Какво е функционално програмиране?

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, спец. Информатика, 2016/17 г.

6 октомври 2016 г.

Императивен стил

Описваме последователно изчислителните стъпки.

Неструктурирано програмиране

1. Въведи a, b
2. Ако a = b, към 6.
3. Ако a > b, към 5.
4. b ← b − a; към 2.
5. a ← b − a; към 2.
6. Изведи a
7. Край

Структурирано програмиране

- Въведи a, b
- Докато a ≠ b
  - Ако a > b
    - a ← b − a
  - В противен случай
    - b ← b − a
- Изведи a

Декларативен стил

Описваме свойствата на желания резултат.

Програмиране с ограничения

- Дадени са `a` и `b`.
- Търсим `d`, такова че:
  - `1 ≤ d ≤ a,b`
  - “`d` е делител на `a`”
  - “`d` е делител на `b`”
  - `d` е възможно най-голямо,
  - където за дадени `x` и `y`:
    - “`x` е делител на `y`”, ако
    - намерим такова естествено число `k`, че
    - `1 ≤ k ≤ y`
    - `k * x = y`

Декларативен стил (2)

Описваме свойствата на желания резултат.

Логическо програмиране

- Описваме релацията над естествени числа $gcd(a, b, c)$
- $\forall a\, gcd(a, a, a)$ **[факт]**
- $\forall a \forall b (a > b \wedge \forall c (gcd(a - b, b, c) \rightarrow gcd(a, b, c)))$ **[правило 1]**
- $\forall a \forall b (a < b \wedge \forall c (gcd(a, b - a, c) \rightarrow gcd(a, b, c)))$ **[правило 2]**
- Дадени са a, b
- Намери такова c, за което $gcd(a, b, c)$

Пример: Нека $a = 8, b = 12$. Тогава:

$$\xrightarrow{\text{факт}} gcd(4, 4, 4) \xrightarrow{\text{правило 1}} gcd(8, 4, 4) \xrightarrow{\text{правило 2}} gcd(8, 12, \mathbf{4})$$

Декларативен стил (3)

Описваме свойствата на желания резултат.

Функционално програмиране

- Функцията над естествени числа $gcd(a, b)$ притежава следните свойства:
- $gcd(a, a) = a$ **(свойство 1)**
- $gcd(a - b, b) = gcd(a, b)$, ако $a > b$ **(свойство 2)**
- $gcd(a, b - a) = gcd(a, b)$, ако $b > a$ **(свойство 3)**
- Дадени са a, b
- Да се пресметне $gcd(a, b)$.

Декларативен стил (3)

Описваме свойствата на желания резултат.

Функционално програмиране

- Функцията над естествени числа $gcd(a, b)$ притежава следните свойства:
- $gcd(a, a) = a$ **(свойство 1)**
- $gcd(a - b, b) = gcd(a, b)$, ако $a > b$ **(свойство 2)**
- $gcd(a, b - a) = gcd(a, b)$, ако $b > a$ **(свойство 3)**
- Дадени са a, b
- Да се пресметне $gcd(a, b)$.

Пример: Нека $a = 8, b = 12$.

$gcd(8, 12) \overset{\text{свойство 3}}{=} gcd(8, 4) \overset{\text{свойство 2}}{=} gcd(4, 4) \overset{\text{свойство 1}}{=} 4$.

Още един пример

Да се намери сумата на квадратите на нечетните числа в списъка `l`.

Императивен стил

- Нека `s = 0`.
- За `i` от 1 до `length(l)`:
  - Ако `l[i]` е нечетно, то
    - `s = s + l[i]`^{2}.
- Изведи `s`.

Функционален стил

- От елементите на `l`:
- Избери нечетните
- Приложи над резултата функцията x^2
- Приложи над резултата операцията $+$.

Още един пример (2)

C++:

```
int s = 0;
for(int i = 0; i < sizeof(l); i++)
  if (l[i] % 2 != 0)
    s += l[i] * l[i];
cout << s;
```

Още един пример (2)

C++:

```
int s = 0;
for(int i = 0; i < sizeof(l); i++)
  if (l[i] % 2 != 0)
    s += l[i] * l[i];
cout << s;
```

Scheme: `(apply + (map square (filter odd? l)))`

Още един пример (2)

C++:

```
int s = 0;
for(int i = 0; i < sizeof(l); i++)
  if (l[i] % 2 != 0)
    s += l[i] * l[i];
cout << s;
```

Scheme: `(apply + (map square (filter odd? l)))`

Haskell: `foldr1 (+) [x * x | x <- l, odd x]`

Още един пример (2)

C++:

```
int s = 0;
for(int i = 0; i < sizeof(l); i++)
  if (l[i] % 2 != 0)
    s += l[i] * l[i];
cout << s;
```

Scheme: `(apply + (map square (filter odd? l)))`

Haskell: `foldr1 (+) [x * x | x <- l, odd x]`

Haskell: `sum . map (^2) . filter odd`

Какво може да се сметне с компютър?

Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е функция над естествени числа.
Примери: $f(x) = x^2$, $f(x) = x$-тото число на Фибоначи.

Какво може да се сметне с компютър?

Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е функция над естествени числа.
Примери: $f(x) = x^2$, $f(x) = x$-тото число на Фибоначи.

Въпрос 1: Какво означава да изчислим f с компютър?

Какво може да се сметне с компютър?

Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е функция над естествени числа.
Примери: $f(x) = x^2$, $f(x) = x$-тото число на Фибоначи.

Въпрос 1: Какво означава да изчислим f с компютър?

Въпрос 2: Какво означава "алгоритъм" или "програма"?

Какво може да се сметне с компютър?

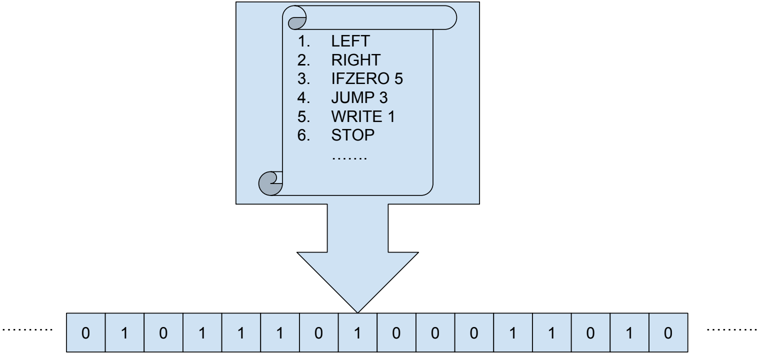
Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е функция над естествени числа.
Примери: $f(x) = x^2$, $f(x) = x$-тото число на Фибоначи.

Въпрос 1: Какво означава да изчислим f с компютър?

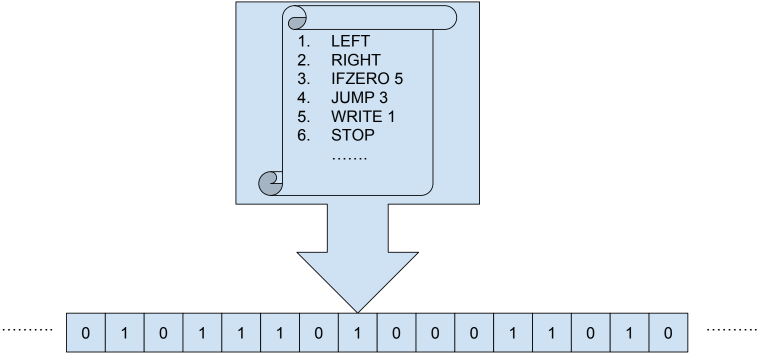
Въпрос 2: Какво означава "алгоритъм" или "програма"?

Въпрос 3: Има ли функции, които не могат да бъдат изчислени с компютър?

Машина на Turing

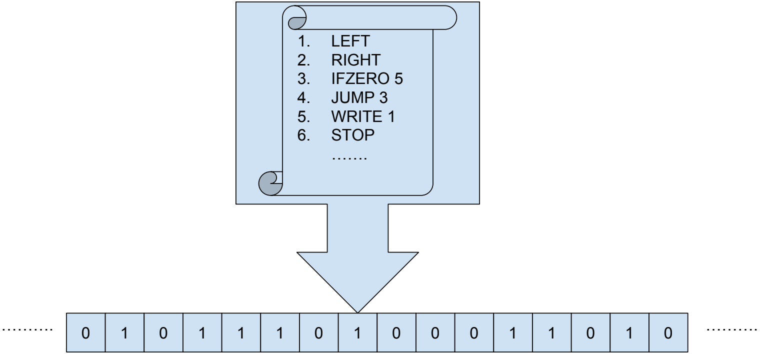


Машина на Turing



M **изчислява функцията** f_M, ако при лента с числото n машината M завършва и записва върху лентата числото $f_M(n)$.

