Списъци

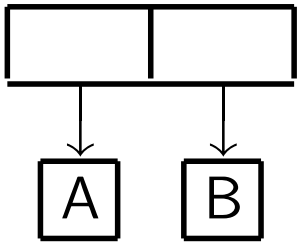
Трифон Трифонов

Функционално програмиране, спец. Информатика, 2016/17 г.

3 ноември 2016 г.

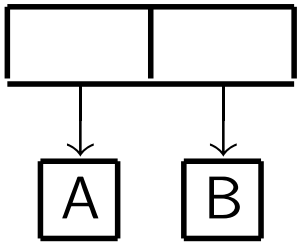
Точкови двойки

```
(A . B)
```



Точкови двойки

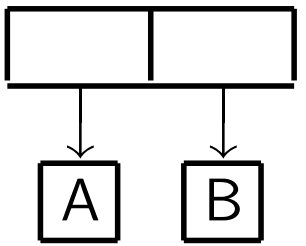
```
(A . B)
```



- `(cons` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`

Точкови двойки

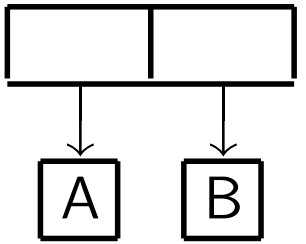
```
(A . B)
```



- (cons <израз$_1$> <израз$_2$>)
- Точкова двойка от оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$>

Точкови двойки

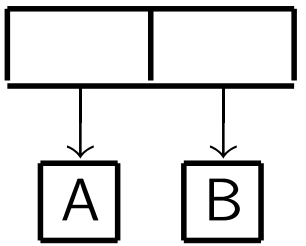
```
(A . B)
```



- `(cons` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`
- Точкова двойка от оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$>
- `(car` <израз>`)`

Точкови двойки

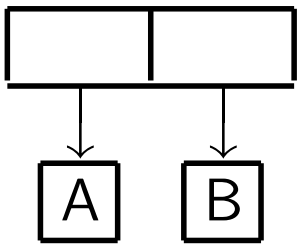
```
(A . B)
```



- `(cons` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`
- Точкова двойка от оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$>
- `(car` <израз>`)`
- **Първият** компонент на двойката, която е оценката на <израз>

Точкови двойки

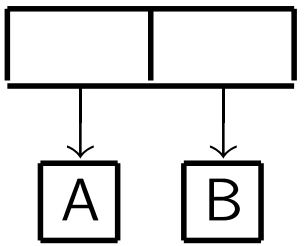
```
(A . B)
```



- `(cons` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`
- Точкова двойка от оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$>
- `(car` <израз>`)`
- **Първият** компонент на двойката, която е оценката на <израз>
- `(cdr` <израз>`)`

Точкови двойки

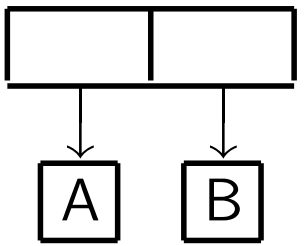
```
(A . B)
```



- `(cons` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`
- Точкова двойка от оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$>
- `(car` <израз>`)`
- **Първият** компонент на двойката, която е оценката на <израз>
- `(cdr` <израз>`)`
- **Вторият** компонент на двойката, която е оценката на <израз>

Точкови двойки

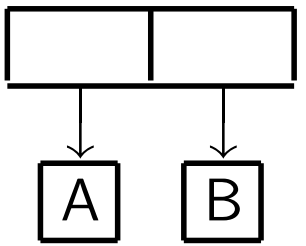
```
(A . B)
```



- `(cons` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`
- Точкова двойка от оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$>
- `(car` <израз>`)`
- **Първият** компонент на двойката, която е оценката на <израз>
- `(cdr` <израз>`)`
- **Вторият** компонент на двойката, която е оценката на <израз>
- `(pair?` <израз>`)`

Точкови двойки

```
(A . B)
```



- `(cons` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`
- Точкова двойка от оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$>
- `(car` <израз>`)`
- **Първият** компонент на двойката, която е оценката на <израз>
- `(cdr` <израз>`)`
- **Вторият** компонент на двойката, която е оценката на <израз>
- `(pair?` <израз>`)`
- Проверява дали оценката на <израз> е точкова двойка

