.

Доказателство. Ще приложим метода на диагонализацията. Да допуснем, че $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ е изброимо. Тогава можем да подредим в редица всички функции

$$f_0, f_1, f_2, \ldots.$$

Дефинираме функция κ, като $\kappa(i) = f_i(i) + 1$. Да допуснем, че $\kappa = f_n$, за някое n. Но $\kappa(n) = f_n(n)+1 \neq f_n(n)$, следователно стигаме до противоречие. Заключаваме, че $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ е неизброимо. $\square$

Представяме и друго доказателство на горната теорема.

Задача 57. Докажете, че отвореният интервал от реални числа $(0,1)_{\mathbb{R}}$ е неизброимо множество.

Доказателство. Да допуснем, че интервалът $(0,1)_{\mathbb{R}}$ е изброим. Това означава, че можем да подредим всички елементи на $(0,1)_{\mathbb{R}}$ в редица. Да представим всяко реално число в интервала $(0,1)_{\mathbb{R}}$ в неговата десетична форма. Някои реални числа могат да имат по две десетични форми. Например,

$$0.2 = 0.1999999\ldots.$$

Нека винаги избираме тази, която започва с по-малко число, например избираме $0.1999\ldots$ вместо 0.2. Да подредим всички реални числа в интервала $(0,1)_{\mathbb{R}}$ в редица:

$$\begin{aligned}
r_0 &= 0.d_{00}d_{01}d_{02}\ldots \\
r_1 &= 0.d_{10}d_{11}d_{12}\ldots \\
&\vdots \\
r_n &= 0.d_{n01}d_{n1}d_{n2}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Да изберем две различни числа между 1 и 9. Например, 5 и 7. Нека

$$k_i = \begin{cases} 5, & \text{ако } d_{ii} = 7, \\ 7, & \text{ако } d_{ii} \neq 7. \end{cases}$$

Дефинираме κ като реалното число, което има десетично представяне $0.k_0k_1k_2\ldots$. Ясно е, че $\kappa \in (0,1)_{\mathbb{R}}$. Ще покажем, че $\kappa \neq r_n$ за всяко n. Да отбележим, че понеже в κ не участват редици от 0-ли или 9-ки, то със сигурност реалното число κ има единствено десетично представяне. Да допуснем, че $\kappa = r_n$, за някое n. Но $k_{nn} \neq d_{nn}$, следователно стигаме до противоречие. Заключаваме, че $(0,1)_{\mathbb{R}}$ е **неизброимо**. $\square$

Забележка. От последната задача директно следва, че множеството $\mathbb{R}$ е **неизброимо** безкрайно.

В следващата задача ще видим, че е удобно да можем да представяме всяко реално число в двоична бройна система. Например,

$$
\begin{aligned}
5.375 &= (1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0).(0.2^{-1} + 1.2^{-2} + 1.2^{-3} + 0.2^{-4} + 0.2^{-5} + \dots) \\
&= (101.011)_2 \\
1 &= 0.(1.2^{-1} + 1.2^{-2} + 1.2^{-3} + 1.2^{-4} + 1.2^{-5} + \dots) \\
&= (0.11111\dots)_2.
\end{aligned}
$$

Естествено, много реални числа ще имат безкраен запис в двоична бройна система. Да разгледаме $\pi = 3.14159\dots$ и да видим как можем да намираме все по-добри негови апроксимации в двоична бройна система. Да умножим π по 2^3. Получаваме число между 25 и 26. $25 = (11001)_2$ и следователно двоичният запис на π започва с $(11.001)_2$, т.е. преместваме двоичната точка 3 места наляво. Да проверим дали това наистина е така. Сега ако умножим π по 2^6, получаваме число между 201 и 202. $201 = (11001001)_2$. Наистина, двоичният запис на π започва с $(11.001001)_2$, т.е. преместване двоичната точка 6 места наляво.

Задача 58. Докажете, че следните множества са равномощни и следователно са **неизброими**.

а) Множеството на реалните числа $\mathbb{R}$;

б) $(0,1)_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$;

в) $[0,1]_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$;

г) $(a,b)_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, където $a < b$ са произволни реални числа.

Упътване.

а) $\leftrightarrow$ **б)** Един начин е да използваме *Теорема 1*. Това означава, че е достатъчно да дефинираме инекция $f : \mathbb{R} \to (0,1)_{\mathbb{R}}$.

Да разгледаме следните функции:

- $f_1 : (1,\infty)_{\mathbb{R}} \to (0, \frac{1}{4})_{\mathbb{R}}$ е инекция дефинирана като
$$f_1(x) = \frac{1}{4x}.$$
- $f_2 : [0,1]_{\mathbb{R}} \to [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]_{\mathbb{R}}$ е инекция дефинирана като
$$f_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{4}.$$
- $f_3 : (-1,0)_{\mathbb{R}} \to (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})_{\mathbb{R}}$ е инекция дефинирана като
$$f_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}.$$
- $f_4 : (-\infty,-1]_{\mathbb{R}} \to (\frac{3}{4}, 1]_{\mathbb{R}}$ е инекция дефинирана като
$$f_4(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4x}.$$

За друга инекция, нека да разглеждаме реалните числа в двоичен запис. Ако едно реално число има две представяния в двоичен запис, то взимаме по-голямото от двете в лексикографската наредба. Сега на реалното число r съпоставяме една крайна дума $r_1 \cdots r_n$ и (потенциално безкрайна) дума $p_1 \cdots p_k \cdots$, такива че

Например, $(7,25)_{10} = (111,01)_2$

$$(r)_{10} = (r_1 \cdots r_n, p_1 p_2 \cdots p_n \cdots)_2,$$

и трябва да помним дали числото е положително или отрицателно. Сега да разгледаме следната (потенциално безкрайна) дума над азбуката $\{0,1,2\}$:

$$\hat{r} = \underbrace{0 \cdots 0}_{i} \underbrace{2 \cdots 2}_{n+1} r_1 r_2 \cdots r_n p_1 p_2 \cdots,$$

където $i = 0$ ако r е положително, $i = 1$ ако r е отрицателно, и $i = 2$ ако $r = 0$. Функцията $f(r) = (0.\hat{r})_{10}$ е инективна функция от $\mathbb{R}$ в $(0,1)_{\mathbb{R}}$.

✍ Проверете дали това е инекция!

Трето решение ще бъде директно, без позоваване на *Теорема 1*. Знаем, че $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ е биекция. Освен това, $f : (0,1) \to (-\pi/2, \pi/2)$, дефинирана като

$$f(x) = \pi/2 - \pi x$$

също е биекция. Тогава функцията $\tan \circ f : (0,1) \to \mathbb{R}$ е биекция.

а) $\leftrightarrow$ в) Използвайте *Теорема 1* с едно от първите две решения на а) $\leftrightarrow$ б).

✍ Проверете, че f е биекция!

б) $\leftrightarrow$ г) Разгледайте функцията $f : (0,1)_{\mathbb{R}} \to (a,b)_{\mathbb{R}}$, където

$$f(x) = a + (b-a)x.$$

□

Задача 59. Докажете, че следните множества са равномощни и следователно са **неизброими**.

а) $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$;

б) $(0,1)_{\mathbb{R}} = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1\}$;

в) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тотална$\}$.

г) $2^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ тотална$\}$

Упътване.

За а) $\to$ б) и б) $\to$ а) строим две инекции. След това използваме *Теорема 1* за да получим биекция между множествата от а) и б)

а) $\to$ б) Дефинираме $h : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to (0,1)$ като на всяко подмножество от естествени числа съпоставяме реално число в десетичен запис.

$$h(S) = 0.d_0 d_1 d_2 \ldots, \text{ където } d_i = 1, \text{ ако } i \in S, \text{ иначе } d_i = 0.$$

Например,

- $h(\emptyset) = 0.0000\ldots$
- $h(\{0\}) = 0.100000\ldots$

- $h(\{1,2\}) = 0.011000000\dots$
- $h(\mathbb{N}) = 0.11111111111\dots$

Лесно се вижда, че h е инекция, следователно $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| \leq |(0,1)|$.

б) $\to$ а) Ще построим инекция $g : (0,1)_{\mathbb{R}} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$, като за всеки елемент $b \in (0,1)_{\mathbb{R}}$ избираме едно негово *двоично представяне* (може да има повече от едно) $b = (0.b_0b_1b_2\dots)_2$ и дефинираме

$$g(b) = \{i \in \mathbb{N} \mid b_i = 1\}.$$

За определеност, ако едно реално число има повече от едно представяния, избираме това, което е най-голямо относно лексикографската наредба. Например,

$$1/2 = (0,100000\dots)_2 = (0,011111\dots)_2.$$

Ето няколко примера:

- $g(0) = g((0.00000\dots)_2) = \emptyset$.
- $g(1/4) = g((0.01000\dots)_2) = \{1\}$.
- $g(1/2) = g((0.10000\dots)_2) = \{0\}$.
- $g(3/4) = g((0.1100000\dots)_2) = \{0,1\}$.
- $g(3/8) = g((0.01100000\dots)_2) = \{1,2\}$.
- $g(1) = g((0.1111111\dots)_2) = \mathbb{N}$.

Едно число може да има две представяния, но ние сме сигурни, че различни числа имат различни представяния.

а) $\to$ г) Да разгледаме едно множество $A \subseteq \mathbb{N}$. Съпоставяме на A функцията $f_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ по следния начин:

f_A се нарича характеристична функция за A

$$f_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A. \end{cases}$$

Проверете какви свойства има функцията $h : \mathscr{P}(A) \to 2^{\mathbb{N}}$ дефинирана като $h(A) = f_A$.

г) $\to$ а) Да разгледаме функцията $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$. На нея съпоставяме множеството $A_f = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 1\}$. Проверете какви свойства има функцията $h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathscr{P}(A)$ дефинирана като $h(f) = A_f$.

б) $\to$ в) Да разгледаме една функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. На нея съпоставяме реалното число $r_f \in (0,1)_{\mathbb{R}}$, където

$$r_f = 0,\underbrace{00\dots0}_{f(0)+1}1\underbrace{00\dots0}_{f(1)+1}1\dots\underbrace{00\dots0}_{f(2)+1}1\dots$$

Проверете какви свойства има функцията $h : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (0,1)_{\mathbb{R}}$ дефинирана като $h(f) = r_f$.

в) $\to$ **б)** Да разгледаме едно реално число $r \in (0,1)_{\mathbb{R}}$, където

$$r = 0, r_0 r_1 r_2 r_3 \dots$$

На това число съпоставяме функцията $f_r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ като $f_r(n) = r_n$. Проверете какви свойства има функцията $h : (0,1)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ дефинирана като $h(r) = f_r$.

$\square$

Озн. $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$

Задача 60. Нека $A \sim B$ и $C \sim D$. Докажете, че $B^A \sim D^C$.

Глава 6

Доказване на твърдения

Ще разгледаме два основни метода за доказателства на твърдения.

6.1 Допускане на противното

Да приемем, че искаме да докажем, че свойството $P(x)$ е вярно за всяко естествено число. Един начин да направим това е следния:

- Допускаме, че съществува елемент n, за който $\neg P(n)$.
- Използвайки, че $\neg P(n)$ правим извод, от който следва факт, за който знаем, че винаги е лъжа. Това означава, че доказваме следното твърдение

  $$\exists x \neg P(x) \to \mathbf{0}.$$

- Тогава можем да заключим, че $\forall x P(x)$, защото имаме следния извод:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\exists x \neg P(x) \to \mathbf{0}}{\mathbf{1} \to \neg \exists x \neg P(x)}}{\neg \exists x \neg P(x)}}{\forall x P(x)}$$

Ще илюстрираме този метод на доказателство като решим няколко прости задачи.

Задача 61. За всяко $a \in \mathbb{Z}$, ако a^2 е четно, то a е четно.

Доказателство. Твърдението може да се запише като

$$(\forall a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \to a \text{ е четно}].$$

Да допуснем противното, т.е.

$\neg(\forall x)(A(x) \to B(x))$ е еквивалентно на $\equiv (\exists x)(A(x) \land \neg B(x))$

$$(\exists a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \land a \text{ не е четно}].$$

Да вземем едно такова нечетно a, за което a^2 четно. Това означава, че $a = 2k + 1$, за някое $k \in \mathbb{Z}$, и

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1,$$

което очевидно е нечетно число. Но ние допуснахме, че a^2 е четно. Така достигаме до противоречие, следователно нашето допускане е грешно и

$$(\forall a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \rightarrow a \text{ е четно}].$$

$\square$

Теорема 4 (Основна теорема на аритметиката)**.** Всяко естествено число $n \geq 2$ може да се запише **по единствен начин** като произведение на прости числа.

Доказателство. Вече знаем от Задача 66, че всяко число може да се представи като произведение на прости числа. Да допуснем, че има такива, които имат няколко различни такива представяния. От всички тези числа, нека изберем *най-малкото с това свойство.* Да го означим с n. Имаме, че

$$n = p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_m.$$

Можем да приемем, че простите числа $p_1, \dots, p_k$ и $q_1, \dots, q_m$ са подредени във възходящ ред. Без ограничение на общността, нека $p_1 < q_1$. Знаем със сигурност, че $p_1 \neq q_1$, защото ако $p_1 = q_1$, то $n' = n/p_1$ е число по-малко от n, което има две различни представяния като произведение на прости числа, което е противоречие с избора ни на n - най-малкото такова число.