Машина на Turing



M **изчислява функцията** f_M, ако при лента с числото n машината M завършва и записва върху лентата числото $f_M(n)$.
Ако M не завърши, казваме, че $f_M(n)$ **не е дефинирана**.

Има неизчислими функции!

- Всяка машина на Turing може да се кодира като дълго естествено число.

Има неизчислими функции!

- Всяка машина на Turing може да се кодира като дълго естествено число.
- Всяка изчислима функция се изчислява от (поне една) машина.

Има неизчислими функции!

- Всяка машина на Turing може да се кодира като дълго естествено число.
- Всяка изчислима функция се изчислява от (поне една) машина.
- Следователно, изчислимите функции са не повече от естествените числа (изброимо много).

Има неизчислими функции!

- Всяка машина на Turing може да се кодира като дълго естествено число.
- Всяка изчислима функция се изчислява от (поне една) машина.
- Следователно, изчислимите функции са не повече от естествените числа (изброимо много).
- Но функциите от вида $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ са колкото редиците от естествени числа ...

Има неизчислими функции!

- Всяка машина на Turing може да се кодира като дълго естествено число.
- Всяка изчислима функция се изчислява от (поне една) машина.
- Следователно, изчислимите функции са не повече от естествените числа (изброимо много).
- Но функциите от вида $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ са колкото редиците от естествени числа ...
- ... които са неизброимо много! (защо?).

Има неизчислими функции!

- Всяка машина на Turing може да се кодира като дълго естествено число.
- Всяка изчислима функция се изчислява от (поне една) машина.
- Следователно, изчислимите функции са не повече от естествените числа (изброимо много).
- Но функциите от вида $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ са колкото редиците от естествени числа ...
- ... които са неизброимо много! (защо?).
- Следователно, има неизброимо много неизчислими функции. $\square$

Има неизчислими функции!

- Всяка машина на Turing може да се кодира като дълго естествено число.
- Всяка изчислима функция се изчислява от (поне една) машина.
- Следователно, изчислимите функции са не повече от естествените числа (изброимо много).
- Но функциите от вида $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ са колкото редиците от естествени числа ...
- ... които са неизброимо много! (защо?).
- Следователно, има неизброимо много неизчислими функции. $\square$
- Но кои са те?

Стоп проблем

Нека с $\{n\}$ означаваме машината на Turing с код n.
Разглеждаме функцията:

$$halts(n) = \{n\} \text{ завършва над лента с числото } n.$$

Стоп проблем

Нека с $\{n\}$ означаваме машината на Turing с код n.
Разглеждаме функцията:

$$halts(n) = \{n\} \text{ завършва над лента с числото } n.$$

halts не е изчислима!

Стоп проблем

Нека с $\{n\}$ означаваме машината на Turing с код n.
Разглеждаме функцията:

$$halts(n) = \{n\} \text{ завършва над лента с числото } n.$$

halts не е изчислима!
Да допуснем, че *halts* се изчислява от машина на Turing H.
Дефинираме нова машина на Turing D:

1. (тук слагаме всички инструкции на H)

$k+1.$ `IFZERO` $k+3$

$k+2.$ `JUMP` $k+1$

$k+3.$ `STOP`

Нека $D = \{d\}$. Завършва ли D над d? □

Въпроси за изчислимост

Според вас изчислими ли са следните функции?

- $f_1(n) = n$ е просто число

Въпроси за изчислимост

Според вас изчислими ли са следните функции?

- $f_1(n) = n$ е просто число
- $f_2(n) = n$-тото поред просто число

Въпроси за изчислимост

Според вас изчислими ли са следните функции?

- $f_1(n) = n$ е просто число
- $f_2(n) = n$-тото поред просто число
- $f_3(n) = n$-тата цифра на числото π

Въпроси за изчислимост

Според вас изчислими ли са следните функции?

- $f_1(n) = n$ е просто число
- $f_2(n) = n$-тото поред просто число
- $f_3(n) = n$-тата цифра на числото π
- $f_4(n) =$ има n последователни седмици в числото π

Въпроси за изчислимост

Според вас изчислими ли са следните функции?

- $f_1(n) = n$ е просто число
- $f_2(n) = n$-тото поред просто число
- $f_3(n) = n$-тата цифра на числото π
- $f_4(n) =$ има n последователни седмици в числото π
- $f_5(n) = n$ е код на множество от матрици 3x3, които могат да се умножат в някакъв ред, така че да се получи O

Въпроси за изчислимост

Според вас изчислими ли са следните функции?