Примери

```
(cons (cons 2 3) (cons 8 13))
```

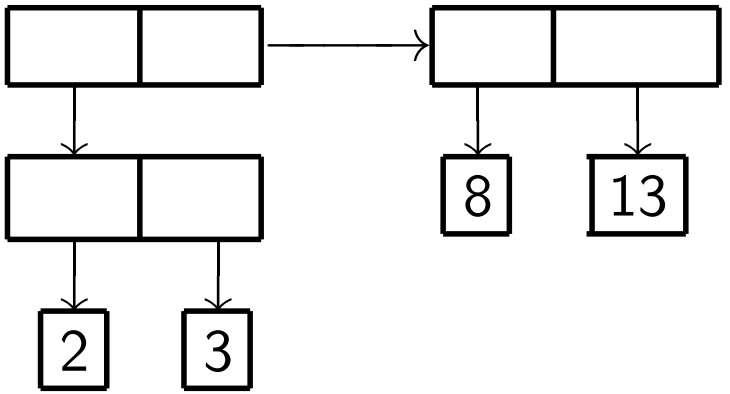
```
((2 . 3) . (8 . 13))
```

Примери

```
(cons (cons 2 3) (cons 8 13))
```

↓

```
((2 . 3) . (8 . 13))
```

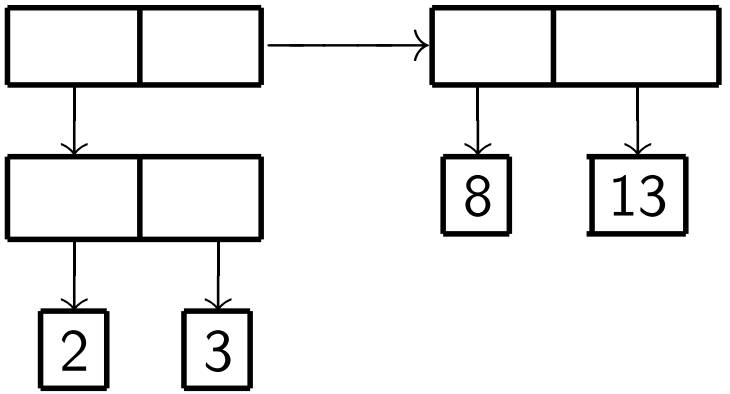


Примери

```
(cons (cons 2 3) (cons 8 13))
```

↓

```
((2 . 3) . (8 . 13))
```




```
(cons 3 (cons (cons 13 21) 8))
```

↓

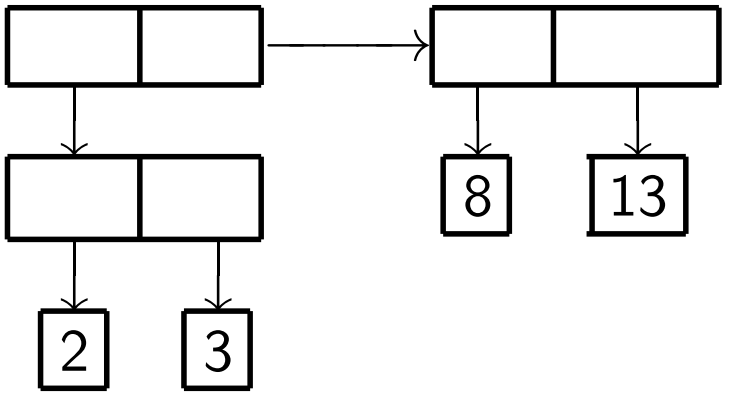
```
(3 . ((13 . 21) . 8))
```

Примери

```
(cons (cons 2 3) (cons 8 13))
```

↓

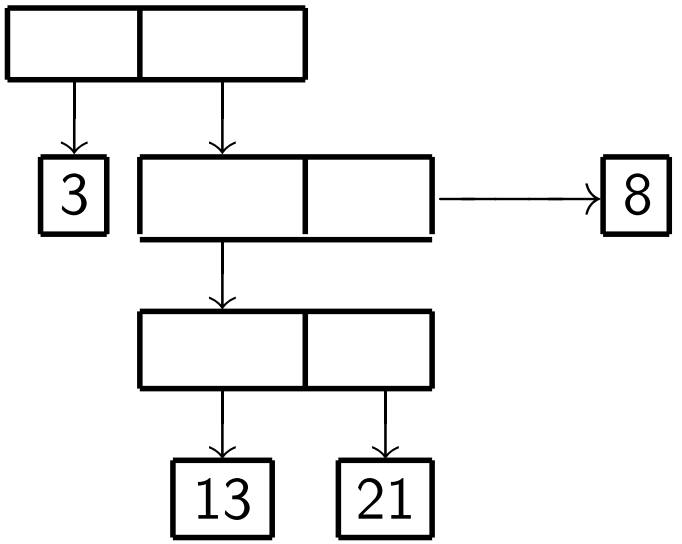
```
((2 . 3) . (8 . 13))
```



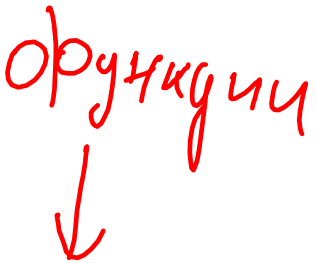

```
(cons 3 (cons (cons 13 21) 8))
```

↓

```
(3 . ((13 . 21) . 8))
```



S-изрази



Дефиниция

S-израз наричаме:

- атоми (булеви, числа, знаци, символи, низове, функции)
- точкови двойки $(S_1 \ . \ S_2)$, където S_1 и S_2 са S-изрази

S-изрази

Дефиниция

S-израз наричаме:

- атоми (булеви, числа, знаци, символи, низове, функции)
- точкови двойки $(S_1 \ . \ S_2)$, където S_1 и S_2 са S-изрази

S-изразите са най-общият тип данни в Scheme.

С тяхна помощ могат да се дефинират произволно сложни структури от данни.

All you need is λ — точкови двойки

Можем да симулираме `cons`, `car` и `cdr` чрез `lambda`!

All you need is λ — точкови двойки

Можем да симулираме `cons`, `car` и `cdr` чрез `lambda`!

Вариант №1:

```
(define (lcons x y) (lambda (p) (if p x y)))
(define (lcar z) (z #t))
(define (lcdr z) (z #f))
```

All you need is λ — точкови двойки

Можем да симулираме `cons`, `car` и `cdr` чрез `lambda`!

Вариант №1:

```
(define (lcons x y) (lambda (p) (if p x y)))
(define (lcar z) (z #t))
(define (lcdr z) (z #f))
```

Вариант №2:

```
(define (lcons x y) (lambda (p) (p x y)))
(define (lcar z) (z (lambda (x y) x)))
(define (lcdr z) (z (lambda (x y) y)))
```

Списъци в Scheme

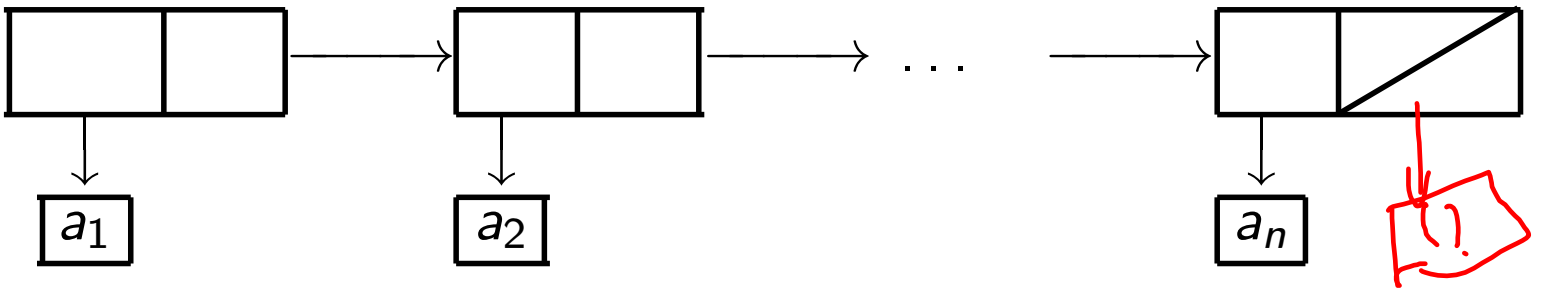
Дефиниция

1. Празният списък `()` е списък
2. `(h . t)` е списък ако `t` е списък
   - `h` — глава на списъка
   - `t` — опашка на списъка

Списъци в Scheme

Дефиниция

1. Празният списък `()` е списък
2. `(h . t)` е списък ако `t` е списък
   - `h` — глава на списъка
   - `t` — опашка на списъка



$$(a_1 \ . \ (a_2 \ . \ (\ \ldots (\ a_n \ . \ () \ ) \ ) \ ) \ ) \iff (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n)$$

Вградени функции за списъци

- `(null?` <израз>`)` — дали <израз> е празният списък `()`

Вградени функции за списъци

- `(null?` <израз>`)` — дали <израз> е празният списък `()`
- `(list?` <израз>`)` — дали <израз> е списък

Вградени функции за списъци

- `(null?` <израз>`)` — дали <израз> е празният списък `()`
- `(list?` <израз>`)` — дали <израз> е списък
  - `(define (list? l) (or (null? l) (and (pair? l) (list? (cdr l)))))`

Вградени функции за списъци

- `(null?` <израз>`)` — дали <израз> е празният списък `()`
- `(list?` <израз>`)` — дали <израз> е списък
  - `(define (list? l) (or (null? l) (and (pair? l) (list? (cdr l)))))`
- `(list` {<израз>}`)` — построява списък с елементи <израз>

Вградени функции за списъци

- `(null?` <израз>`)` — дали <израз> е празният списък `()`
- `(list?` <израз>`)` — дали <израз> е списък
  - `(define (list? l) (or (null? l) (and (pair? l) (list? (cdr l)))))`
- `(list` {<израз>}`)` — построява списък с елементи <израз>
- `(list` <израз$_1$> <израз$_2$> ... <израз$_n$>`)` $\Longleftrightarrow$
  `(cons` <израз$_1$> `(cons` <израз$_2$> ... `(cons` <израз$_n$> `'())))))`