И така, нека $p_1 < q_1$. Следователно, $p_1 < q_i$, за $i = 1, \dots, m$. Тогава съществуват числа a_i, r_i, за които:

$$q_i = a_i p_1 + r_i.$$

Ясно е, че $0 < r_i < p_1 < q_i$, $i = 1, \dots, m$ и

$$n' = r_1 r_2 \dots r_m < q_1 q_2 \dots q_m = n.$$

Числото n' може да се представи като произведение на прости числа, като разложим $r_1, \dots, r_m$. Знаем, че в това произведение *не участва* p_1, защото $r_i < p_1$. Освен това,

$$\begin{aligned} n &= q_1 q_2 \dots q_m \\ &= (a_1 p_1 + r_1)(a_2 p_1 + r_2) \dots (a_m p_1 + r_m) \\ &= A + \underbrace{r_1 r_2 \dots r_m}_{n'}. \end{aligned}$$

Понеже $p_1 | A$ и $p_1 | n$, то $p_1 | n'$. Това означава, че можем да получим друго представяне на n' като произведение на прости числа, в което *участва* p_1. Това е противоречие с минималността на n. $\square$

Теорема 5 (Безу)**.** Нека $a, b \in \mathbb{Z}$, като поне едно от двете не е 0. Тогава съществуват $x, y \in \mathbb{Z}$, такива че

$$xa + yb = \text{НОД}(a, b).$$

Доказателство. За дадените числа $a, b \in \mathbb{Z}$, да разгледаме множеството

$$S = \{x \mid x > 0 \;\&\; x = ma + nb, \text{ за някои } m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Лесно се съобразява, че $S \neq \emptyset$.

Да вземем *най-малкия елемент* $s \in S$. Тогава $s = ua + vb$. Да разгледаме произволен елемент $x \in S$, $x = ma + nb$ и да **допуснем**, че s **не дели** x. Тогава $x = qs + r$ и $0 < r < s$. Имаме равенствата:

$$\begin{aligned} r &= qs - x \\ &= qua + qvb - ma - nb \\ &= a(qu - m) + b(qv - n) \end{aligned}$$

Понеже $r > 0$, то $r \in S$. Но от $s > r$ достигаме до **противоречие** с минималността на s. Следователно, s **дели** x.

Да означим $d = \text{НОД}(a, b)$. Вече знаем, че за всяко $x \in S$, $s|x$. Понеже $|a|, |b| \in S$, то имаме, че s дели $|a|$, $|b|$, и следователно $1 \leq s \leq d$. Но по определение, $d|a$ и $d|b$. Тогава, $d|ua$ и $d|vb$ и $d|(ua + vb) = s$. Получаваме, че $d \leq s$. Следователно, $\text{НОД}(a, b) = s$. □

Задача 62. Докажете, че

$$\text{НОК}(a, b) = \frac{a.b}{\text{НОД}(a, b)}.$$

Доказателство. Нека $D = \text{НОД}(a, b)$. Това означава, че

$$a = Da_1,\ b = Db_1,\ \text{НОД}(a_1, b_1) = 1.$$

Ще докажем, че за всяко g, за което $a|g$ и $b|g$, то съществува q_1, такова че

$$g = \frac{ab}{D} q_1.$$

Да разгледаме g, такова че $a|g$ и $b|g$.

$$\begin{aligned} D|a \text{ и } a|g &\Rightarrow g = Da_1 q, \\ D|b \text{ и } b|g &\Rightarrow \frac{g}{b} = \frac{Da_1 q}{Db_1} = \frac{a_1 q}{b_1}. \end{aligned}$$

Понеже $(a_1, b_1) = 1$, то $q = b_1 q_1$. Тогава $\frac{g}{b} = a_1 q_1$ и

$$g = \frac{ab}{D} q_1.$$

Тогава за $q_1 = 1$,

$$g = \frac{ab}{D}.$$

□

Задача 63. За всеко $a, b \in \mathbb{Z}$ и за всяко просто число p, ако $p|ab$, то $p|a$ или $p|b$ (може и двете).

Доказателство. Нека $p|ab$. Тогава $ab = kp$. Знаем, че $ab = p_1^{n_1} \ldots p_m^{n_m} = kp$. Тогава $p = p_i$, за някое $i = 1, \ldots, m$. Следва, че p участва в разлагането на прости множители или на a или на b. □

Задача 64. Докажете, че следните числа **не** са рационални:

а) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$;

б) $\sqrt{p}$, където p е просто число;

в) $\sqrt{n}$, където n не е точен квадрат;

г) $\sqrt{pq}$ и $\sqrt{\frac{p}{q}}$, където p и q са различни прости числа;

д) $log_2 3$.

Доказателство.

а) Трябва да докажем, че

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z})[b \neq 0 \implies \sqrt{2} \neq \frac{a}{b}].$$

Да допуснем, че $\sqrt{2}$ е рационално число, т.е.

$$(\exists a, b \in \mathbb{Z})[b \neq 0 \ \wedge \ \sqrt{2} = \frac{a}{b}].$$

Тогава съществуват $a, b \in \mathbb{Z}$, такива че:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Без ограничение, можем да приемем, че a и b са естествени числа, които нямат общи делители, т.е. не можем да съкратим дробта $\frac{a}{b}$. Получаваме, че

$$2b^2 = a^2.$$

Тогава a^2 е четно число и от Задача 62, a е четно число. Нека $a = 2k$. Получаваме, че

$$2b^2 = 4k^2,$$

от което следва, че

$$b^2 = 2k^2.$$

Това означава, че b също е четно число, $b = 2n$, за някое $n \in \mathbb{Z}$. Следователно, a и b са четни числа и имат общ делител 2, което е противоречие с нашето допускане, че a и b нямат общи делители. Така достигаме до противоречие. Накрая заключаваме, че $\sqrt{2}$ не е рационално число.

б) Да допуснем, че $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ и m и n са взаимно прости. Тогава $n^2 p = m^2$. От това следва, че $p|m^2$ и следователно $p|m$. Нека $m = kp$. Тогава $n^2 p = k^2 p^2$ и $n^2 = k^2 p$. Сега имаме, че $p|n$, но така стигаме до противоречие с факта, че m и n са взаимно прости.

$\square$

6.2 Индукция върху естествените числа

Да напомним, че естествените числа са $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Доказателството с индукция по $\mathbb{N}$ представлява следната схема:

$$\frac{P(0) \qquad (\forall x \in \mathbb{N})[P(x) \to P(x+1)]}{(\forall x \in \mathbb{N})P(x)}$$

Това означава, че ако искаме да докажем, че свойството $P(x)$ е вярно за всяко естествено число x, то трябва да докажем първо, че е изпълнено $P(0)$ и след това, за произволно естествено число x, ако $P(x)$ вярно, то също така е вярно $P(x+1)$.

Задача 65. Всяко естествено число $n \geq 2$ може да се запише като произведение на прости числа.

Доказателство. Доказателството протича с индукция по $n \geq 2$.

а) За $n = 2$ е ясно.

б) Ако $n+1$ е просто число, то всичко е ясно. Ако $n+1$ е съставно, то

$$n + 1 = n_1 \cdot n_2.$$

Тогава $n_1 = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ и $n_2 = q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$, където $p_1, \dots, p_k$ и $q_1, \dots, q_r$ са прости числа. Тогава е ясно, че $n+1$ също е произведение на прости числа.

□

Задача 66. Докажете, че за всяко n,

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Доказателство. Доказателството протича с индукция по n.

- За $n = 0$, $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 1 = 2^1 - 1$.
- Нека твърдението е вярно за n. Ще докажем, че твърдението е вярно за $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} && \text{(от И.П.)} \\
&= 2.2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1.
\end{aligned}$$

□

Задача 67. Докажете, че:

а) 3^n е нечетно;

б) $n < 2^n$;

в) $2^n < n!$ за $n \geq 4$;

$a|b \quad \leftrightarrow \quad (\exists c \in \mathbb{N})(b = c \cdot a)$

г) $3|(n^3 - n)$;

д) $6|(n^3 + 11n)$;

е) $9|(2^{2n} + 15n - 1)$;

ж) $57|(7^{n+2} + 8^{2n+1})$;

з) за всяко крайно множество A, ако $|A| = n$, то $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$;

$\mathscr{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

и) $C \setminus \bigcup_{i=0}^n A_i = \bigcap_{i=0}^n (C \setminus A_i)$;

к) $C \setminus \bigcap_{i=0}^n A_i = \bigcup_{i=0}^n (C \setminus A_i)$;

л) ако $(\forall i \leq n)[A_i \subseteq B_i]$, то $\bigcap_{i=0}^n A_i \subseteq \bigcap_{i=0}^n B_i$;

м) ако $(\forall i \leq n)[A_i \subseteq B_i]$, то $\bigcup_{i=0}^n A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^n B_i$;

н) $(\bigcap_{i=0}^n A_i) \cup B = \bigcap_{i=0}^n (A_i \cup B)$;

о) $(\bigcup_{i=0}^n A_i) \cap B = \bigcup_{i=0}^n (A_i \cap B)$;

п) $\bigcap_{i=0}^n (A_i \setminus B) = (\bigcap_{i=0}^n A_i) \setminus B$;

р) $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \;\leftrightarrow\; (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$;

с) $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \;\leftrightarrow\; (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$;

т) $\sum_{i=0}^n ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$ за $r \neq 1$;

у) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$;

ф) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

х) $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

ц) $\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

ч) $\sum_{i=0}^n (2i+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$;

ш) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$;

щ) $\sum_{i=0}^n (-\frac{1}{2})^i = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3 \cdot 2^n}$;

Задача 68. Докажете, че за всяко естествено число k,

$$(2k+1)^4 \equiv 1 \pmod 4.$$

Задача 69. Докажете, че за произволни числа x, y и естествено число n е изпълнено равенството:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Задача 70 (Теорема на Ферма)**.** Нека p е просто число. Тогава докажете, че за числото a:

i) $a^p \equiv a \pmod{p}$;

ii) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, ако a не се дели на p.

Доказателство. Да разгледаме следното равенство:

$$(x+1)^p = x^p + \binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} + \cdots + 1 = \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}x^i$$

За $i = 1, \ldots, p-1$, всяко от числата $\binom{p}{i}$ се дели на p, тогава

$$(x+1)^p \equiv x^p + 1 \pmod{p}. \tag{6.1}$$

Нека сега да разгледаме следната редица, която се получава от Равенство (6.1), като x приема стойностите от $a-1$ до 0:

$$\begin{aligned} a^p &\equiv (a-1)^p + 1 \pmod{p} && \text{(полагаме } x = a-1\text{)}\\ (a-1)^p &\equiv (a-2)^p + 1 \pmod{p} && \text{(полагаме } x = a-2\text{)}\\ &\cdots\cdots\cdots \\ 2^p &\equiv 1 \pmod{p} && \text{(полагаме } x = 0\text{).} \end{aligned}$$

Като съберем тези сравнения, получаваме:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Ако a не се дели на p, то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

□

Числа на Фибоначи

Задача 71. Да определим следната редица:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \ldots, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Проверете:

а) $\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$;

б) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$;

в) $\sum_{i=1}^{2n} F_{i-1}F_i = F_{2n}^2$;

г) единствено членовете от вида F_{3n} са четни;

д) за $n > 0$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$;

е) $F_{m+n} = F_{m-1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n-1}$;

ж) ако $m|n$, то $F_m|F_n$.

Използвайте, че $\phi^2 = \phi + 1$

з) ако $n \geq 3$, то $F_n > \phi^{n-2}$, където $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пълна индукция върху $\mathbb{N}$

Доказателство с пълна индукция по $\mathbb{N}$ за свойството P представлява следната схема:

$$\frac{(\forall x \in \mathbb{N})[(\forall y \in \mathbb{N})[y < x \ \rightarrow P(y)] \rightarrow P(x)]}{(\forall x \in \mathbb{N})P(x)}$$

Нека да проверим принципа за пълна индукция. Да допуснем, че принципът не е верен, т.е. за някое свойство P е изпълнено, че

$$(\forall x \in \mathbb{N})[(\forall y \in \mathbb{N})[y < x \ \rightarrow P(y)] \rightarrow P(x)] \ \wedge \ (\exists x \in \mathbb{N})\neg P(x).$$

Да вземем най-малкия елемент n_0, за който $\neg P(n_0)$. От нашето допускане знаем, че такова n_0 съществува. Тогава

$$(\forall y \in \mathbb{N})[y < n_0 \ \rightarrow P(y)]$$

и следователно:

$$\frac{(\forall y \in \mathbb{N})[y < n_0 \ \rightarrow P(y)] \qquad \dfrac{(\forall x \in \mathbb{N})[(\forall y \in \mathbb{N})[y < x \ \rightarrow P(y)] \rightarrow P(x)]}{(\forall y \in \mathbb{N})[y < n_0 \ \rightarrow P(y)] \rightarrow P(n_0)}}{P(n_0)}$$

Така достигаме до противоречие, защото получаваме, че $P(n_0) \wedge \neg P(n_0)$.