- $f_1(n) = n$ е просто число
- $f_2(n) = n$-тото поред просто число
- $f_3(n) = n$-тата цифра на числото π
- $f_4(n) =$ има n последователни седмици в числото π
- $f_5(n) = n$ е код на множество от матрици 3x3, които могат да се умножат в някакъв ред, така че да се получи O
- $f_6(n) = n$ е код на вярна съждителна формула

Въпроси за изчислимост

Според вас изчислими ли са следните функции?

- $f_1(n) = n$ е просто число
- $f_2(n) = n$-тото поред просто число
- $f_3(n) = n$-тата цифра на числото π
- $f_4(n) =$ има n последователни седмици в числото π
- $f_5(n) = n$ е код на множество от матрици 3x3, които могат да се умножат в някакъв ред, така че да се получи O
- $f_6(n) = n$ е код на вярна съждителна формула
- $f_7(n) = n$ е код на вярна предикатна формула

Въпроси за изчислимост

Според вас изчислими ли са следните функции?

- $f_1(n) = n$ е просто число
- $f_2(n) = n$-тото поред просто число
- $f_3(n) = n$-тата цифра на числото π
- $f_4(n) =$ има n последователни седмици в числото π
- $f_5(n) = n$ е код на множество от матрици 3x3, които могат да се умножат в някакъв ред, така че да се получи O
- $f_6(n) = n$ е код на вярна съждителна формула
- $f_7(n) = n$ е код на вярна предикатна формула
- $f_8(n) = m$, където $\{m\}$ пресмята f_8

Въпроси за изчислимост

Според вас изчислими ли са следните функции?

- $f_1(n) = n$ е просто число
- $f_2(n) = n$-тото поред просто число
- $f_3(n) = n$-тата цифра на числото π
- $f_4(n) =$ има n последователни седмици в числото π
- $f_5(n) = n$ е код на множество от матрици 3x3, които могат да се умножат в някакъв ред, така че да се получи O
- $f_6(n) = n$ е код на вярна съждителна формула
- $f_7(n) = n$ е код на вярна предикатна формула
- $f_8(n) = m$, където $\{m\}$ пресмята f_8
- $f_9(n) =$ машините $\{n\}$ и $\{2n\}$ изчисляват еднакви функции

λ-смятане

Нека разполагаме с изброимо много променливи $x, y, z, \ldots$

Три вида λ-изрази (E)

- x (променлива)
- $E_1(E_2)$ (апликация, прилагане на функция)
- $\lambda x\, E$ (абстракция, конструиране на функция)

λ-смятане

Нека разполагаме с изброимо много променливи $x, y, z, \ldots$

Три вида λ-изрази (E)

- x (променлива)
- $E_1(E_2)$ (апликация, прилагане на функция)
- $\lambda x\, E$ (абстракция, конструиране на функция)

Примери: $\lambda x\, x, \quad (\lambda x\, x)(z), \quad \lambda f\, \lambda x\, f(f(f(x)))$

λ-смятане

Нека разполагаме с изброимо много променливи $x, y, z, \ldots$

Три вида λ-изрази (E)

- x (променлива)
- $E_1(E_2)$ (апликация, прилагане на функция)
- $\lambda x\, E$ (абстракция, конструиране на функция)

Примери: $\lambda x\, x, \quad (\lambda x\, x)(z), \quad \lambda f\, \lambda x\, f(f(f(x)))$

Едно изчислително правило:

$$(\lambda x\, E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2].$$

Машини на Turing = λ-смятане

Теорема (Alan Turing, 1937)

Функциите, които могат да се изчислят с машина на Turing са точно тези, които могат да се напишат с λ-израз.

Машини на Turing $=$ λ-смятане

Теорема (Alan Turing, 1937)

Функциите, които могат да се изчислят с машина на Turing са точно тези, които могат да се напишат с λ-израз.

Машини на Turing	$=$	императивен стил за програмиране
λ-смятане	$=$	функционален стил за програмиране

Машини на Turing = λ-смятане

Теорема (Alan Turing, 1937)

Функциите, които могат да се изчислят с машина на Turing са точно тези, които могат да се напишат с λ-израз.

Машини на Turing	=	императивен стил за програмиране
λ-смятане	=	функционален стил за програмиране

Факт: Практически всички съвременни езици за програмиране са със същата изчислителна сила като на машините на Turing.