Вградени функции за списъци

- `(null?` <израз>`)` — дали <израз> е празният списък `()`
- `(list?` <израз>`)` — дали <израз> е списък
  - `(define (list? l) (or (null? l) (and (pair? l) (list? (cdr l)))))`
- `(list` {<израз>}`)` — построява списък с елементи <израз>
- `(list` <израз$_1$> <израз$_2$> ... <израз$_n$>`)` $\Longleftrightarrow$
  `(cons` <израз$_1$> `(cons` <израз$_2$> ... `(cons` <израз$_n$> `'()))))`
- `(cons` <глава> <опашка>`)` — списък с <глава> и <опашка>

Вградени функции за списъци

- `(null?` <израз>`)` — дали <израз> е празният списък `()`
- `(list?` <израз>`)` — дали <израз> е списък
  - `(define (list? l) (or (null? l) (and (pair? l) (list? (cdr l)))))`
- `(list` {<израз>}`)` — построява списък с елементи <израз>
- `(list` <израз$_1$> <израз$_2$> ... <израз$_n$>`)` $\Longleftrightarrow$
  `(cons` <израз$_1$> `(cons` <израз$_2$> ... `(cons` <израз$_n$> `'())))))`
- `(cons` <глава> <опашка>`)` — списък с <глава> и <опашка>
- `(car` <списък>`)` — главата на <списък>

Вградени функции за списъци

- (null? <израз>) — дали <израз> е празният списък ()
- (list? <израз>) — дали <израз> е списък
  - (define (list? l) (or (null? l) (and (pair? l) (list? (cdr l)))))
- (list {<израз>}) — построява списък с елементи <израз>
- (list <израз$_1$> <израз$_2$> ... <израз$_n$>) $\Longleftrightarrow$
  (cons <израз$_1$> (cons <израз$_2$> ... (cons <израз$_n$> '()))))
- (cons <глава> <опашка>) — списък с <глава> и <опашка>
- (car <списък>) — главата на <списък>
- (cdr <списък>) — опашката на <списък>

Вградени функции за списъци

- (null? <израз>) — дали <израз> е празният списък ()
- (list? <израз>) — дали <израз> е списък
  - `(define (list? l) (or (null? l) (and (pair? l) (list? (cdr l)))))`
- (list {<израз>}) — построява списък с елементи <израз>
- (list <израз$_1$> <израз$_2$> ... <израз$_n$>) $\Longleftrightarrow$
  (cons <израз$_1$> (cons <израз$_2$> ... (cons <израз$_n$> '()))))
- (cons <глава> <опашка>) — списък с <глава> и <опашка>
- (car <списък>) — главата на <списък>
- (cdr <списък>) — опашката на <списък>
- () не е точкова двойка!

Вградени функции за списъци

- (null? <израз>) — дали <израз> е празният списък ()
- (list? <израз>) — дали <израз> е списък
  - `(define (list? l) (or (null? l) (and (pair? l) (list? (cdr l)))))`
- (list {<израз>}) — построява списък с елементи <израз>
- (list <израз$_1$> <израз$_2$> ... <израз$_n$>) $\Longleftrightarrow$
  (cons <израз$_1$> (cons <израз$_2$> ... (cons <израз$_n$> '()))))
- (cons <глава> <опашка>) — списък с <глава> и <опашка>
- (car <списък>) — главата на <списък>
- (cdr <списък>) — опашката на <списък>
- () не е точкова двойка!
- (car '()) $\longrightarrow$ Грешка!, (cdr '()) $\longrightarrow$ Грешка!

Съкратени форми на car и cdr

Нека $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$.

- `(car l)` $\longrightarrow a_1$

Съкратени форми на car и cdr

Нека $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$.

- `(car l)` $\longrightarrow a_1$
- `(cdr l)` $\longrightarrow (a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$

Съкратени форми на car и cdr

Нека $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$.

- `(car l)` $\longrightarrow a_1$
- `(cdr l)` $\longrightarrow (a_2\ a_3 \ldots a_n)$
- `(car (cdr l))` $\longrightarrow\ ?\ \longleftarrow$ `(cadr l)`

Съкратени форми на car и cdr

Нека $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$.

- `(car l)` $\longrightarrow a_1$
- `(cdr l)` $\longrightarrow (a_2\ a_3 \ldots a_n)$
- `(car (cdr l))` $\longrightarrow a_2 \longleftarrow$ `(cadr l)`

Съкратени форми на car и cdr

Нека $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$.

- `(car l)` $\longrightarrow a_1$
- `(cdr l)` $\longrightarrow (a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$
- `(car (cdr l))` $\longrightarrow a_2 \longleftarrow$ `(cadr l)`
- `(cdr (cdr l))` $\longrightarrow\ ? \longleftarrow$ `(cddr l)`

Съкратени форми на car и cdr

Нека $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$.

- `(car l)` $\longrightarrow a_1$
- `(cdr l)` $\longrightarrow (a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$
- `(car (cdr l))` $\longrightarrow a_2 \longleftarrow$ `(cadr l)`
- `(cdr (cdr l))` $\longrightarrow (a_3\ \ldots\ a_n) \longleftarrow$ `(cddr l)`

Съкратени форми на car и cdr

Нека $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$.

- `(car l)` $\longrightarrow a_1$
- `(cdr l)` $\longrightarrow (a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$
- `(car (cdr l))` $\longrightarrow a_2 \longleftarrow$ `(cadr l)`
- `(cdr (cdr l))` $\longrightarrow (a_3\ \ldots\ a_n) \longleftarrow$ `(cddr l)`
- `(car (cdr (cdr l)))` $\longrightarrow ? \longleftarrow$ `(caddr l)`

Съкратени форми на car и cdr

Нека $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$.

- `(car l)` $\longrightarrow a_1$
- `(cdr l)` $\longrightarrow (a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$
- `(car (cdr l))` $\longrightarrow a_2 \longleftarrow$ `(cadr l)`
- `(cdr (cdr l))` $\longrightarrow (a_3\ \ldots\ a_n) \longleftarrow$ `(cddr l)`
- `(car (cdr (cdr l)))` $\longrightarrow a_3 \longleftarrow$ `(caddr l)`

Съкратени форми на car и cdr

Нека $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$.

- `(car l)` $\longrightarrow a_1$
- `(cdr l)` $\longrightarrow (a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$
- `(car (cdr l))` $\longrightarrow a_2 \longleftarrow$ `(cadr l)`
- `(cdr (cdr l))` $\longrightarrow (a_3\ \ldots\ a_n) \longleftarrow$ `(cddr l)`
- `(car (cdr (cdr l)))` $\longrightarrow a_3 \longleftarrow$ `(caddr l)`
- имаме съкратени форми за до 4 последователни прилагания на `car` и `cdr`

Форми на равенство в Scheme

- `(eq?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта

Форми на равенство в Scheme

- `(eq?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта
- `(eqv?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта или са едни и същи по стойност **атоми** (дори и да заемат различно място в паметта)

Форми на равенство в Scheme

- `(eq?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта
- `(eqv?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта или са едни и същи по стойност **атоми** (дори и да заемат различно място в паметта)
  - Ако `(eq?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`,
    то със сигурност `(eqv?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`

Форми на равенство в Scheme

- `(eq?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта
- `(eqv?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта или са едни и същи по стойност **атоми** (дори и да заемат различно място в паметта)
  - Ако `(eq?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`,
    то със сигурност `(eqv?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`
- `(equal?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$> са едни и същи по стойност **атоми или точкови двойки**, чиито компоненти са равни в смисъла на `equal?`