Твърдение 5. Двата принципа са еквивалентни.

Доказателство. 1) $\rightarrow$ 2). Нека имаме 1) и нека $(\forall n \in \mathbb{N})[(\forall m \in \mathbb{N})[m < n \rightarrow P(m)] \rightarrow P(n)]$. Ще докажем, че $(\forall n \in \mathbb{N})[P(n)]$. Да рагледаме свойството

$$Q(n) = P(0) \ \wedge \ \dots \ \wedge \ P(n).$$

Тогава имаме, че $Q(0)$ и $(\forall n \in \mathbb{N})[Q(n) \rightarrow P(n+1)]$. Но от $Q(n) \rightarrow P(n+1)$ следва, че $Q(n) \rightarrow Q(n) \wedge P(n+1)$, т.е. $(\forall n \in \mathbb{N})[Q(n) \rightarrow Q(n+1)]$. Така полуваме по математическата индукция, че $(\forall n \in \mathbb{N})[Q(n)]$. Но тогава е очевидно, че имаме $(\forall n \in \mathbb{N})[P(n)]$, защото $Q(n) \rightarrow P(n)$.

2) $\rightarrow$ 1). Нека имаме 2) и $P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})[P(n) \rightarrow P(n+1)]$. Ще докажем, че $(\forall n \in \mathbb{N})[P(n)]$. Понеже имаме 2), достатъчно е да докажем

$$(\forall n \in \mathbb{N})[(\forall m \in \mathbb{N})[m < n \rightarrow P(m)] \rightarrow P(n)].$$

- Ако $n = 0$, то е ясно, че $(\forall m \in \mathbb{N})[m < 0 \rightarrow P(m)] \rightarrow P(0)$.
- Ако $n > 0$, то от $P(n) \rightarrow P(n+1)$ получваме, че

  $$P(0) \ \wedge \ P(1) \ \wedge \ \dots \ P(n) \rightarrow P(n+1),$$

  т.е. $(\forall m \in \mathbb{N})[m < n \rightarrow P(m)] \rightarrow P(n)$.

Обединявайки двата случая получаваме, че

$$(\forall n \in \mathbb{N})[(\forall m \in \mathbb{N})[m < n \rightarrow P(m)] \rightarrow P(n)].$$

И тогава от пълната математичска индукция следва, че $(\forall n \in \mathbb{N})[P(n)]$ $\square$

Задача 72. Докажете, че за всяко $x, y \in \mathbb{N}$

$$f(x, y) = x^y,$$

където

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \ \wedge \ y = 0 \\ f(x, y-1) * x, & x \neq 0 \ \wedge y \text{ е нечетно} \\ f(x, y/2) * f(x, y/2), & x \neq 0 \ \wedge y \text{ е четно} \end{cases}$$

Индукция върху $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Определение 1. Определяме лексикографската наредба $\prec$ върху $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ като

$$\langle x, y \rangle \prec \langle x', y' \rangle \quad \leftrightarrow \quad x < x' \vee (x = x' \ \wedge \ y < y').$$

Наричаме двойката $\langle x_0, y_0 \rangle$ *минимална* за множеството $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ако

$$\langle x_0, y_0 \rangle \in A \ \wedge \ (\forall \langle x, y \rangle \in A)[\langle x, y \rangle \not\prec \langle x_0, y_0 \rangle].$$

Твърдение 6. Всяко непразно подмножество $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ притежава поне един *минимален* елемент.

Твърдение 7. Не съществуват безкрайни строго намаляващи редици относно $\succ$ в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, т.е. не съществува

$$\langle x_0, y_0 \rangle \succ \langle x_1, y_1 \rangle \succ \langle x_2, y_2 \rangle \succ \cdots \succ \langle x_n, y_n \rangle \succ \dots$$

Определение 2. Доказателството с индукция върху $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ представлява следната схема:

$$\frac{(\forall \langle x, y \rangle)[(\forall \langle x', y' \rangle)[\langle x', y' \rangle \prec \langle x, y \rangle \ \rightarrow \ P(x', y')] \ \rightarrow P(x, y)]}{\forall \langle x, y \rangle P(x, y)}$$

Да проверим схемата. Да допуснем, че тя не е вярна, т.е. за някое свойство P е изпълнено, че

$$(\forall \langle x, y \rangle)[(\forall \langle x', y' \rangle)[\langle x', y' \rangle \prec \langle x, y \rangle \ \rightarrow \ P(x', y')] \ \rightarrow P(x, y)],$$

но

$$\exists \langle x, y \rangle \neg P(x, y),$$

т.е. съществува $\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, за което $\neg P(x, y)$. Да разгледаме

$$A = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \neg P(x, y)\}.$$

Щом A е непразно, то A има минимален елемент $\langle x_0, y_0 \rangle$. Тогава

$$(\forall \langle x', y' \rangle)[\langle x', y' \rangle \prec \langle x_0, y_0 \rangle \ \rightarrow P(x', y')].$$

Но ние имаме, че

$$(\forall \langle x', y' \rangle)[\langle x', y' \rangle \prec \langle x_0, y_0 \rangle \ \rightarrow \ P(x', y')] \ \rightarrow P(x_0, y_0).$$

Това означава, че $P(x_0, y_0)$, което е противоречие.

Забележка. За да докажем едно свойство P с индукция по лексикографската наредба върху $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, първо доказваме P за минималната двойка $\langle 0, 0\rangle$. След това доказваме, че ако P е вярно за всички двойки $\langle x', y'\rangle \prec \langle x, y\rangle$, то P е вярно и за $\langle x, y\rangle$.

Задача 73. Докажете, че $f(x, y) = |x - y|$, където

$$f(x,y) = \begin{cases} y, & x = 0 \\ x, & y = 0 \\ f(x-1, y-1), & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказателство. Индукция по $(\mathbb{N}^2, \prec)$, където $\prec$ е лексикографската наредба. Имаме един минимален елемент $(0, 0)$.

$$f(0,0) = 0 = |0 - 0|.$$

Да допуснем, че за всяко $(u, v) \prec (x, y)$,

$$f(u,v) = |u - v|.$$

Тогава ако $x > 0, y = 0$, то

$$f(x,0) = x = |x - 0|.$$

Ако $x > 0, y > 0$, то

$$f(x,y) = f(x-1, y-1) = |x - 1 - y + 1| = |x - y|.$$

□

Задача 74. Докажете, че $f(x, y) = \text{НОД}(x, y)$, където за $x, y \in \mathbb{N}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} f(x-y, y), & x > y \\ f(y, x), & x < y \\ x, & x = y. \end{cases}$$

Фундирани множества

Англ. well-founded sets

Понякога се налага да правим индукция по по-сложни множества от това на естествените числа.

Определение 3. Нека е дадена двойката (A, R), където A е множество, а $R \subseteq A^2$. Казваме, че A е фундирано множество относно R, ако

R задава строга частична наредба върху A

- R е анти-рефлексивна, транзитивна, асиметрична.
- ако всяко непразно подмножество $X \subseteq A$ притежава поне един *минимален* елемент, т.е.

$$(\forall X \subseteq A)[X \neq \emptyset \to (\exists m \in X)\neg(\exists y \in X)[\langle y, m\rangle \in R]].$$

Обърнете внимание, че минималният елемент може да не е уникален.

Пример 16. Нека да определим $\prec$ върху $\mathcal{N}$ като

$$\langle x, y\rangle \prec \langle x', y'\rangle \quad \leftrightarrow \quad x < y \ \wedge \ x' < y'.$$

Тогава например $X = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ има два минимални елемента - $\langle 1,2\rangle$ и $\langle 2,1\rangle$.

Твърдение 8. Нека $\prec$ е строга частична наредба върху A. Следните твърдения са еквивалентни:

а) ако всяко непразно подмножество $X \subseteq A$ притежава поне един *минимален* елемент, т.е.

$$(\forall X \subseteq A)[X \neq \emptyset \to (\exists x \in X)\neg(\exists y \in X)[y \prec x]];$$

б) не съществуват безкрайни редици от вида

$$x_0 \succ x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n \succ \cdots$$

Доказателство.

а) $\to$ б) Да допуснем, че съществува безкрайно-намаляваща редица

$$x_0 \succ x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n \succ \cdots$$

Нека $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Тогава лесно се вижда, че в X няма минимален елемент, което е противоречие.

б) $\to$ а) Да допуснем, че съществува непразно множество $X \subseteq A$, което не притежава минимален елемент, т.е.

$$(\forall x \in X)(\exists y \in X)[y \prec x].$$

Ще построим безкрайно-намаляваща редица относно $\prec$. Да вземем произволен $x_0 \in X$. Знаем, че съществува $y \in X, x_0 \prec y$. Нека да изберем едно такова $y \in X$ и да означим $x_1 = y$. По този начин можем да построим

$$x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots$$

□

Твърдение 9. Нека $(A_1, \prec_1)$ и $(A_2, \prec_2)$ са фундирани. Тогава

$$(A_1 \times A_2, \prec)$$

е фундирано множество, където

$$\langle a_1, a_2 \rangle \prec \langle a_1', a_2' \rangle \quad \leftrightarrow \quad a_1 \prec_1 a_1' \ \vee \ (a_1 = a_1' \ \wedge \ a_2 \prec_2 a_2')$$

Доказателство. Да допуснем, че съществува безкрайно намаляваща редица относно $\prec$:

$$(x_0, y_0) \succ (x_1, y_1) \succ \cdots \succ (x_n, y_n) \succ \cdots$$

Да разгледаме редицата само от първите компоненти :

$$x_0 \succeq x_1 \succeq \cdots \succeq x_n \succeq \cdots$$

Това означава, че съществува число n_1, такова че

$$(\forall k \geq n_1)[x_{n_1} = x_k].$$

В противен случай ще получим безкрайно намаляваща редица, което ще бъде противоречие с фундираността на A_1. Аналогично, съществува n_2, такова че

$$(\forall k \geq n_2)[y_{n_2} = y_k].$$

В противен случай ще получим безкрайно намаляваща редица, което ще бъде противоречие с фундираността на A_2. Нека

$$n = \max(n_1, n_2).$$

Тогава

$$(\forall k \geq n)[(x_n, y_n) = (x_k, y_k)].$$

Така достигаме до противоречие с

$$(\forall k \geq n)[(x_n, y_n) \succ (x_k, y_k)].$$

Следователно $\prec$ задава фундирана наредба върху $A_1 \times A_2$. □

Индукция по фундирани наредби

Доказателството с индукция по фундираното множество $(A, \prec)$ представлява следната схема:

$$\frac{(\forall x \in A)[(\forall y \in A)[y \prec x \ \rightarrow \ P(y)] \ \rightarrow P(x)]}{(\forall x \in A)P(x)}$$

Ако допуснем, че съществува $x \in A$, за което $\neg P(x)$, то да разгледаме

$$X = \{x \in A \mid \neg P(x)\}.$$

Щом това множество е непразно, то X има поне един минимален елемент x_0. Тогава

$$(\forall y \in A)[y \prec x_0 \ \rightarrow P(y)].$$

Но това означава, че $P(x_0)$, което е противоречие.

Задача 75. Докажете, че $f(x, y) = |x - y|$, където

$$f(x, y) = \begin{cases} y, & x = 0 \\ x, & y = 0 \\ f(x-1, y-1), & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказателство. Индукция по $(\mathbb{N}^2, \prec)$, където $\prec$ е лексикографската наредба. Имаме един минимален елемент $(0, 0)$.

$$f(0, 0) = 0 = |0 - 0|.$$

Да допуснем, че за всяко $(u, v) \prec (x, y)$,

$$f(u, v) = |u - v|.$$

Тогава ако $x > 0, y = 0$, то

$$f(x, 0) = x = |x - 0|.$$

Ако $x > 0, y > 0$, то

$$f(x, y) = f(x-1, y-1) = |x - 1 - y + 1| = |x - y|.$$

□

Задача 76. Докажете, че $f(x, y) = \text{НОД}(x, y)$, където за $x, y \in \mathbb{N}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} f(x-y, y), & x > y \\ f(y, x), & x < y \\ x, & x = y. \end{cases}$$

Задача 77. Докажете, че $f(x, y) = \binom{x}{y}$, където за $x \geq y, x, y \in \mathbb{N}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ x = y \\ f(x-1, y) + f(x-1, y-1), & \text{иначе} \end{cases}$$

$\text{НОК}(x, y) = z$ точно тогава, когато z е най-малкото число, за което е изпълнено свойството $x|z \ \& \ y|z$.

Глава 7

Комбинаторика

7.1 Основни понятия

(0+R+) Конфигурации с подредба и с повторение. Също така се наричат пермутации с повторение. Това е броят $P_r(n,k)$ на всички думи с дължина k над n-елементна азбука.

$$P_r(n,k) = n^k$$

С тази формула можем да намираме всички k-буквени думи над азбука с n букви. Например, всички 4-буквени думи над азбуката $\{a,b,c\}$ са 3^4 на брой. Иначе казано, това са всички начини да изберем по една буква от всяка урна:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

и ги подреждаме в редица.

Тук $k \leq n$.