Машини на Turing = λ-смятане

Теорема (Alan Turing, 1937)

Функциите, които могат да се изчислят с машина на Turing са точно тези, които могат да се напишат с λ-израз.

Машини на Turing	=	императивен стил за програмиране
λ-смятане	=	функционален стил за програмиране

Факт: Практически всички съвременни езици за програмиране са със същата изчислителна сила като на машините на Turing.

Тезис на Church-Turing: Всяка функция, чието изчисление може да се автоматизира, може да бъде пресметната с машина на Turing.

Във функционалното програмиране...

... има:

- функции с параметри, (абстракция)

Във функционалното програмиране...

... има:

- функции с параметри, (абстракция)
- които могат да се прилагат над аргументи, (апликация)

Във функционалното програмиране...

... има:

- функции с параметри, (абстракция)
- които могат да се прилагат над аргументи, (апликация)
- които могат да са други функции (функции от висок ред)

Във функционалното програмиране...

... има:

- функции с параметри, (абстракция)
- които могат да се прилагат над аргументи, (апликация)
- които могат да са други функции (функции от висок ред)
- и могат да се дефинират чрез себе си, (рекурсия)

Във функционалното програмиране...

... има:

- функции с параметри, (абстракция)
- които могат да се прилагат над аргументи, (апликация)
- които могат да са други функции (функции от висок ред)
- и могат да се дефинират чрез себе си, (рекурсия)

... но няма:

Във функционалното програмиране...

... има:

- функции с параметри, (абстракция)
- които могат да се прилагат над аргументи, (апликация)
- които могат да са други функции (функции от висок ред)
- и могат да се дефинират чрез себе си, (рекурсия)

... но няма:

- памет

Във функционалното програмиране...

... има:

- функции с параметри, (абстракция)
- които могат да се прилагат над аргументи, (апликация)
- които могат да са други функции (функции от висок ред)
- и могат да се дефинират чрез себе си, (рекурсия)

... но няма:

- памет
- присвояване

Във функционалното програмиране...

... има:

- функции с параметри, (абстракция)
- които могат да се прилагат над аргументи, (апликация)
- които могат да са други функции (функции от висок ред)
- и могат да се дефинират чрез себе си, (рекурсия)

... но няма:

- памет
- присвояване
- цикли

Във функционалното програмиране...

... има:

- функции с параметри, (абстракция)
- които могат да се прилагат над аргументи, (апликация)
- които могат да са други функции (функции от висок ред)
- и могат да се дефинират чрез себе си, (рекурсия)

... но няма:

- памет
- присвояване
- цикли
- прескачане (goto, break, return)

Защо функционално програмиране?

- Кратки и ясни програми (изразителност)

Защо функционално програмиране?

- Кратки и ясни програми (изразителност)
- Лесна проверка за коректност

Защо функционално програмиране?

- Кратки и ясни програми (изразителност)
- Лесна проверка за коректност
- При еднакви входни данни връщат един и същ резултат (референциална прозрачност),

Защо функционално програмиране?

- Кратки и ясни програми (изразителност)
- Лесна проверка за коректност
- При еднакви входни данни връщат един и същ резултат (референциална прозрачност), което позволява...

Защо функционално програмиране?

- Кратки и ясни програми (изразителност)
- Лесна проверка за коректност
- При еднакви входни данни връщат един и същ резултат (референциална прозрачност), което позволява...
- Избягване на повторно пресмятане на резултати чрез запомняне (мемоизация)

Защо функционално програмиране?

- Кратки и ясни програми (изразителност)
- Лесна проверка за коректност
- При еднакви входни данни връщат един и същ резултат (референциална прозрачност), което позволява...
- Избягване на повторно пресмятане на резултати чрез запомняне (мемоизация)
- Премахване на части от програмата, които не участват в крайния резултат (мъртъв код)

Защо функционално програмиране?

- Кратки и ясни програми (изразителност)
- Лесна проверка за коректност
- При еднакви входни данни връщат един и същ резултат (референциална прозрачност), което позволява...
- Избягване на повторно пресмятане на резултати чрез запомняне (мемоизация)
- Премахване на части от програмата, които не участват в крайния резултат (мъртъв код)
- Пренареждане на програмата за по-ефективно изпълнение (стратегия за оценяване)

Защо функционално програмиране?