Форми на равенство в Scheme

- `(eq?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта
- `(eqv?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта или са едни и същи по стойност **атоми** (дори и да заемат различно място в паметта)
  - Ако `(eq?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`,
    то със сигурност `(eqv?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`
- `(equal?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$> са едни и същи по стойност **атоми или точкови двойки**, чиито компоненти са равни в смисъла на `equal?`
  - В частност, `equal?` проверява за равенство на списъци

Форми на равенство в Scheme

- `(eq?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта
- `(eqv?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$> заемат едно и също място в паметта или са едни и същи по стойност **атоми** (дори и да заемат различно място в паметта)
  - Ако `(eq?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`, то със сигурност `(eqv?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`
- `(equal?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)` — връща `#t` точно тогава, когато оценките на <израз$_1$> и <израз$_2$> са едни и същи по стойност **атоми или точкови двойки**, чиито компоненти са равни в смисъла на `equal?`
  - В частност, `equal?` проверява за равенство на списъци
  - Ако `(eqv?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`, то със сигурност `(equal?` <израз$_1$> <израз$_2$>`)`

Вградени функции за списъци

- `(length` <списък>`)` — връща дължината на <списък>

Вградени функции за списъци

- `(length` <списък>`)` — връща дължината на <списък>
- `(append` {<списък>}`)` — конкатенира всички <списък>

Вградени функции за списъци

- `(length` <списък>`)` — връща дължината на <списък>
- `(append` {<списък>}`)` — конкатенира всички <списък>
- `(reverse` <списък>`)` — елементите на <списък> в обратен ред

Вградени функции за списъци

- `(length` <списък>`)` — връща дължината на <списък>
- `(append` {<списък>}`)` — конкатенира всички <списък>
- `(reverse` <списък>`)` — елементите на <списък> в обратен ред
- `(list-tail` <списък> n`)` — елементите на <списък> без първите n

Вградени функции за списъци

- (length <списък>) — връща дължината на <списък>
- (append {<списък>}) — конкатенира всички <списък>
- (reverse <списък>) — елементите на <списък> в обратен ред
- (list-tail <списък> n) — елементите на <списък> без първите n
- (list-ref <списък> n) — n-ти елемент на <списък> (от 0)

Вградени функции за списъци

- `(length` <списък>`)` — връща дължината на <списък>
- `(append` {<списък>}`)` — конкатенира всички <списък>
- `(reverse` <списък>`)` — елементите на <списък> в обратен ред
- `(list-tail` <списък> n`)` — елементите на <списък> без първите n
- `(list-ref` <списък> n`)` — n-ти елемент на <списък> (от 0)
- `(member` <елемент> <списък>`)` — проверява дали <елемент> се среща в <списък>

Вградени функции за списъци

- (length <списък>) — връща дължината на <списък>
- (append {<списък>}) — конкатенира всички <списък>
- (reverse <списък>) — елементите на <списък> в обратен ред
- (list-tail <списък> n) — елементите на <списък> без първите n
- (list-ref <списък> n) — n-ти елемент на <списък> (от 0)
- (member <елемент> <списък>) — проверява дали <елемент> се среща в <списък>
  - По-точно, връща <списък> от <елемент> нататък, ако го има

Вградени функции за списъци

- (length <списък>) — връща дължината на <списък>
- (append {<списък>}) — конкатенира всички <списък>
- (reverse <списък>) — елементите на <списък> в обратен ред
- (list-tail <списък> n) — елементите на <списък> без първите n
- (list-ref <списък> n) — n-ти елемент на <списък> (от 0)
- (member <елемент> <списък>) — проверява дали <елемент> се среща в <списък>
  - По-точно, връща <списък> от <елемент> нататък, ако го има
  - Връща #f, ако <елемент> го няма в <списък>

Вградени функции за списъци

- `(length` <списък>`)` — връща дължината на <списък>
- `(append` {<списък>}`)` — конкатенира всички <списък>
- `(reverse` <списък>`)` — елементите на <списък> в обратен ред
- `(list-tail` <списък> n`)` — елементите на <списък> без първите n
- `(list-ref` <списък> n`)` — n-ти елемент на <списък> (от 0)
- `(member` <елемент> <списък>`)` — проверява дали <елемент> се среща в <списък>
  - По-точно, връща <списък> от <елемент> нататък, ако го има
  - Връща `#f`, ако <елемент> го няма в <списък>
  - Сравнението на елементи става с `equal?`

Вградени функции за списъци

- (length <списък>) — връща дължината на <списък>
- (append {<списък>}) — конкатенира всички <списък>
- (reverse <списък>) — елементите на <списък> в обратен ред
- (list-tail <списък> n) — елементите на <списък> без първите n
- (list-ref <списък> n) — n-ти елемент на <списък> (от 0)
- (member <елемент> <списък>) — проверява дали <елемент> се среща в <списък>
  - По-точно, връща <списък> от <елемент> нататък, ако го има
  - Връща #f, ако <елемент> го няма в <списък>
  - Сравнението на елементи става с equal?
- (memqv <елемент> <списък>) — като member, но сравнява с eqv?

Вградени функции за списъци

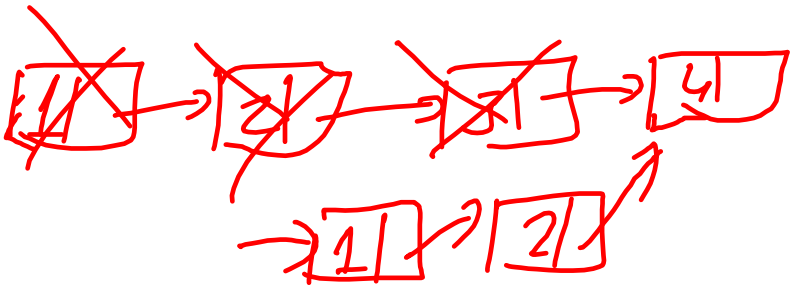
- (length <списък>) — връща дължината на <списък>
- (append {<списък>}) — конкатенира всички <списък>
- (reverse <списък>) — елементите на <списък> в обратен ред
- (list-tail <списък> n) — елементите на <списък> без първите n
- (list-ref <списък> n) — n-ти елемент на <списък> (от 0)
- (member <елемент> <списък>) — проверява дали <елемент> се среща в <списък>
  - По-точно, връща <списък> от <елемент> нататък, ако го има
  - Връща #f, ако <елемент> го няма в <списък>
  - Сравнението на елементи става с equal?
- (memqv <елемент> <списък>) — като member, но сравнява с eqv?
- (memq <елемент> <списък>) — като member, но сравнява с eq?

Обхождане на списъци

При обхождане на `l`:

- Ако `l` е празен, връщаме базова стойност **(дъно)**
- Иначе, комбинираме главата `(car l)` с резултата от рекурсивното извикване над опашката `(cdr l)` **(стъпка)**

Обхождане на списъци



При обхождане на `l`:

- Ако `l` е празен, връщаме базова стойност **(дъно)**
- Иначе, комбинираме главата `(car l)` с резултата от рекурсивното извикване над опашката `(cdr l)` **(стъпка)**

Примери: `length`, `list-tail`, `list-ref`, `member`, `memqv`, `memq`

Конструиране на списъци

Използваме рекурсия по даден параметър (напр. число, списък...)