(0+R–) Конфигурации с подредба, но без повторение. Съща така се наричат пермутации. Това е броят $P(n,k)$ на думите с дължина k над азбука с n букви, като нямаме повторения на буквите.

$$P(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Например, всички 3-буквени думи *без повторения* над азбуката $\Sigma = \{a,b,c,d\}$ са 4!3!2! на брой. Как можем да генерираме всички такива 3-буквени думи? Започваме с 3 пълни урни:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

От първата урна избираме произволен елемент измежду 4-те букви. Например b. Това ще бъди първият символ на нашата дума. Понеже той не може да се повтаря, ние премахваме b от другите урни. Оставаме с втора и трета урна:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

От втората урна избираме произволен елемент измежду 3-те останали букви. Нека да изберем от втората урна a. Това означава, че нашата дума ще започва с ba. Отново, понеже не искаме a да се повтаря, премахваме a от третата урна. Оставаме само с третата урна:

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

За третата буква от нашата дума избираме измежду c и d. Нека да изберем d. Така генерирахме думата bad.

(0–R–) Конфигурации без подредба и без повторение. Това е броят $C(n, k)$ на k-елементните подмножества (т.е. елементите *не са подредени*) на едно n-елементно множество. Имаме следната връзка с пермутации без повторение:

Тук също $k \leq n$.

Също така се наричат комбинации

$$P(n, k) = C(n, k) \cdot P(k, k),$$

т.е. за да получим всички думи с дължина k *без повторения на буквите*, можем първо да изберем едно множество от k букви и след това да ги подредим тези k на брой букви в една редица. Следователно,

$\binom{n}{k}$ - чете се n над k

$$C(n, k) = \frac{P(n, k)}{P(k, k)} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Например, всички 3 елементни подмножества на $\{1, 2, 3, 4\}$ са

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

Като друг пример, броят на всички комбинации от правилно попълнени фишове в тото 6 от 49 са $\binom{49}{6}$. Всеки правилно попълнен фиш еднозначно се определя като множество от 6 елемента измежду числата $\{1, 2, \ldots, 49\}$, защото не е важен реда на попълване на числата.

(0– R+) Комбинации без подредба и с повторение. Мултимножество е съвкупност от обекти, в които позволяваме повторение на елементи. Например, $\{3, 1, 1, 2\}$ е мултимножество и $\{3, 1, 1, 2\} = \{2, 1, 3, 1\}$, но $\{3, 1, 2\} \neq \{3, 1, 1, 2\}$. Броят на n-елементните мулти-подмножества на едно k-елементно множество е:

$$C(n + k - 1, k - 1) = \binom{n + k - 1}{k - 1}.$$

Нека да видим как можем да достигнем до тази формула като намерим всички 4-елементни мулти-подмножества на $\{a, b, c\}$. Ще видим, че на всяко такова мулти-множество можем да съпоставим редица от 6 кутии, като в две от тези кутии са отбелязани с $\star$, а в другите кутии са буквите от азбуката, избрани по следния начин - в кутиите до първата $\star$ поставяме a; в кутиите между двете $\star$ поставяме b; и в кутиите след втората $\star$ поставяме c. Например, на следната редица от кутии:

a	a	$\star$	$\star$	c	c

съответства мулти-множеството $\{a, a, c, c\}$, а на редицата от кутии:

a	$\star$	b	$\star$	c	c

съответства мулти-множеството $\{a, b, c, c\}$

Всяка такава подредба се определя еднозначно от позициите на двете $\star$. Следователно, всички мулти-множества са $\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2}$.

Задача 78. Отговорете на следните въпроси:

а) Колко битови низове с дължина един байт има ? Отг. 2^8

б) Колко са всички подмножества на множеството A с 8 елемента ?

в) Колко битови низове с дължина един байт започват с 1 завършват с 00 ? Отг. 2^5

г) Всеки потребител на една компютърна система има парола, която е дълга между 6 и 8 символа. Всеки символ е малка или голяма буква, или цифра. Всяка парола трябва да съдържа поне една цифра. Колко такива пароли има? Отг. $62! - 52!$

д) По колко начина можем да подредим елементите $\{a, b, c, d\}$? Отг. $4!$

е) Колко думи може да се образуват от буквите в $ABCDEFG$, които съдържат ABC. Отг. $5!$

ж) Колко различни думи могат да се образуват като разместим буквите на думата $MISSISSIPPI$? Отг. $\binom{11}{1}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2}$

з) Колко различни думи могат да се образуват като разместим буквите на думата $TENNESSEE$?

и) Колко различни думи могат да се образуват като разместим буквите на думата $SUCCESS$?

к) Колко различни думи могат да се образуват като разместим буквите на думата АБРАКАДАБРА?

л) Колко различни думи могат да се образуват като разместим буквите на думата ПЕРПЕРИКОН?

м) В състезание участват 10 отбора. По колко начина могат да се разпределят златните, сребърните и бронзовите медали? Отг. $10 \cdot 9 \cdot 8$

н) Колко различни петцифрени числа могат да се образуват чрез разместване на цифрите от 0,1,2,3,4? Не искаме числата да започват с нула. Отг. $5! - 4!$

о) По колко различни начина могат да се настанят осем студенти в три стаи съответно с едно, три и четири легла? Отг. $\binom{8}{1}\binom{7}{3}\binom{4}{4}$

п) По колко различни начина четирима младежи могат да поканят на танц четири от n девойки?

р) Шест различни предмета се боядисват по следния начин: два зелен, два червен, два син цвят. По колко различни начина могат да се боядисат предметите?

с) По колко различни начина могат да се разпределят 10 специалисти в 4 цеха така, че в тях да попаднат съответно по 1,2,3 и 4 души?

Отг. $(n+1)! - n! - n!$

т) Иванчо и n негови приятели отиват на кино. По колко различни начина могат всички да седнат заедно на един ред, така че Иванчо е винаги между двама негови приятели.

Отг. $\binom{m}{k}\binom{N-M}{n-k}$

у) В партида от N изделия, M са бракувани. По колко различни начина могат да се вземат от партидата n изделия, така че точно k от тях да бъдат бракувани ($M \leq N, k \leq n \leq N$)?

Отг. $\binom{4}{2}\binom{48}{4}$

ф) От колода с 52 карти се изваждат 6 произволни карти без връщане. По колко различни начина могат да се извадят картите, така че две от тях да са дами?

Отг. $\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{2}$

х) От колода с 52 карти се изваждат 6 произволни карти без връщане. По колко различни начина могат да се извадят картите, така че две от тях да са тройки и две осмици?

Отг. $\binom{48}{24}\binom{4}{2}$

ц) По колко различни начина може да се раздели колода от 52 карти на две пачки от по 26 карти така, че във всяка от тях да има по две дами?

Отг. $\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$

ч) По колко начина може да се разпределят 8 подаръка между 4 лица, така че всеки да получи по два подаръка?

ш) Провежда се събрание с 40 присъстващи. По колко начина може да се избере председател, секретар и 5 членна комисия?

Задача 79. От колода с 52 карти се избират 11. По колко различни начина могат да се изберат извадки, в които се срещат:

Отг. $\binom{48}{10}\binom{4}{1}$

а) точно 1 ас;

Отг. $\binom{52}{11} - \binom{48}{11} - \binom{48}{10}\binom{4}{1}$

б) поне 2 валета;

Отг. $\binom{39}{7}\binom{13}{4}$

в) точно 4 пики;

Отг. $\binom{52}{11} + \binom{39}{10}\binom{13}{1} + \binom{39}{9}\binom{13}{2}$

г) най-много 2 кари;

Отг. $\binom{3}{2}\binom{12}{2}\binom{36}{7} + \binom{3}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{8}$

д) точно 2 аса и 2 точно трефи;

е) точно 2 аса и не повече от 2 трефи;

Отг. $\binom{6}{2}$

Задача 80. а) Колко е максималният брой прави, които могат да се прекарат през 6 точки?

Отг. $\binom{10}{2} - 2$

б) Колко е максималният брой прави, които могат да се прекарат през 10 точки, три от които лежат на една права?

Отг. $\binom{7}{2}$

в) В колко точки се пресичат 7 прави от една равнина, никои три от които не минават през една точка и никои две не са успоредни?

Отг. $\binom{n}{2}$

г) Колко е максималният брой точки, в които се пресичат n прави от една равнина?

$\binom{n-3}{2} + 3(n-3) = \binom{n}{2} - \binom{3}{2}$

д) Колко е максималният брой точки, в които се пресичат n прави от една равнина, като три от тези прави са успоредни?

$\binom{n-4}{2} + 4(n-4) + 1 = \binom{n}{2} - (\binom{4}{2} - 1)$

е) Колко е максималният брой точки, в които се пресичат n прави от една равнина, като четири прави минават през една и съща точка?

$\binom{n}{2} - (\binom{4}{2} - 1) - \binom{3}{2}$

ж) В колко точки се пресичат n прави от една равнина, като три от тези прави са успоредни и четири други минават през една и съща точка.

Задача 81. Докажете, че

Един метод за доказателство е с индукция по n. Ние ще разгледаме друг метод.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}.$$

Доказателство. Нека за определеност да положим $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Ще докажем задачата като преброим по два пъти един и същ клас от обекти.

Да означим $\mathscr{P}_k(A) = \{B \subseteq A \mid |B| = k\}$ и да напомним, че $|\mathscr{P}_k(A)| = \binom{n}{k}$

- Дясната страна на тъждеството можем да представим по следния начин:

$$\sum_{i=1}^{n} |\{B \in \mathscr{P}(A) \mid a_i \notin B\}| = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-1} = n2^{n-1}.$$

- Това ни подсказва, че за лявата страна, можем да използваме наблюдението, че

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\{B \in \mathscr{P}(A) \mid a_i \notin B\}| &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} |\{B \in \mathscr{P}_k(A) \mid a_i \notin B\}| \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{n} |\{B \in \mathscr{P}_k(A) \mid a_i \notin B\}|.\end{aligned}$$

Да разгледаме всяко k поотделно като използваме тъждеството:

$$\mathscr{P}(A) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(A).$$

$\mathscr{P}_0(A) = \{\emptyset\}$

– За $k = 0$ получваме, че

$$\sum_{i=1}^{n} |\{B \in \mathscr{P}_0(A) \mid a_i \notin B\}| = \sum_{i=1}^{n} 1 = \binom{n}{n} n.$$

Да напомним, че

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

– За $k = 1$ получваме, че

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\{B \in \mathscr{P}_1(A) \mid a_i \notin B\}| &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{1} \\ &= n \binom{n-1}{n-2} \frac{n-1}{n-1} \\ &= \binom{n}{n-1} (n-1).\end{aligned}$$

– Да видим дали можем да получим за $k = 2$ формула сходна с тази за $k = 0$ и $k = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\{B \in \mathscr{P}_2(A) \mid a_i \notin B\}| &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{2} \\
&= n\binom{n-1}{n-3}\frac{n-2}{n-2} \\
&= \binom{n}{n-2}(n-2).
\end{aligned}$$

– Сега вече имаме добра идея какъв вид трябва да намерим за произволно $k < n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\{B \in \mathscr{P}_k(A) \mid a_i \notin B\}| &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{k} \\
&= n\binom{n-1}{n-1-k}\frac{n-k}{n-k} \\
&= \binom{n}{n-k}(n-k).
\end{aligned}$$

– Да разгледаме накрая и случая $k = n$: $\mathscr{P}_n(A) = \{A\}$

$$\sum_{i=1}^{n} |\{B \in \mathscr{P}_n(A) \mid a_i \notin B\}| = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0 = \binom{n}{0} \cdot 0.$$

Да обединим всички случаи за k, получаваме лявата страна:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{n} |\{B \in \mathscr{P}_k(A) \mid a_i \notin B\}| &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k.
\end{aligned}$$

□

7.2 Принцип на включването и изключването

Твърдение 10. За две крайни множества A и B,

а) ако $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

б) ако $A \subseteq B$, то $|B \setminus A| = |B| - |A|$.

в) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Доказателство.

в) Имаме, че:

$$\begin{aligned}
A \cup B &= A \setminus B \;\cup\; (A \cap B) \;\cup\; B \setminus A \\
&= A \setminus (A \cap B) \;\cup\; (A \cap B) \;\cup\; B \setminus (A \cap B)
\end{aligned}$$

Трите множества в дясната страна на равенството са непресичащи се. Тогава, използвайки а) и б),

$$\begin{aligned}|A \cup B| &= |A \setminus (A \cap B)| + |A \cap B| + |B \setminus (A \cap B)| \\ &= |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| + |A \cap B|\end{aligned}$$

□

Твърдение 11. Докажете, че за всеки три крайни множества A, B и C,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Доказателство.

$$\begin{aligned}|(A \cup B) \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= (|A| + |B| - |A \cap B|) + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

□

Теорема 6. Нека $A_1 \dots A_n$ са n на брой крайни множества и $n \geq 2$. Тогава:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = &\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \\ &\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Задача 82. Колко решения в естествените числа имат уравненията:

а) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$;

б) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, като $x_2 < 3$;

в) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, като $x_2 \geq 3$;

г) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, като $x_1 \geq 2$ & $x_2 \geq 3$;

д) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, като $x_1 \geq 2$ & $x_2 < 3$;

е) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, като $x_1 \geq 2$ & $x_2 \geq 3$ & $x_3 \leq 8$;

ж) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, като $x_1 < 2 \ \vee \ x_2 \geq 3$;

з) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, като $x_1 < 2 \ \vee \ x_2 = 3$;

и) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, като $x_1 < 2 \ \vee \ x_2 < 3$;

Упътване.