- Кратки и ясни програми (изразителност)
- Лесна проверка за коректност
- При еднакви входни данни връщат един и същ резултат (референциална прозрачност), което позволява...
- Избягване на повторно пресмятане на резултати чрез запомняне (мемоизация)
- Премахване на части от програмата, които не участват в крайния резултат (мъртъв код)
- Пренареждане на програмата за по-ефективно изпълнение (стратегия за оценяване)
- Паралелно изпълнение на независими части от програмата (паралелизация)

Видове функционални езици

- според типовата система
  - динамично типизирани (стойностите имат тип)
  - статично типизирани (променливите имат тип)
- според страничните ефекти
  - нечисти (със странични ефекти)
  - чисти (без странични ефекти)
- според стратегията за оценяване
  - стриктно (първо сметни, после предай)
  - мързеливо (първо предай, после смятай)

Видове функционални езици

- според типовата система
  - динамично типизирани (стойностите имат тип) [**Scheme**]
  - статично типизирани (променливите имат тип) [**Haskell**]
- според страничните ефекти
  - нечисти (със странични ефекти) [**Scheme**]
  - чисти (без странични ефекти) [**Haskell**]
- според стратегията за оценяване
  - стриктно (първо сметни, после предай) [**Scheme**]
  - мързеливо (първо предай, после смятай) [**Haskell**]

История на функционалното програмиране

(1936) Church и Rosser дефинират λ-смятането

История на функционалното програмиране

(1936) Church и Rosser дефинират λ-смятането
(1960) McCarthy създава първия функционален език LISP

История на функционалното програмиране

(1936) Church и Rosser дефинират λ-смятането
(1960) McCarthy създава първия функционален език LISP
(1975) Steele и Sussman създават **Scheme**, диалект на LISP

История на функционалното програмиране

(1936) Church и Rosser дефинират λ-смятането
(1960) McCarthy създава първия функционален език LISP
(1975) Steele и Sussman създават **Scheme**, диалект на LISP
(1977) Backus (авторът на FORTRAN) популяризира функционалния стил

История на функционалното програмиране

(1936) Church и Rosser дефинират λ-смятането
(1960) McCarthy създава първия функционален език LISP
(1975) Steele и Sussman създават **Scheme**, диалект на LISP
(1977) Backus (авторът на FORTRAN) популяризира функционалния стил
(1985) Turner създава Miranda, първият комерсиален чист функционален език

История на функционалното програмиране

(1936) Church и Rosser дефинират λ-смятането
(1960) McCarthy създава първия функционален език LISP
(1975) Steele и Sussman създават **Scheme**, диалект на LISP
(1977) Backus (авторът на FORTRAN) популяризира функционалния стил
(1985) Turner създава Miranda, първият комерсиален чист функционален език
(1990) Публикувана е първата версия на **Haskell**

История на функционалното програмиране

- (1936) Church и Rosser дефинират λ-смятането
- (1960) McCarthy създава първия функционален език LISP
- (1975) Steele и Sussman създават **Scheme**, диалект на LISP
- (1977) Backus (авторът на FORTRAN) популяризира функционалния стил
- (1985) Turner създава Miranda, първият комерсиален чист функционален език
- (1990) Публикувана е първата версия на **Haskell**
- (1998) Отваряне на кода на реализацията на Erlang

История на функционалното програмиране

(1936) Church и Rosser дефинират λ-смятането
(1960) McCarthy създава първия функционален език LISP
(1975) Steele и Sussman създават **Scheme**, диалект на LISP
(1977) Backus (авторът на FORTRAN) популяризира функционалния стил
(1985) Turner създава Miranda, първият комерсиален чист функционален език
(1990) Публикувана е първата версия на **Haskell**
(1998) Отваряне на кода на реализацията на Erlang
(1990–2000) Функционални елементи започват да се появяват в императивни езици: Python (1991), JavaScript (1995), Ruby (1995), ActionScript (1998)

История на функционалното програмиране

(1936) Church и Rosser дефинират λ-смятането
(1960) McCarthy създава първия функционален език LISP
(1975) Steele и Sussman създават **Scheme**, диалект на LISP
(1977) Backus (авторът на FORTRAN) популяризира функционалния стил
(1985) Turner създава Miranda, първият комерсиален чист функционален език
(1990) Публикувана е първата версия на **Haskell**
(1998) Отваряне на кода на реализацията на Erlang
(1990–2000) Функционални елементи започват да се появяват в императивни езици: Python (1991), JavaScript (1995), Ruby (1995), ActionScript (1998)
(2000–) Функционалният стил на програмиране превзема света: Scala (2003), F# (2005), C# (2007), Clojure (2007), C++11 (2011), Java 8 (2014)