- На дъното връщаме фиксиран списък (например `()`)
- На стъпката построяваме с `cons` списък със съответната глава, а опашката строим чрез рекурсивно извикване на същата функция

Конструиране на списъци

Използваме рекурсия по даден параметър (напр. число, списък...)

- На дъното връщаме фиксиран списък (например `()`)
- На стъпката построяваме с `cons` списък със съответната глава, а опашката строим чрез рекурсивно извикване на същата функция

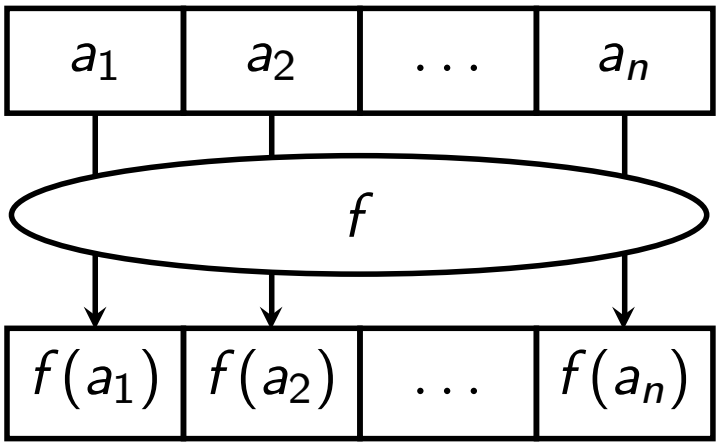
Примери: `from-to`, `collect`, `append`, `reverse`

Изобразяване на списък (map)

Да се дефинира функция (map <функция> <списък>), която връща нов списък съставен от елементите на <списък>, върху всеки от които е приложена <функция>.

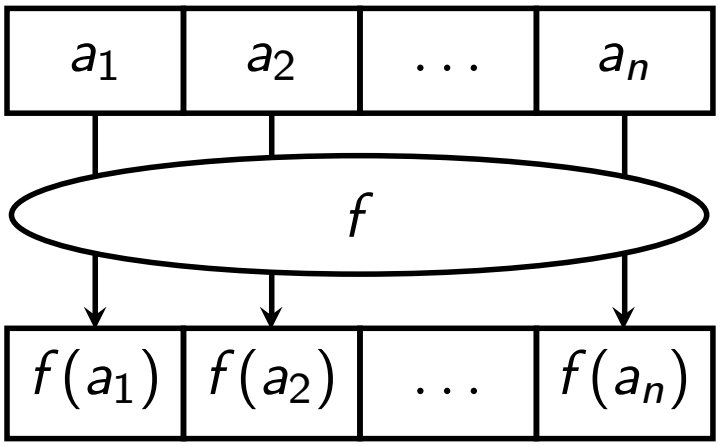
Изобразяване на списък (map)

Да се дефинира функция (map <функция> <списък>), която връща нов списък съставен от елементите на <списък>, върху всеки от които е приложена <функция>.



Изобразяване на списък (map)

Да се дефинира функция (map <функция> <списък>), която връща нов списък съставен от елементите на <списък>, върху всеки от които е приложена <функция>.




```
(define (map f l)
        (if (null? l) '()
            (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))))
```

Изобразяване на списък (map) — примери

```
(define (map f l)
        (if (null? l) '()
            (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))))
```

- `(map square '(1 2 3))` $\longrightarrow$?

Изобразяване на списък (map) — примери

```
(define (map f l)
        (if (null? l) '()
            (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))))
```

- `(map square '(1 2 3))` $\longrightarrow$ `(1 4 9)`

Изобразяване на списък (map) — примери

```
(define (map f l)
        (if (null? l) '()
            (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))))
```

- `(map square '(1 2 3))` $\longrightarrow$ `(1 4 9)`
- `(map cadr '((a b c) (d e f) (g h i)))` $\longrightarrow$?

Изобразяване на списък (map) — примери

```
(define (map f l)
        (if (null? l) '()
            (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))))
```

- `(map square '(1 2 3))` $\longrightarrow$ `(1 4 9)`
- `(map cadr '((a b c) (d e f) (g h i)))` $\longrightarrow$ `(b e h)`

Изобразяване на списък (map) — примери

```
(define (map f l)
        (if (null? l) '()
            (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))))
```

- `(map square '(1 2 3))` $\longrightarrow$ `(1 4 9)`
- `(map cadr '((a b c) (d e f) (g h i)))` $\longrightarrow$ `(b e h)`
- `(map (lambda (f) (f 2)) (list square 1+ odd?))` $\longrightarrow$?

Изобразяване на списък (map) — примери

```
(define (map f l)
        (if (null? l) '()
            (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))))
```

- `(map square '(1 2 3))` $\longrightarrow$ `(1 4 9)`
- `(map cadr '((a b c) (d e f) (g h i)))` $\longrightarrow$ `(b e h)`
- `(map (lambda (f) (f 2)) (list square 1+ odd?))` $\longrightarrow$ `(4 3 #f)`

Изобразяване на списък (map) — примери

```
(define (map f l)
        (if (null? l) '()
            (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))))
```

- `(map square '(1 2 3))` $\longrightarrow$ `(1 4 9)`
- `(map cadr '((a b c) (d e f) (g h i)))` $\longrightarrow$ `(b e h)`
- `(map (lambda (f) (f 2)) (list square 1+ odd?))` $\longrightarrow$ `(4 3 #f)`
- `(map (lambda (f) (f 2)) (map twice (list square 1+ boolean?)))` $\longrightarrow$?

Изобразяване на списък (map) — примери

```
(define (map f l)
        (if (null? l) '()
            (cons (f (car l)) (map f (cdr l)))))
```

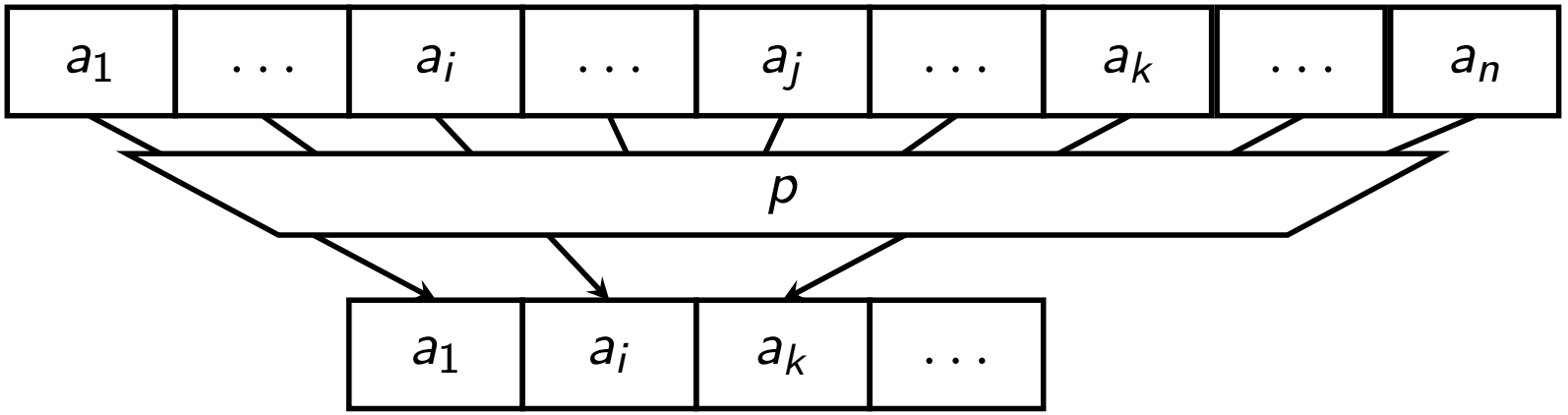
- `(map square '(1 2 3))` $\longrightarrow$ `(1 4 9)`
- `(map cadr '((a b c) (d e f) (g h i)))` $\longrightarrow$ `(b e h)`
- `(map (lambda (f) (f 2)) (list square 1+ odd?))` $\longrightarrow$ `(4 3 #f)`
- `(map (lambda (f) (f 2)) (map twice (list square 1+ boolean?)))` $\longrightarrow$ `(16 4 #t)`