а) Търсим броят на елементите на

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 15\}.$$

Това са всички 15 елементни мултимножества на $\{x_1, x_2, x_3\}$. Например, мултимножеството $\{x_1, x_1, x_3, x_2, x_1, x_3\}$ отговаря на решение на уравнението $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, където $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Следователно,

$$|A| = \binom{15+3-1}{3-1}.$$

б) Търсим броя на елементите на

$$\begin{aligned} A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 15 \ \&\ x_2 < 3\} \\ &= \{(x_1, 0, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + 0 + x_3 = 15\} \cup \\ &\quad \{(x_1, 1, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + 1 + x_3 = 15\} \cup \\ &\quad \{(x_1, 2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + 2 + x_3 = 15\}. \end{aligned}$$

Лесно се съобразява, че

$$|A_2| = \binom{16}{1} + \binom{15}{1} + \binom{14}{1}.$$

в) Отговорът е

$$|A| - |A_2| = \binom{17}{2} - \binom{16}{1} - \binom{15}{1} - \binom{14}{1}.$$

Друг начин да решим задачата е като съобразим, че

$$x_2 \geq 3 \ \leftrightarrow\ (\exists x_2' \in \mathbb{N})[x_2 = x_2' + 3].$$

Това означава, че търсим броя на решенията на уравнението

$$x_1 + (x_2' + 3) + x_3 = 15 \ \leftrightarrow\ x_1 + x_2' + x_3 = 12.$$

Това означава, че отговорът е $\binom{14}{2}$.

Проверете, че $\binom{14}{2} = \binom{17}{2} - \binom{16}{1} - \binom{15}{1} - \binom{14}{1}$

г) Достатъчно е да намерим броя на решенията на уравнението:

$$(x_1 + 2) + (x_2 + 3) + x_3 = 15 \ \leftrightarrow\ x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

Това означава, че отговорът е $\binom{12}{2} = 66$.

д) Да означим

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 15 \ \&\ x_1 \geq 2\} \\ A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 15 \ \&\ x_1 \geq 2 \ \&\ x_2 \geq 3\}. \end{aligned}$$

Броят на решенията на уравнението са $|A_1| - |A_2| = \binom{15}{2} - \binom{12}{2}$, защото

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 13\} \\ A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 10\}. \end{aligned}$$

ж) Да означим

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \;\&\; x_1 < 2\}$$
$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \;\&\; x_2 \geq 3\}.$$

Тогава от принципа за включването и изключването, отговорът е

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

□

Задача 83. Да фиксираме множеството $U = \{u_1, u_2 \ldots, u_n\}$. Намерете броя на елементите на следните множества:

а) $S = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y \subseteq U\}$;

б) $S = \{(X, Y, Z) \mid X \subseteq Y \subseteq Z \subseteq U\}$;

в) $S = \{(X, Y, Z) \mid X, Y, Z \subseteq U \;\&\; X \cap Y \cap Z = \emptyset\}$.

г) $S = \{(X, Y, Z) \mid X, Y, Z \subseteq U \;\&\; X \cap Y = \emptyset \;\&\; X \cap Z = \emptyset \;\&\; Y \cap Z = \emptyset\}$;

Упътване.

а) За всяко $k = 0, \ldots, n$, да разгледаме

$$S_k = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y \subseteq U \;\&\; |X| = k\}.$$

Съобразете, че:

- $k \neq k' \implies S_k \neq S_{k'}$;
- $|S| = |\bigcup_{k=0}^{n} S_k| = \sum_{k=0}^{n} |S_k|$.
- $|S_0| = 2^n$;
- $|S_1| = n.2^{n-1}$;
- $|S_k| = \binom{n}{k} 2^{n-k}$, за всяко $k = 0, 1, \ldots, n$.

Тогава отговорът е

$$|S| = |\bigcup_{k=0}^{n} S_k| = \sum_{k=0}^{n} |S_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k.2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n.$$

Сега да видим, че тази задача може да се реши по-лесно ако интерпретираме всеки елемент от вида $(X, Y) \in S$ като една дума над азбуката $\Sigma = \{XY,\ \bar{X}Y,\ X\bar{Y},\ \bar{X}\bar{Y}\}$. Единственото нещо, което трябва да съобразим е, че нямаме букви от вида $X\bar{Y}$, защото това ще означава, че $X \not\subseteq Y$. Така свеждаме задачата до въпроса колко са всички думи с дължина n над азбука с три букви. Ясно е, че отговорър е 3^n.

□

7.3 Комбинаторни задачи за функции

Отг. $\binom{11}{5}$

Задача 84. Нека $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ е пермутация на числата от 1 до 12, за които е изпълнено условието:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}.$$

Намерете броя на тези пермутации.

Задача 85. Да фиксираме естествените числа m и n. Една функция

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$$

е монотонно ненамаляваща, ако

$$(\forall i \forall j)[1 \leq i < j \leq n \to f(i) \leq f(j)].$$

Отг. $\binom{n+m-1}{m-1}$

а) Колко такива функции съществуват?

Във всяка кутийка има топка. Отг. $\binom{(n-m)+m-1}{m-1}$

б) Колко от тези функции са сюрективни при $n \geq m$?

Отг. $\binom{m}{n}$

в) Колко от тези функции са инективни при $n \leq m$?

Задача 86. Да разгледаме функциите от вида $f : A \to B$, където $|A| = k$, $|B| = n$.

Отг. n^k

а) Колко са всички тези функции?

Само ако $k \leq n$, $n!/(n-k)!$

б) Колко от тези функции са инективни?

Само ако $n = k$, $n!$

в) Колко от тези функции са биективни?

Това е по-трудно. Ще го разгледаме като отделна задача.

г) Колко от тези функции са сюрективни?

Задача 87. Да разгледаме функциите от вида $f : A \to B$, където $|A| = k$, $|B| = n$. Колко от тези функции са сюрективни?

Решение. Нека $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Да означим с F всички функции от вида $f : A \to B$.

$Range(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$

$$F_i = \{f : A \to B \mid b_i \notin Range(f)\}.$$

Да означим с S сюрективните функции $f : A \to B$. Понеже сюрективните функции са тези, за които $Range(f) = B$, то

$$S = F \setminus (F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n).$$

Лесно се съобразява, че имаме следните равенства:

$$|F| = n^k$$
$$|F_i| = (n-1)^k$$
$$|F_i \cap F_j| = (n-2)^k$$
$$\sum_{i=1}^{n} |F_i| = n.(n-1)^k$$
$$\sum_{i<j} |F_i \cap F_j| = \binom{n}{2}(n-2)^k$$
$$\sum_{i<j<l} |F_i \cap F_j \cap F_l| = \binom{n}{3}(n-3)^k$$
$$\vdots$$

Прилагайки принципа на включването и изключването, получаваме:

$$\begin{aligned}
|S| &= |F| - \sum_i |F_i| + \sum_{i<j} |F_i \cap F_j| - \sum_{i<j<l} |F_i \cap F_j \cap F_l| + \dots \\
&= n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \binom{n}{3}(n-3)^k + \dots \\
&= n^k + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^k + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^k + (-1)^3\binom{n}{3}(n-3)^k + \dots \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^k
\end{aligned}$$

□

Сега ще видим едно приложение на горната задача.

Задача 88. Нека да имаме 7 топки с номер на всяка от тях и нека имаме 3 различни кутии, отново номерирани. По колко начина можем да поставим топките в кутиите, така че във всяка кутия да има поне по една топка ?

Колко са сюрективните функции $f : A \to B$, като $|A| = 7$, $|B| = 3$?

Забележка. Да разгледаме множествата $A = \{1, 2, \dots, n\}$ и $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Тогава имаме следните преводи между езика на функциите и езика на думите и азбуките.

функциите от вида $f : A \to \Sigma$	думите с дължина n над азбуката Σ
всички такива функции	**всички** такива думи
инективните функции, $n \leq k$	думите **без повторения на букви**
сюрективните функции, $n \geq k$	думите, в които **всяка буква се среща**
биективните функции, $n = k$	думите, в които всяка буква от Σ се среща **точно веднъж**

7.4 Принцип на Дирихле

Задача 89. В един месец от 30 дни се провежда баскетболен турни, в който се играе поне един мач на ден, но всички мачове са не повече от 45. Покажете, че има период от последователни дни от месеца, в който се провеждат точно 14 мача.

Доказателство. Нека a_j означава сумата на всички проведени мачове в първите j дни на месеца. Търсим такива $i < j$, че $a_j - a_i = 14$. От условието следва, че редицата $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ е строго монотонно растяща и

$$(\forall j)[0 \leq j \leq 30 \rightarrow a_j \leq 45].$$

Ясно е също, че редицата $a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ е строго монотонно растяща. Образуваме редица от 60 елемента $a_1, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, \ldots, a_{30} + 14$, като всеки елемент на редицата приема стойност от 1 до 59. Тогава от принципа на Дирихле следва, че съществуват два елемента на редицата, които са равни. Първите 30 са различни са различни помежду си, вторите 30 елемента също са различни помежду си. Следователно, $a_i = a_j + 14$ за някои i, j. Тогава в дните от j до i са проведени точно 14 мача. □

Задача 90. Нека имаме редица $a_0, \ldots, a_n$от $n+1$ произволни числа, ненадвишаващи $2n$. Покажете, че трябва да съществува i такова, че $a_i | a_j$ за някое $j \neq i$.

Доказателство. Да представим всеки от елементите на редицата $a_j = 2^{k_j} q_j$, където q_j е нечетно. Да разгледаме редицата от нечетни числа $q_0, \ldots, q_n$, като имаме и условието $q_i \leq 2n$. Имаме само n нечетни числа в интервала $[0, 2n]$, следователно $q_i = q_j = q$, за някои i, j. Тогава $a_i = 2^{k_i} q$ и $a_j = 2^{k_j} q$ и е ясно, че или $a_i | a_j$ или $a_j | a_i$. □

Задача 91. Нека имаме редица от n произволни, не непременно различни, естествени числа $a_1, \ldots, a_n$. Тогава има подредица от последователни елементи $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$, за които $n | (\sum_{k=i}^{j} a_k)$.

Доказателство. Да разгледаме редицата от $n+1$ елемента:

$$\sum_{i=1}^{0} a_i, \sum_{i=1}^{1} a_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Тъй като има n различни остатъка при деление на n, то от принципа на Дирихле следва, че има поне два елемента $\sum_{i=1}^{l} a_i, \sum_{i=1}^{k} a_i$, за $l < k$, които дават един и същ остатък при деление на n. Получаваме, че

$$n | (\sum_{i=1}^{l} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i) \;\Rightarrow\; n | (\sum_{i=l+1}^{k} a_i).$$

□

7.5 Допълнителни задачи

Задача 92. Отговорете на следните въпроси:

а) По колко начина могат n момчета и n момичета да седнат на ред с $2n$ стола, като няма двама от един пол седящи един до друг? 2.10!10!

б) По колко начина могат n момчета и n момичета да седнат на ред с $2n$ стола, като няма двама от един пол седящи един до друг и Иванчо и Марийка не седят един до друг? 2.10!10! − 2.7.3!3!

Отг. $2.(n-1)!$

в) По колко различни начина могат да се подредят на рафт n книги, така че две от тях, определени предварително, да са една до друга?

Отг. $\frac{n!}{2n}$

г) Колко различни гердана могат да се направят от n различни перли, като се използват всичките?

Отг. $2.(n-2)(n-3)!$

д) На хоро в кръг са хванали общо n души, между които и Иванчо и Марийка. Колко са възможните подредби, при които Иванчо и Марийка са един до друг?

е) На хоро в кръг са хванали общо n души, между които и Иванчо и Марийка. Колко са възможните подредби, при които Иванчо и Марийка не са един до друг?

Отг. $2^n(n-1)!$

ж) Имаме n съпружески двойки, които седят на $2n$ места около една кръгла маса. По колко начина могат да седнат всички двойки, ако ротациите се броят за едно и също подреждане, и всеки мъж седи до половинката си.

Това е както при герданите

з) Две сядания на една кръгла маса не са различни, ако всеки от седящите има едни и същи съседи. По колко различни начина могат да седнат около една кръгла маса:

Отг. $\frac{(n-1)!}{2}$

(а) $n(\geq 2)$ човека;

Отг. $\frac{2n!n!}{2.2n} = \frac{n!(n-1)!}{2}$

(б) n мъже и n жени, като двама души от един и същ пол не седят един до друг.