Филтриране на списък (`filter`)

Да се дефинира функция `(filter` <условие> <списък>`)`, която връща само тези от елементите на <списък>, които удовлетворяват <условие>.

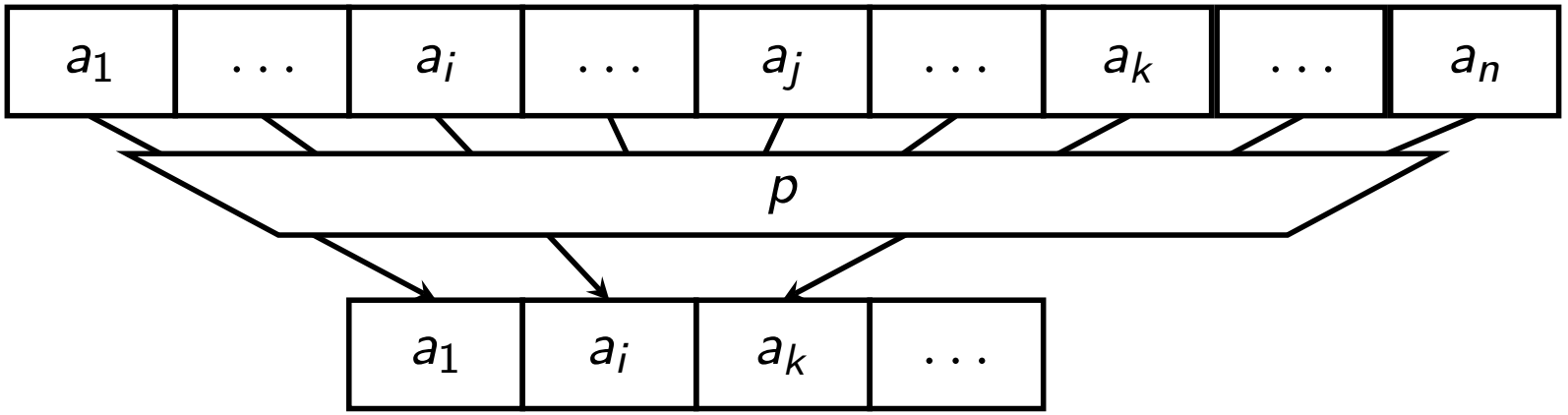
Филтриране на списък (`filter`)

Да се дефинира функция `(filter` <условие> <списък>`)`, която връща само тези от елементите на <списък>, които удовлетворяват <условие>.



Филтриране на списък (filter)

Да се дефинира функция (filter <условие> <списък>), която връща само тези от елементите на <списък>, които удовлетворяват <условие>.




```
(define (filter p? l)
   (cond ((null? l) l)
         ((p? (car l)) (cons (car l) (filter p? (cdr l))))
         (else (filter p? (cdr l)))))
```

Филтриране на списък (filter)

```
(define (filter p? l)
   (cond ((null? l) l)
         ((p? (car l)) (cons (car l) (filter p? (cdr l))))
         (else (filter p? (cdr l)))))
```

- (filter odd? '(1 2 3 4 5)) $\longrightarrow$?

Филтриране на списък (filter)

```
(define (filter p? l)
   (cond ((null? l) l)
         ((p? (car l)) (cons (car l) (filter p? (cdr l))))
         (else (filter p? (cdr l)))))
```

- `(filter odd? '(1 2 3 4 5))` $\longrightarrow$ `(1 3 5)`

Филтриране на списък (filter)

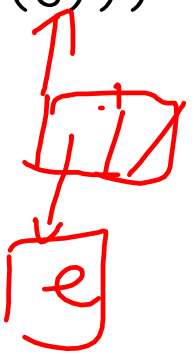
```
(define (filter p? l)
   (cond ((null? l) l)
         ((p? (car l)) (cons (car l) (filter p? (cdr l))))
         (else (filter p? (cdr l)))))
```

- (filter odd? '(1 2 3 4 5)) $\longrightarrow$ (1 3 5)
- (filter pair? '((a b) c () d (e))) $\longrightarrow$?

Филтриране на списък (filter)

```
(define (filter p? l)
   (cond ((null? l) l)
         ((p? (car l)) (cons (car l) (filter p? (cdr l))))
         (else (filter p? (cdr l)))))
```

- `(filter odd? '(1 2 3 4 5))` $\longrightarrow$ `(1 3 5)`
- `(filter pair? '((a b) c () d (e)))` $\longrightarrow$ `((a b) (e))`



Филтриране на списък (filter)

```
(define (filter p? l)
   (cond ((null? l) l)
         ((p? (car l)) (cons (car l) (filter p? (cdr l))))
         (else (filter p? (cdr l)))))
```

- `(filter odd? '(1 2 3 4 5))` $\longrightarrow$ `(1 3 5)`
- `(filter pair? '((a b) c () d (e)))` $\longrightarrow$ `((a b) (e))`
- `(map (lambda (x) (filter even? x)) '((1 2 3) (4 5 6) (7 8 9)))` $\longrightarrow$?

Филтриране на списък (filter)

```
(define (filter p? l)
   (cond ((null? l) l)
         ((p? (car l)) (cons (car l) (filter p? (cdr l))))
         (else (filter p? (cdr l)))))
```

- `(filter odd? '(1 2 3 4 5))` $\longrightarrow$ `(1 3 5)`
- `(filter pair? '((a b) c () d (e)))` $\longrightarrow$ `((a b) (e))`
- `(map (lambda (x) (filter even? x)) '((1 2 3) (4 5 6) (7 8 9)))` $\longrightarrow$ `((2) (4 6) (8))`

Филтриране на списък (filter)

```
(define (filter p? l)
   (cond ((null? l) l)
         ((p? (car l)) (cons (car l) (filter p? (cdr l))))
         (else (filter p? (cdr l)))))
```

- `(filter odd? '(1 2 3 4 5))` $\longrightarrow$ `(1 3 5)`
- `(filter pair? '((a b) c () d (e)))` $\longrightarrow$ `((a b) (e))`
- `(map (lambda (x) (filter even? x)) '((1 2 3) (4 5 6) (7 8 9)))` $\longrightarrow$ `((2) (4 6) (8))`
- `(map (lambda (x) (map (lambda (f) (filter f x)) (list negative? zero? positive?))) '((-2 1 0) (1 4 -1) (0 0 1)))` $\longrightarrow$?

Филтриране на списък (filter)

```
(define (filter p? l)
  (cond ((null? l) l)
        ((p? (car l)) (cons (car l) (filter p? (cdr l))))
        (else (filter p? (cdr l)))))
```

- `(filter odd? '(1 2 3 4 5))` $\longrightarrow$ `(1 3 5)`
- `(filter pair? '((a b) c () d (e)))` $\longrightarrow$ `((a b) (e))`
- `(map (lambda (x) (filter even? x)) '((1 2 3) (4 5 6) (7 8 9)))` $\longrightarrow$ `((2) (4 6) (8))`
- `(map (lambda (x) (map (lambda (f) (filter f x)) (list negative? zero? positive?))) '((-2 1 0) (1 4 -1) (0 0 1)))` $\longrightarrow$ `(((-2) (0) (1)) ((-1) () (1 4)) (() (0 0) (1)))`

Дясно свиване (`foldr`)

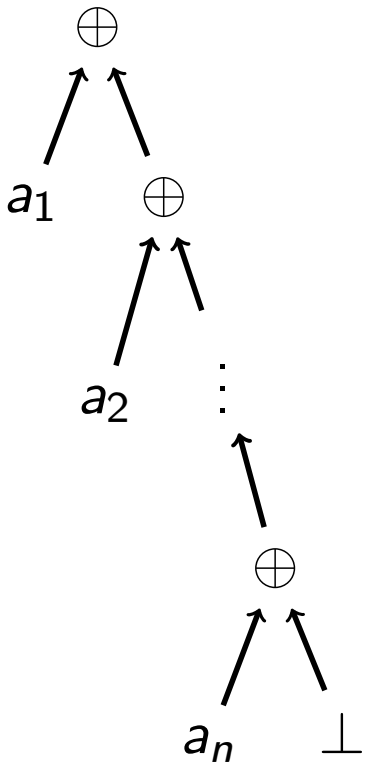
Да се дефинира функция, която по даден списък $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$ пресмята:

$$a_1 \oplus \Big(a_2 \oplus \big(\ldots \oplus (a_n \oplus \bot)\ldots\big)\Big),$$

Дясно свиване (`foldr`)

Да се дефинира функция, която по даден списък $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$ пресмята:

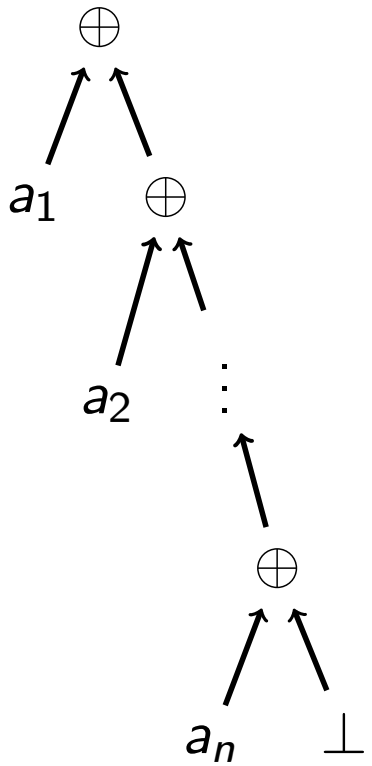
$$a_1 \oplus \Big(a_2 \oplus \big(\ldots \oplus (a_n \oplus \bot)\ldots\big)\Big),$$



Дясно свиване (foldr)

Да се дефинира функция, която по даден списък $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$ пресмята:

$$a_1 \oplus \Big(a_2 \oplus \big(\ldots \oplus (a_n \oplus \bot)\ldots\big)\Big),$$




```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

Дясно свиване (foldr) — примери

```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

- (foldr * 1 (from-to 1 5)) $\longrightarrow$?

Дясно свиване (foldr) — примери

```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

- (foldr * 1 (from-to 1 5)) $\longrightarrow$ 120

Дясно свиване (foldr) — примери

```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

- (foldr * 1 (from-to 1 5)) $\longrightarrow$ 120
- (foldr + 0 (map square (filter odd? (from-to 1 5)))) $\longrightarrow$?

Дясно свиване (foldr) — примери

```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

- (foldr * 1 (from-to 1 5)) $\longrightarrow$ 120
- (foldr + 0 (map square (filter odd? (from-to 1 5)))) $\longrightarrow$ 35

Дясно свиване (foldr) — примери

```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

- (foldr * 1 (from-to 1 5)) $\longrightarrow$ 120
- (foldr + 0 (map square (filter odd? (from-to 1 5)))) $\longrightarrow$ 35
- (foldr cons '() '(1 5 10)) $\longrightarrow$?

Дясно свиване (foldr) — примери

```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

- `(foldr * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldr + 0 (map square (filter odd? (from-to 1 5))))` $\longrightarrow$ `35`
- `(foldr cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(1 5 10)`

Дясно свиване (foldr) — примери

```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

- `(foldr * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldr + 0 (map square (filter odd? (from-to 1 5))))` $\longrightarrow$ `35`
- `(foldr cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(1 5 10)`
- `(foldr list '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `?`

Дясно свиване (foldr) — примери

```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

- (foldr * 1 (from-to 1 5)) $\longrightarrow$ 120
- (foldr + 0 (map square (filter odd? (from-to 1 5)))) $\longrightarrow$ 35
- (foldr cons '() '(1 5 10)) $\longrightarrow$ (1 5 10)
- (foldr list '() '(1 5 10)) $\longrightarrow$ (1 (5 (10 ())))

Дясно свиване (foldr) — примери

```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

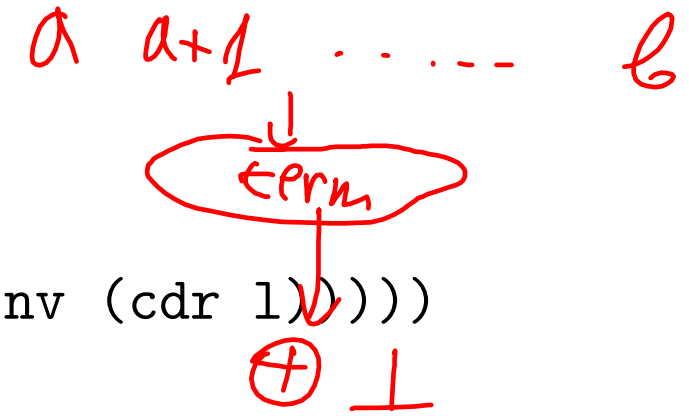
- (foldr * 1 (from-to 1 5)) $\longrightarrow$ 120
- (foldr + 0 (map square (filter odd? (from-to 1 5)))) $\longrightarrow$ 35
- (foldr cons '() '(1 5 10)) $\longrightarrow$ (1 5 10)
- (foldr list '() '(1 5 10)) $\longrightarrow$ (1 (5 (10 ())))
- (foldr append '() '((a b) (c d) (e f))) $\longrightarrow$?