Тази задача мисля, че трябва да бъде при включването и изключването

Задача 93. Да разгледаме азбуката $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Да се намерят всички k-буквени думи над азбуката Σ, за $k \leq n$, където:

Отг. $\frac{n!}{(n-k)!}$

а) нито една буква не се повтаря;

Отг. $n^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$

б) са палиндроми;

Отг. $n(n-1)^{k-1}$

в) нямат две последователни еднакви букви;

Отг. $n^k - n(n-1)^{k-1}$

г) имат две последователни еднакви букви;

Отг. $\binom{k}{2} n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-2))!}$

д) съществува само една буква, която се среща точно два пъти;

Отг. $n^k - \frac{n!}{(n-k)!}$

е) съществува буква, която се повтаря;

Задача 94. Нека U е множество от n елемента, $n \geq 3$. За всяко множество $X \subseteq U$, с $\overline{X}$ означаваме $U \setminus X$. Също така, за множества X и Y, понякога ще пишем XY вместо $X \cap Y$. Намерете броя на елементите на следните множества:

Отг. 4^n

а) $\{(X, Y) \mid X, Y \subseteq U\}$

Отг. $2\binom{n}{1}2^{n-1}$

б) $\{(X, Y) \mid X, Y \subseteq U \ \& \ |X| = 1\}$;

Отг. $2^2\binom{n}{2}2^{n-2}$

в) $\{(X, Y) \mid X, Y \subseteq U \ \& \ |X| = 2\}$;

Отг. $4^n - 3^n$

г) $\{(X, Y) \mid X, Y \subseteq U \ \& \ |X| \geq 1\}$;

д) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ |X| = k\}$ за произволно $k \leq n$;

е) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ |X| \leq 1\}$;

Отг. $3^n + \binom{n}{1}3^{n-1}$

ж) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ |X| = 1 \ \&\ |Y| = 1\}$;

Отг. $\binom{n}{1}\binom{n}{1} = n^2$

з) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ X \cap Y = \emptyset\}$;

Нямаме буква XY

и) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ |X \cap Y| = 1\}$;

Една буква XY. Отг. $\binom{n}{1}3^{n-1}$

к) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ |X \cap Y| = k\}$ за произволно $k \leq n$;

л) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ |(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1\}$;

Отг. $2\binom{n}{1}2^{n-1} = n2^n$

м) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ X \cap Y = \emptyset \ \&\ |X| \geq 1 \ \&\ |Y| \geq 1\}$;

н) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ X \cap Y = \emptyset \ \&\ |X| \geq 2 \ \&\ |Y| \geq 2\}$;

о) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ |X \setminus Y| = 1\}$;

п) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ |X \setminus Y| = k\}$ за произволно $k \leq n$;

р) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ |(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1 \ \&\ |X| \geq 2 \ \&\ |Y| \geq 2\}$;

с) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ X \cap Y = \emptyset \ \&\ |X| \geq 2 \ \&\ |Y| \geq 3\}$;

Използвайте принципа за вкл. и изкл.

т) $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U \ \&\ |(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1 \ \&\ X \cap Y = \emptyset \ \&\ |X| \geq 2 \ \&\ |Y| \geq 3\}$;

Използвайте принципа за вкл. и изкл.

у) $\{(X,Y,Z) \mid X,Y,Z \subseteq U\}$;

Отг. 8^n

ф) $\{(X,Y,Z) \mid X,Y,Z \subseteq U \ \&\ X \cap Y = \emptyset\}$;

Отг. 6^n

х) $\{(X,Y,Z) \mid X,Y,Z \subseteq U \ \&\ X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}\}$;

$U = X\overline{Y}Z \cup X\overline{YZ} \cup \overline{X}Y\overline{Z}$. Отг. 3^n

ц) $\{(X,Y,Z) \mid X,Y,Z \subseteq U \ \&\ Y \cup X = Z \cup \overline{Y}\}$;

ч) $\{(X,Y,Z) \mid X,Y,Z \subseteq U \ \&\ X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y} \ \&\ |Z| = 0\}$;

ш) $\{(X,Y,Z) \mid X,Y,Z \subseteq U \ \&\ X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y} \ \&\ |X| \geq 1 \ \&\ |Y| \geq 1 \ \&\ |Z| = 1\}$;

щ) $\{(X,Y,Z) \mid X,Y,Z \subseteq U \ \&\ X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y} \ \&\ |X| \geq 1 \ \&\ |Y| \geq 1 \ \&\ |Z| \leq 1\}$;

ю) $\{(X,Y,Z) \mid X,Y,Z \subseteq U \ \&\ X \cup YZ = \overline{X} \cup \overline{Z}\}$;

я) $\{(X,Y,Z) \mid X,Y,Z \subseteq U \ \&\ X\overline{Y} \cup YZ = U\}$;

Упътване.

а) Понеже всички подмножества на U са 2^n и множествата X и Y са независими едно от друго, то лесно се съобразява, че броят на елементите на $\{(X,Y) \mid X,Y \in U\} = \mathscr{P}(U) \times \mathscr{P}(U)$ е 4^n. Ще дадем и друго доказателство, което ще ни помогне да решаваме по-сложни задачи, в които имаме връзка между елементите на X и Y.

Нека $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и да разгледаме азбуката $\Sigma = \{XY, X\bar{Y}, \bar{X}Y, \bar{X}\bar{Y}\}$. На всеки елемент на $\{(X,Y) \mid X,Y \subseteq U\}$ можем еднозначно да съпоставим дума $\alpha = a_1 \cdots a_n$ над азбуката Σ по следния начин:

Всеки елемент $u_i \in U$ попада в един от четирите случаи

- ако $u_i \in X \cap Y$, то $a_i = XY$;
- ако $u_i \in X \cap \bar{Y}$, то $a_i = X\bar{Y}$;
- ако $u_i \in \bar{X} \cap Y$, то $a_i = \bar{X}Y$;
- ако $u_i \in \bar{X} \cap \bar{Y}$, то $a_i = \bar{X}\bar{Y}$.

Да разгледаме няколко примера:

- на двойката $(\{u_1\}, \{u_2\})$ съпоставяме думата $\alpha = a_1 \cdots a_n$, където $a_1 = X\bar{Y}$, $a_2 = \bar{X}Y$, $a_i = \bar{X}\bar{Y}$ за $i \geq 3$.
- на двойката $(U, \{u_2\})$ съпоставяме думата $\alpha = a_1 \cdots a_n$, където $a_2 = XY$ и $a_i = X\bar{Y}$ за $i \neq 2$.
- на двойката $(\{u_1\}, \{u_1, u_2\})$ съпоставяме думата $\alpha = a_1 \cdots a_n$, където $a_1 = XY$ и $a_2 = \bar{X}Y$, $a_i = \bar{X}\bar{Y}$ за $i \geq 3$.

Понеже всички думи с дължина n над азбука с 4 букви са 4^n, то всички двойки (X, Y) са също 4^n.

б) Трябва да намерим всичи думи с дължина n над азбуката $\{XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y, \overline{XY}\}$, като буквите XY и $X\overline{Y}$ се срещат общо веднъж. Това означава, че от n позиции трябва да изберем една, в която да поставим XY или $X\overline{Y}$, а в останалите $n-1$ позиции поставяме буквите $\overline{X}Y$ или $\overline{XY}$. Така получаваме като резултат

$$2\binom{n}{1}2^{n-1} = n2^n.$$

в) Тук разглеждаме тези думи с дължина n над азбуката Σ, като има *точно едно* срещане на XY или $X\overline{Y}$. Всички тези думи са $2\binom{n}{1}2^{n-1}$

ф) Понеже $X \cap Y = \emptyset$, то в думите не се срещат буквите XYZ и $XY\overline{Z}$. Така остават 6 възможни букви и оттук веднага следва, че всички такива думи са 6^n.

х) Да разгледаме какво означава $X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

- Ако $x \in X$, то $x \in X \cup Y\overline{Z}$ и следователно $x \in \overline{X} \cup \overline{Y}$. Тогава е ясно, че $x \in \overline{Y}$. Това означава, че имаме буквите $X\overline{Y}Z$ и $X\overline{Y}\overline{Z}$.
- Ако $x \in \overline{X}$, то $X \in \overline{X} \cup \overline{Y}$ и следователно $x \in X \cup Y\overline{Z}$. Сега получаваме, че $x \in Y\overline{Z}$. Това означава, че имаме буквата $\overline{X}Y\overline{Z}$.

Видяхме, че с горното ограничение трябва да разгледаме само думите с дължина n съставени от три букви. Те са общо 3^n на брой.

$\square$

Глава 8

Булеви функции

Да припомним таблицата за истинност на някои от основните булеви функции на два аргумента.

$x \oplus y$ - симетрична разлика

x	y	$\overline{x}$	$x \vee y$	xy	$x \to y$	$\overline{x} \vee y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x\overline{y} \vee \overline{x}y$
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0

Когато две булеви формули φ и ψ са тъждествено еквивалентни (т.е. имат еднакви стълбове), то ще пишем $\varphi \equiv \psi$.

8.1 Основни свойства

Често вместо $x \wedge y$ пишем $x \cdot y$ или xy. Също така, вместо $\neg x$ пишем $\overline{x}$

1) Комутативни свойства

$$xy \equiv yx, \quad x \vee y \equiv y \vee x, \quad x \oplus y \equiv y \oplus x$$

2) Асоциативни свойства

$$(xy)z \equiv x(yz), \quad (x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z), \quad (x \oplus y) \oplus z \equiv x \oplus (y \oplus z)$$

3) Лесно се проверява с таблиците за истинност, че:

$$x \oplus y \equiv x\overline{y} \vee \overline{x}y \equiv (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$$

4) Свойства на отрицанието

$$x\overline{x} \equiv 0, \quad x \vee \overline{x} \equiv x \vee 1, \quad x \oplus \overline{x} \equiv 1$$

5) Закон за двойното отрицание

$$\overline{\overline{x}} \equiv x$$

6) Свойства на константите

$$x \cdot 0 \equiv 0, \quad x \cdot 1 \equiv x, \quad x \vee 0 \equiv x, \quad x \vee 1 \equiv 1, \quad x \oplus 0 \equiv x, \quad x \oplus 1 \equiv \overline{x}$$

7) Дистрибутивни свойства

   (а) $x(y \vee z) \equiv xy \vee xz$,

   (б) $xy \vee z \equiv (x \vee z)(y \vee z)$,

   (в) $(x \oplus y)z \equiv xz \oplus yz$.

8) Идемпотентентни свойства

$$xx \equiv x, \quad x \vee x \equiv x$$

9) Свойства на отрицанието

$$x\overline{x} \equiv 0, \quad x \vee \overline{x} \equiv 1, \quad x \oplus \overline{x} \equiv 1$$

10) Закони на Де Морган

$$\overline{xy} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}, \quad \overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \cdot \overline{y}$$

[2, стр. 30]

Задача 95. Проверете еквивалентни ли са формулите φ и ψ като използвате еквивалентни преобразования на формулите.

а) $\varphi = (x \oplus yz) \to (\overline{x} \to (y \to z))$, $\psi = x \to ((y \to z) \to x)$;

б) $\varphi = (\overline{x} \vee \overline{y}.z) \to ((x \to y) \to (y \vee z) \to \overline{x})$, $\psi = (x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$;

в) $\varphi = (x.\overline{y} \vee \overline{x}.z) \oplus ((y \to z) \to \overline{x}.y)$, $\psi = (x.(\overline{y}.\overline{z}) \oplus y) \oplus z$;

г) $\varphi = x \to ((\overline{x}.\overline{y} \to (\overline{x}.\overline{z} \to y)) \to y).z$, $\psi = \overline{x.(y \to \overline{z})}$.

д) $\varphi = \overline{((x \vee y) \to y.z) \vee (y \to x.z)} \vee (x \to (\overline{y} \to z))$, $\psi = (x \to y) \vee z$.

Решение.

а) Ще направим еквивалентни преобразувания върху двете формули докато получим един и същ резултат.

$$\begin{aligned}
\psi &= x \to ((y \to z) \to x) \\
&\equiv \overline{x} \vee (\overline{y \to z} \vee x) \;\equiv\; 1 \\
\varphi &= (x \oplus yz) \to (\overline{x} \to (y \to z)) \\
&\equiv \overline{(x \vee yz)(\overline{x} \vee \overline{yz})} \vee x \vee \overline{y} \vee z \\
&\equiv \overline{(x \vee yz)} \vee \overline{(\overline{x} \vee \overline{yz})} \vee x \vee \overline{y} \vee z \\
&\equiv \overline{x}.\overline{yz} \vee xyz \vee x \vee \overline{y} \vee z \equiv \; \overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee x \vee \overline{y} \vee z \\
&\equiv \overline{x}.\overline{y} \vee \overline{x}.\overline{z} \vee x \vee \overline{y} \vee z \equiv \; \overline{x}.\overline{z} \vee x \vee \overline{y} \vee z \\
&\equiv \overline{(x \vee z)} \vee (x \vee z) \vee \overline{y} \equiv 1 \vee \overline{y} \equiv 1.
\end{aligned}$$

в) Правим отново същото.

$$
\begin{aligned}
\psi &= (x.(\overline{y}.\overline{z}) \oplus y) \oplus z \\
&\equiv x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus y \oplus z \\
&\equiv xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z \\
\varphi &= (x\overline{y} \vee \overline{x}z) \oplus ((y \to z) \to \overline{x}y) \\
&\equiv (x\overline{y} \vee \overline{x}z) \oplus (\overline{\overline{y} \vee z} \vee \overline{x}y) \\
&\equiv x\overline{y} \oplus \overline{x}z \oplus (y\overline{z} \oplus \overline{x}y) \\
&\equiv x\overline{y} \oplus \overline{x}z \oplus \overline{x}y\overline{z} \oplus y\overline{z} \oplus \overline{x}y \\
&\equiv xy \oplus x \oplus xz \oplus z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus yz \oplus y \oplus xy \oplus y \\
&\equiv x \oplus xz \oplus z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus yz \oplus \\
&\equiv x \oplus xz \oplus z \oplus xyz \oplus yz \oplus xy \oplus y \oplus yz \oplus \\
&\equiv xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z.
\end{aligned}
$$

□

8.2 Дизюнктивна нормална форма

- **Конюнкт** на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ представлява съждителна формула от вида

  $$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n},$$

  където $x_i^{\sigma_i} = x_i$, ако $\sigma_i = 1$ и $x_i^{\sigma_i} = \overline{x}_i$, ако $\sigma_i = 0$.

- Една съждителна формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ е в **дизюнктивна нормална форма (ДНФ)**, ако тя представлява дизюнкция от конюнкти на някои от променливите на Φ. Например, формулата

  $$\Phi(x, y, z) = \overline{x}y \vee z\overline{y}$$

  е в дизюнктивна формална форма.

- Една съждителна формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ е в **съвършена дизюнктивна нормална форма (СДНФ)**, ако тя е е в ДНФ и всеки конюнкт участват всичките променливи $x_1, \dots, x_n$. За една булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, можем да намерим формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ в СДНФ еквивалентна на нея по следния начин:

  $$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1 \dots \sigma_n) \in \{0,1\}^n \\ f(\sigma_1, \dots \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}.$$

Задача 96. С помощта на еквивалентни преобразувания постройте ДНФ на булевите функции [2, стр. 50]

а) $f(x, y, z) = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \cdot (xy \vee z)$; $xy\overline{z} \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z$

б) $f(x, y, z) = (\overline{x}y \oplus z) \cdot (xz \to y)$; $\overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee x\overline{y}z$

в) $f(x, y, z) = (x \vee y\overline{z}) \cdot (x\overline{y} \vee \overline{z}) \cdot (\overline{xy} \vee z)$;

г) $f(x, y, z, t) = (x \vee y\overline{z}.\overline{t})((\overline{x} \vee t) \oplus yz) \vee \overline{y} \cdot (z \vee \overline{x\overline{t}})$;

д) $f(x, y, z, t) = (x \to y).(y \to \overline{z}).(z \to x\overline{t})$;

Задача 97. По дадена ДНФ на булевата функция f постройте нейната СДНФ.

1) $f(x, y, z) = xy \vee \overline{z}$;

2) $f(x, y, z) = \overline{x}.\overline{y} \vee y\overline{z} \vee z\overline{z}$;

3) $f(x, y, z) = x \vee yz \vee \overline{x}.\overline{z}$;

4) $f(x, y, z) = x \vee \overline{y} \vee \overline{x}z$;

5) $f(x, y, z, t) = xy\overline{z} \vee xz\overline{t}$;

6) $f(x, y, z, t) = xy \vee \overline{y}t \vee z\overline{t}$.

Задача 98. Представете в СДНФ следните булеви функции:

1) $f(x, y, z) = (x \vee y) \to z$;

2) $f(x, y, z) = (01010001)$;

3) $f(x, y, z) = (11001010)$;

4) $f(x, y, z, t) = (x \to yzt)(z \to x\overline{y})$;

5) $f(x, y, z, t) = (x \oplus y)(z \to \overline{y}t)$;

8.3 Класовете T_0 и T_1

- Нека $c \in \{0, 1\}$. Казваме, че булевата функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ запазва константата c, ако $f(c, c, \ldots, c) = c$.
- Означаваме с T_0 функциите, които запазват константата 0 и с T_1 тези, които запазват константата 1.
- С T_0^n и T_1^n означаваме тези функции, които са на n променливи и принадлежат на T_0 или T_1 съответно.

Задача 99. Принадлежи ли функцията f на множеството $T_1 \setminus T_0$?

а) $f(x, y, z) = (x \to y)(y \to z)(z \to x)$; Да

б) $f(x, y, z) = x \to (y \to (z \to x))$; Да

в) $f(x, y, z) = xyz \vee \overline{x}y \vee \overline{y}$; Да

Задача 100. При какви n функцията $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежи на $T_0 \setminus T_1$?

1) $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$;

2) $f(x_1, \ldots, x_n) = (\bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}) \oplus x_n x_1$;

Твърдение 12. Класовете T_0 и T_1 са затворени, т.е. $[T_0] = T_0$ и $[T_1] = T_1$.

8.4 Самодвойнствени булеви функции

- Нека е дадена булевата функция $f(x_1, \dots, x_n)$. Дефинираме булевата функция $f^\star(x_1, \dots, x_n)$ като

$$f^\star(x_1, \dots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n).$$

- Ще наричаме $f^\star$ **двойнствена** функция на f.
- Ако $f = f^\star$, то ще наричаме f **самодвойнствена** функция.
- Ще означаваме с S множеството от всички самодвойнствени булеви функции, а с S^n тези на n променливи.

Твърдение 13. Класът на самодвойнствените функции е затворен, т.е. $[S] = S$. Освен това, $S \subsetneqq \mathscr{F}_2$.

Задача 101. Проверете дали функцията g е двойнствена на f.

1) $f(x,y) = x \to y$, $g(x,y) = \overline{x}.y$; Да
2) $f(x,y) = (\overline{x} \to \overline{y}) \to (y \to x)$, $g(x,y) = (x \to y).(\overline{y} \to \overline{x})$; Не
3) $f(x,y,z) = xy \to z$, $g(x,y,z) = \overline{x}.\overline{y}.z$; Да
4) $f(x,y,z,t) = (x \vee y \vee z).t \vee x.y.z$, $g(x,y,z,t) = (x \vee y \vee z).t \vee x.y.z$;
5) $f(x,y,z,t) = xy \vee yz \vee zt \vee tx$, $g(x,y,z,t) = xz \vee yt$;
6) $f(x,y,z,t) = (x \to y).(z \to t)$, $g(x,y,z,t) = (x \to \overline{z}).(x \to t).(\overline{y} \to \overline{z}).(\overline{y} \to t)$.

Задача 102. Проверете самодвойнствена ли е f.

а) $f(x,y) = x \vee y$; Не

б) $f(x,y) = x \to y$; Не

в) $f(x,y) = x \oplus y$; Не

г) $f_4(x,y,z) = xy \vee yz \vee zx$; Да

д) $f_5(x,y,z) = x \oplus y \oplus z \oplus 1$; Да

е) $f_6(x,y,z) = xyz \oplus xy\overline{z} \oplus yz \oplus xz$. Да

ж) $f_7(x,y,z) = xyz \oplus xy \oplus yz \oplus xz$; Не

з) $f(x,y,z) = (x \to y) \oplus (y \to z) \oplus (y \to x)$; Не

и) $f(x,y,z) = (x \to y) \oplus (y \to z) \oplus (z \to x) \oplus z$; Не

Доказателство.

xz	а)	б)	в)
00	0	1	0
01	1	1	1
10	1	0	1
11	1	1	0

xyz	г)	д)	е)	ж)	з)
000	0	1	0	0	1
001	0	0	0	0	1
010	0	0	0	0	1
011	1	1	1	1	0
100	0	0	0	0	0
101	1	1	1	1	0
110	1	1	1	1	0
111	1	0	1	0	1

□

Задача 103. Проверете дали функцията f е самодвойствена, ако е зададена векторно:

1) $\alpha_f = (01001101)$; Да

2) $\alpha_f = (01100110)$; Не

3) $\alpha_f = (1100100101101100)$;

4) $\alpha_f = (1110011100011000)$;

5) $\alpha_f = (1100001100111100)$;

6) $\alpha_f = (1001011010010110)$;

7) $\alpha_f = (1100001110100101)$;

Задача 104. Заменете $-$ в χ_f с 0 или 1 за да получите характеристичен вектор на самодвойствена функция.
а) $\chi_f = (1-0-)$; б) $\chi_f = (01-0-0--)$; в) $\chi_f = (--01--11)$;

8.5 Полином на Жегалкин

- Полином на Жегалкин на 2 променливи е формула от вида:

  $$a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_{12}x_1x_2,$$

  където a_0, a_1, a_2, a_{12} приемат стойности 0 или 1.

- Полином на Жегалкин на 3 променливи е формула от вида:

  $$a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{123}x_1x_2x_3,$$

  където $a_0, a_1 \dots, a_{123}$ приемат стойности 0 или 1.

- Полином на Жегалкин на n променливи е формула от вида:

$$a_0 \oplus \bigoplus_{1\le i\le n} a_ix_i \oplus \bigoplus_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j \oplus \bigoplus_{1\le i<j<k\le n} a_{ijk}x_ix_jx_k \cdots \oplus a_{12\dots n}x_1x_2\dots x_n,$$

Теорема 7. Всяка булева функция има единствен полином на Жегалкин.

Упътване. Всеки полином на Жегалкин представя различна булева функция. Всички полиноми на Жегалкин на n променливи са 2^{2^n}. Всички булеви функции на n променливи са 2^{2^n}. □

Задача 105. По метода на неопределените коефициенти, намерете полинома на Жегалкин на функцията

а) $f(x, y) = x \vee y$;

б) $f(x, y, z) = x \vee y \vee z$;

в) $f(x, y, z) = x \to (y \to z)$;

г) $f(x, y, z) = x(y \vee \overline{z})$.

Доказателство.

а) Понеже общият вид на булевата функция е $f(x, y) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 xy$, трябва да намерим коефициентите a_0, a_1, a_2, a_3.

$$a_0 \oplus a_1 0 \oplus a_2 0 \oplus a_3 0 = 0 \vee 0 = 0$$
$$a_0 \oplus a_1 1 \oplus a_2 0 \oplus a_3 0 = 1 \vee 0 = 1$$
$$a_0 \oplus a_1 0 \oplus a_2 1 \oplus a_3 0 = 0 \vee 1 = 1$$
$$a_0 \oplus a_1 1 \oplus a_2 1 \oplus a_3 1 = 1 \vee 1 = 1.$$

Следователно, $x \vee y \equiv x \oplus y \oplus xy$.

□

Задача 106. Използвайки еквивалентности от вида $\overline{A} = A \oplus 1$ и $A \vee B = AB \oplus A \oplus B$, намерете полинома на Жегалкин на функцията:

а) $f(x, y) = x \to y$; $1 \oplus x \oplus xy$

б) $f(x, y, z) = (x \to (y \to z))$; $1 \oplus xy \oplus xyz$

в) $f(x, y, z) = ((x \to y) \to z)$; $x \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$

г) $f(x, y, z) = (x \to (y \to z)).((x \to y) \to z)$; $x \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$

д) $f(x, y, z, t) = (x \to y) \to (z \to xt)$;

е) $f(x, y, z, t) = x \vee (y \to ((z \to y) \to t)$;

ж) $f(x, y, z, t) = (x \vee y \vee z)t \vee xyz$.

8.6 Линейни функции

- Знаем, че всяка булева функция може да се представи *по единствен начин* с полином на Жегалкин.
- Всяка булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ с полином на Жегалкин от вида

  $$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \cdots \oplus a_n x_n$$

  наричаме **линейна**.

- Ще означаваме с L множеството от всички линейни булеви функции, а с L^n тези на n променливи.

Задача 107. Колко са всички линейни булеви функции на n променливи? Отг. 2^n

Твърдение 14. Класът на линейните функции е затворен, т.е. $[L] = L$. Освен това, $L \subsetneqq \mathscr{F}_2$.

Задача 108. Линейна ли е функцията f с характеристичен вектор $\chi_f = (1001011010010110)$?

Задача 109. Заменете $-$ в $\chi_f = (-110 - - - 0)$ с 0 или 1, така че да получите f линейна.

Задача 110. Проверете дали f е линейна функция.

1. $f = x \to y$; Не

2. $f = \overline{x \to y} \oplus \overline{x}y$; Да

3. $f = xy \vee \overline{x}.\overline{y} \vee z$; Не

4. $f = xy\overline{z} \vee x\overline{y}$; Не

5. $f = (x \vee yz) \oplus xyz$; Да

6. $f = (x \vee yz) \oplus \overline{x}yz$;

7. $\chi_f = (11000011)$;

8. $\chi_f = (1001011001101001)$;

Задача 111. Заменете $-$ в χ_f с 0 или 1, така че да получите f линейна.

а) $\chi_f = (10 - 1)$;

б) $\chi_f = (100 - 0 - --)$;

в) $\chi_f = (-001 - -1-)$;

г) $\chi_f = (11 - 0 - - - 1)$;

д) $\chi_f = (-0 - 1 - -00)$;

е) $\chi_f = (- - 10 - - - -0 - -1 - 110)$;

Доказателство. а) (1001); б) $f = 1 \oplus x \oplus y \oplus z$; в) $f = 1 \oplus x \oplus y \oplus z$; г) $f = 1 \oplus x \oplus y$; д) $f = x \oplus y$; □

8.7 Монотонни функции

- Нека $\alpha = (a_1, a_1, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ са два булеви вектора с равна дължина. Дефинираме релацията $\preceq$ между тях по следния начин. Това не е лексикографската наредба!

$$\alpha \preceq \beta \ \leftrightarrow \ |\alpha| = |\beta| \wedge (\forall i \leq |\alpha|)[a_i \leq b_i].$$

Ето няколко примера:

– $(0,1,0) \preceq (0,1,1)$;
– $(0,1,0) \not\preceq (1,0,1)$;
– $(1,0,1) \not\preceq (0,1,0)$.

- Булевата фунция $f(x_1,\dots,x_n)$ наричаме **монотонна**, ако

$$(\forall \alpha,\beta \in J_2^n)[\alpha \preceq \beta \to f(\alpha) \leq f(\beta)].$$

- Ще означаваме с M множеството от всички монотонни булеви функции, а с M^n тези на n променливи.

Твърдение 15. Класът на монотонните функции е затворен, т.е. $[M] = M$. Освен това, $M \subsetneq \mathscr{F}_2$.

Задача 112. Проверете монотонни ли са функциите:

а) $f(x,y) = x \to (y \to x)$; Да

б) $f(x,y) = x \to (x \to y)$; Не

в) $f(x,y) = (x \oplus y)xy$; Да

г) $f(x,y,z) = xy \oplus yz \oplus zx$; Да

д) $f(x,y,z) = xy \oplus yz \oplus zx \oplus x$; Не

Задача 113. За немонотонните функции f, намерете съседни α, β, такива че $\alpha \prec \beta$ и $f(\alpha) > f(\beta)$.

а) $f = xyz \vee \overline{x}y$; Отг. $\alpha = (010)$, $\beta = (110)$

б) $f = x \oplus y \oplus z$; Отг. $\alpha = (010)$, $\beta = (110)$

в) $f = xy \oplus z$;

г) $f = x \vee y\overline{z}$;

д) $f = xz \oplus yt$;

е) $f(x,y,z,t) = (xyt \to yz) \oplus t$;

8.8 Пълнота и затворени класове

- Нека $F \subseteq \mathscr{F}_2$ е множество от булеви функции. С индукция дефинираме следната редица за всяко $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} F_0 =& F \cup \{I_k^m \mid m,k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m\} \\ F_{n+1} =& F_n \cup \\ & \{h \mid (\exists f, g_1 \dots g_m \in F_n)[h(x_1 \dots x_k) = f(g_1(x_1 \dots x_k),\dots,g_m(x_1 \dots x_k)]\}, \end{aligned}$$

Затварянето на F по отношение на суперпозиция наричаме множеството:

$$[F] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n.$$

Определение 4. Нека $F \subseteq \mathscr{F}_2$ е множество от булеви функции. F е **пълно** множество, ако $[F] = \mathscr{F}_2$. Това означава, че всяка булева функция може да се представи като суперпозиция на функции от множеството F. F се нарича базис, ако не съществува $G \subsetneqq F$, за което $[G] = \mathscr{F}_2$.

Теорема 8 (Бул)**.** Множеството $\{x \vee y, \overline{x}, x \wedge y\}$ е пълно.

Упътване. Ще докажем, че за всяка булева функция $f \in \mathscr{F}_2$ е изпълнено, че $f \in [\{x \vee y, \overline{x}, x \wedge y\}]$. Ще разгледаме два случая.

- Нека $f = \mathbf{0}$. Тогава $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1 \wedge \overline{x}_1$.
- Нека $f \neq \mathbf{0}$. Тогава лесно се съобразява, че

Да напомним, че $x^1 = x$, $x^0 = \overline{x}$

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv \bigvee_{\substack{a_1, \ldots, a_n: \\ f(a_1, \ldots, a_n) = 1}} x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}.$$

□

Пример 17. Нека да фиксираме булевите функции $c(x, y) = x \wedge y$, $d(x, y) = x \vee y$, $n(x) = \overline{x}$. Булевата функция

$$f(x, y, z) = \overline{\overline{x}y \vee z}$$

се изразява чрез суперпозиция на функциите $c(x, y)$, $d(x, y)$ и $n(x)$ по следния начин:

$$f(x, y, z) \equiv n(d(c(n(x), y), z)).$$

Теорема 9 (Критерий за пълнота на Пост-Яблонский)**.** Нека $P \subseteq \mathscr{F}_2$ е непразно множество от булеви функции. Множеството P е *пълно* тогава и само тогава, когато то не е подмножество на нито едно от множествата T_0, T_1, S, M, L.

Пример 18. Да проверим дали следното множество от булеви функции е пълно $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$. Пресмятаме за всяка от функциите на кои от петте класа принадлежат:

	T_0	T_1	L	S	M
xy	+	+	−	−	+
$x \vee y$	+	+	−	−	+
$x \oplus y \oplus z \oplus 1$	−	−	+	+	−

От таблицата имаме, че:

- $x \oplus y \oplus z \oplus 1 \notin T_0$. Следователно, $A \not\subseteq T_0$.
- $x \oplus y \oplus z \oplus 1 \notin T_1$. Следователно, $A \not\subseteq T_1$.
- $xy \notin L$. Следователно, $A \not\subseteq L$.

- $xy \notin S$. Следователно, $A \not\subseteq S$.
- $x \oplus y \oplus z \oplus 1 \notin M$. Следователно, $A \not\subseteq M$.

Според критерия на Пост-Яблонский, множеството A е пълно.

Задача 114. Пълна ли е системата от функции?

а) $A = \{1, xy(x \oplus z)\}$;

б) $A = \{x \to y, x \oplus y\}$;

в) $A = \{0, \overline{x}, x(y \oplus z) \oplus yz\}$;

г) $A = \{x \to y, \overline{x} \to \overline{y}x, x \oplus y \oplus z, 1\}$;

д) $A = \{\overline{y} \to \overline{x}, \overline{x} \to \overline{y}x, x \oplus y \oplus z, 0\}$;

е) $A = \{\overline{y} \to \overline{x}z, (y \vee \overline{x} \to x, x \oplus y \oplus z, 1\}$;

ж) $A = \{x \oplus z \oplus 1, x \to \overline{y}, x \oplus (y \vee z) \oplus 1\}$;

з) $A = \{1, \overline{x}, x(y \leftrightarrow z) \oplus \overline{x}(y \oplus z), x \leftrightarrow y\}$;

и) $A = \{\overline{x}, x(y \leftrightarrow z) \leftrightarrow yz, x \oplus y \oplus z\}$;

к) $A = \{\overline{x}, x(y \leftrightarrow z) \leftrightarrow (y \vee z), x \oplus y \oplus z\}$;

л) $A = \{\chi_{f_1} = (0110), \chi_{f_2} = (11000011), \chi_{f_3} = (10010110)\}$;

м) $A = \{\chi_{f_1} = (11), \chi_{f_2} = (00), \chi_{f_3} = (00110101)\}$;

Решение.

	T_0	T_1	L	S	M
1	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$xy(x \oplus z)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

(а)

	T_0	T_1	L	S	M
$x \to y$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x \oplus y$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$

(б)

$\square$

Задача 115. Проверете пълно ли е множеството от булеви функции: Да

а) $A = (S \cap M) \cup (L \setminus M)$;

б) $A = ((L \cap M) \setminus T_1) \cup (S \cap T_1)$;

в) $A = (L \cap M) \cup (S \setminus T_0)$;

г) $A = (L \cap T_1) \cup (S \cap M)$;

д) $A = (M \setminus S) \cup (L \cap S)$;

е) $A = (M \setminus T_0) \cup (L \setminus S)$;

ж) $A = (M \setminus T_0) \cup (S \setminus L)$.

Решение. Във всяка една от задачите трябва да проверим дали $A \not\subseteq T_0$, $A \not\subseteq T_1$, $A \not\subseteq S$, $A \not\subseteq M$ и $A \not\subseteq L$.

а) Нека $A = (S \cap M) \cup (L \setminus M)$.

- Да разгледаме функцията $f(x) = x \oplus 1$. Лесно се съобразява, че $f \in L \setminus M$, откъдето следва, че $f \in A$. Обаче ние имаме, че $f \notin T_0, T_1, M$. Следователно, $A \not\subseteq T_0, T_1, M$.
- Да разгледаме $g(x,y) = x \oplus y \oplus 1$. За нея имаме, че $g \in A$, защото $g \in L \setminus M$ и освен това $g \notin S$.
- Остана да проверим, че $A \not\subseteq L$. Да разгледаме

  $$h(x,y,z) = xy \oplus yz \oplus xz.$$

  Тогава $h \in A$, защото $h \in S \cap M$. Ясно е, че $h \notin L$.

б) Нека $A = ((L \cap M) \setminus T_1) \cup (S \cap T_1)$.

- Ако една функция е монотонна, но не запазва 1-цата, то тогава със сигурност тази функция е константата 0, т.е.

  $$(L \cap M) \setminus T_1 = \{0\}.$$

- Ако $f \in S \cap T_1$, то това означава $f(1,\dots,1) = 1$ и $f(0,\dots,0) = 0$. Следователно, $S \cap T_1 \subseteq T_0$. Получаваме, че $A = \{0\} \cup (S \cap T_1) \subseteq T_0$.

Следователно A не е пълен клас.

в) Нека $A = (L \cap M) \cup (S \setminus T_0)$.

- $0 \in L \cap M$ и следователно $A \not\subseteq T_1$;
- $1 \in L \cap M$ и следователно $A \not\subseteq T_0$;
- И двете константи са в $L \cap M$, но както знаем, те не са самодвойнствени. Следователно $A \not\subseteq S$.
- Да разгледаме

  $$h(x,y,z) = xy \oplus xz \oplus yz \oplus 1.$$

  Лесно се съобразява, че $h \in S \setminus T_0$, но $h \notin L$. Следователно, $A \not\subseteq L$. Освен това, $h \notin M$. Следователно, $A \not\subseteq M$.

г) Нека $A = (L \cap T_1) \cup (S \cap M)$. Ако $f \in S \cap M$, то f не е константа и $f(1,\dots,1) = 1$. Следователно, $f \in T_1$. Получаваме, че $S \cap M \subseteq T_1$. Заключаваме, че $A \subseteq T_1$.

д) Нека $A = (M \setminus S) \cup (L \cap S)$.

- $x \oplus 1 \in L \cap S$, но $x \oplus 1 \notin T_0, T_1$. Следователно, $A \not\subseteq T_0, T_1$. Освен това, $x \oplus 1 \notin M$. И така, $A \not\subseteq M$.
- Нека $f(x,y) \equiv x \vee y \equiv xy \oplus x \oplus y \oplus 1$. Имаме, че $f \in M \setminus S$ и $f \notin L$. Следователно, $A \not\subseteq L$ и $A \not\subseteq S$.

е) Нека $A = (M \setminus T_0) \cup (L \setminus S)$. Имаме, че $M \setminus T_0 = \{1\}$. Следователно, $A \subseteq L$.

ж) Нека $A = (M \setminus T_0) \cup (S \setminus L)$.

- Имаме, че $1 \in M \setminus T_0$. Следователно, $A \nsubseteq T_0$ и $A \nsubseteq S$.
- Нека $h(x, y, z) \equiv xy \oplus xz \oplus yz \oplus 1$. Тогава $h \in S \setminus L$ и $h \notin T_1$, $h \notin M$. Заключаваме, че $A \nsubseteq T_1, M, L$.

$\square$

Задача 116. Проверете дали системата от функции A е базис?

а) $A = \{x \to y, x \oplus y, x \vee y\}$; Не

б) $A = \{x \oplus y \oplus z, x \vee y, 0, 1\}$; Да

в) $A = \{x \oplus y \oplus yz, x \oplus y \oplus 1\}$; Не, $A \subseteq T_1$

г) $A = \{xy \vee z, xy \oplus z, xy \leftrightarrow z\}$; Не

Задача 117. Намерете всички базиси на класа A, където:

а) $A = \{1, \overline{x}, xy(x \oplus y), x \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus zx\}$;

б) $A = \{0, x \oplus y, x \to y, xy \leftrightarrow xz\}$;

в) $A = \{0, 1, x \oplus y \oplus z, xy \oplus zx \oplus yz, xy \oplus z, x \vee y\}$;

г) $A = \{xy, x \vee y, xy \vee z, x \oplus y, x \to y\}$.

Задача 118. Намерете броя на булевите функции на n променливи, които принадлежат на следните класове:

а) T_0, T_1; 2^{2^n-1}

б) $T_0 \cap T_1$ 2^{2^n-2}

в) $T_0 \cup T_1$

г) $T_0 \setminus T_1$;

д) S; $2^{2^{n-1}}$

е) $T_0 \cap S$, $T_1 \cap S$;

ж) $T_0 \cap T_1 \cap S$;

з) $S \setminus T_0$, $S \setminus (T_0 \cap T_1)$, $S \setminus (T_0 \cup T_1)$;

и) L; 2^{n+1}

к) $T_0 \cap L$, $T_1 \cap L$;

л) $T_0 \cap T_1 \cap L$;

м) $M \setminus T_1$;

н) $M \setminus T_0$;

Библиография

[1] Raymond M. Smullyan, *Logical labyrinths*, A K Peters, 2009.

[2] Г. П. Гаврилов and А. А. Сапоженко, *Задачи и упражнения по дискретной математике*, Физматлит, 2005.

Азбучен указател