Дясно свиване (foldr) — примери

```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

- (foldr * 1 (from-to 1 5)) $\longrightarrow$ 120
- (foldr + 0 (map square (filter odd? (from-to 1 5)))) $\longrightarrow$ 35
- (foldr cons '() '(1 5 10)) $\longrightarrow$ (1 5 10)
- (foldr list '() '(1 5 10)) $\longrightarrow$ (1 (5 (10 ())))
- (foldr append '() '((a b) (c d) (e f))) $\longrightarrow$ (a b c d e f)

Дясно свиване (foldr) — примери




```
(define (foldr op nv l)
        (if (null? l) nv
            (op (car l) (foldr op nv (cdr l)))))
```

- `(foldr * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldr + 0 (map square (filter odd? (from-to 1 5))))` $\longrightarrow$ `35`
- `(foldr cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(1 5 10)`
- `(foldr list '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(1 (5 (10 ())))`
- `(foldr append '() '((a b) (c d) (e f)))` $\longrightarrow$ `(a b c d e f)`
- `map`, `filter` и `accumulate` могат да се реализират чрез `foldr`

Ляво свиване (`foldl`)

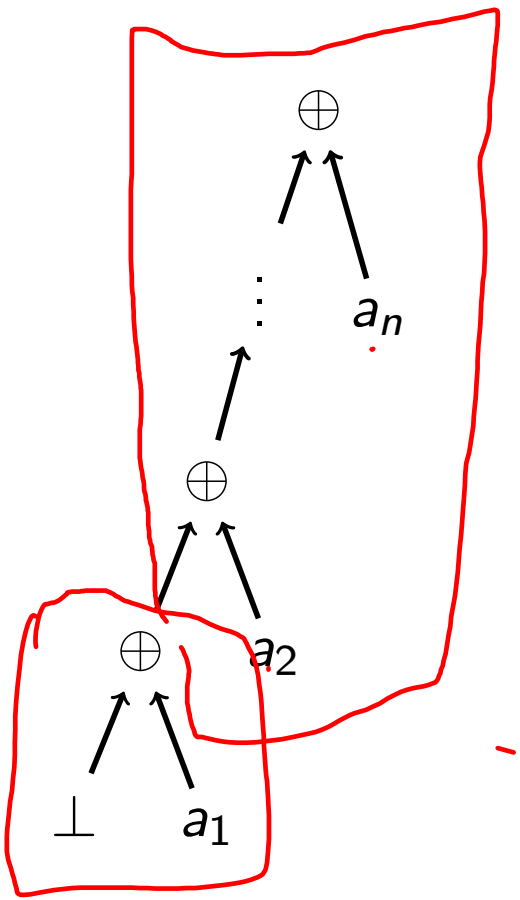
Да се дефинира функция, която по даден списък $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$ пресмята:

$$\Big(\ldots((\bot \oplus a_1) \oplus a_2) \oplus \ldots\Big) \oplus a_n$$

Ляво свиване (`foldl`)

Да се дефинира функция, която по даден списък $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$ пресмята:

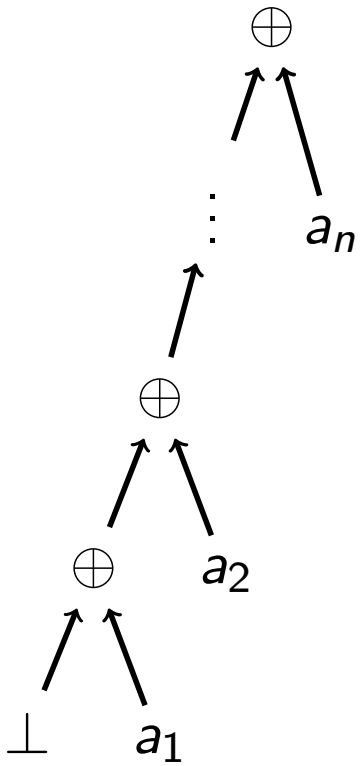
$$\Big(\ldots\big((\bot \oplus a_1) \oplus a_2\big) \oplus \ldots\Big) \oplus a_n$$



Ляво свиване (`foldl`)

Да се дефинира функция, която по даден списък $l = (a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n)$ пресмята:

$$\Big(\ldots\big(\big(\bot \oplus a_1\big) \oplus a_2\big) \oplus \ldots\Big) \oplus a_n$$




```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$?

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldl cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$?

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldl cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((((() . 1) . 5) . 10)`

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldl cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((((() . 1) . 5) . 10)`
- `(foldl ?'() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(10 5 1)`

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldl cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((() . 1) . 5) . 10)`
- `(foldl (lambda (x y) (cons y x))'() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(10 5 1)`

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldl cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((() . 1) . 5) . 10)`
- `(foldl (lambda (x y) (cons y x))'() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(10 5 1)`
- `(foldl list '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$?

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldl cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((() . 1) . 5) . 10)`
- `(foldl (lambda (x y) (cons y x))'() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(10 5 1)`
- `(foldl list '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((() 1) 5) 10)`

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldl cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((() . 1) . 5) . 10)`
- `(foldl (lambda (x y) (cons y x))'() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(10 5 1)`
- `(foldl list '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((() 1) 5) 10)`
- `(foldl append '() '((a b) (c d) (e f)))` $\longrightarrow$?

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldl cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((() . 1) . 5) . 10)`
- `(foldl (lambda (x y) (cons y x))'() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(10 5 1)`
- `(foldl list '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((() 1) 5) 10)`
- `(foldl append '() '((a b) (c d) (e f)))` $\longrightarrow$ `(a b c d e f)`

Ляво свиване (foldl) — примери

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l)) (cdr l))))
```

- `(foldl * 1 (from-to 1 5))` $\longrightarrow$ `120`
- `(foldl cons '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((() . 1) . 5) . 10)`
- `(foldl (lambda (x y) (cons y x))'() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `(10 5 1)`
- `(foldl list '() '(1 5 10))` $\longrightarrow$ `((() 1) 5) 10)`
- `(foldl append '() '((a b) (c d) (e f)))` $\longrightarrow$ `(a b c d e f)`
- `foldr` генерира линеен рекурсивен процес, а `foldl` — линеен итеративен

Функции от по-висок ред в Racket

В R^5RS е дефинирана само функцията `map`.

В Racket са дефинирани функциите `map`, `filter`, `foldr`, `foldl`

Функции от по-висок ред в Racket

В R^{5}RS е дефинирана само функцията `map`.
В Racket са дефинирани функциите `map`, `filter`, `foldr`, `foldl`

Внимание: `foldl` в Racket е дефинирана по-различен начин!

`foldl` от лекции

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op nv (car l))
             (cdr l))))
```

$$\Big(\ldots\big((\bot \oplus a_1) \oplus a_2\big) \oplus \ldots\Big) \oplus a_n$$

`foldl` в Racket

```
(define (foldl op nv l)
  (if (null? l) nv
      (foldl op (op (car l) nv)
             (cdr l))))
```

$$a_n \oplus \Big(\ldots\big(a_2 \oplus (a_1 \oplus \bot)\big)\ldots\Big),$$

Свиване на непразен списък (`foldr1`, `foldl1`)

Задача. Да се намери максималният елемент на списък.

Свиване на непразен списък (`foldr1`, `foldl1`)

Задача. Да се намери максималният елемент на списък.

```
(define (maximum l) (foldr max ? l))
```

Свиване на непразен списък (`foldr1`, `foldl1`)

Задача. Да се намери максималният елемент на списък.

```
(define (maximum l) (foldr max (car l) l))
```

Свиване на непразен списък (`foldr1`, `foldl1`)

Задача. Да се намери максималният елемент на списък.

```
(define (maximum l) (foldr max (car l) l))
```

Можем ли да пропуснем нулевата стойност за непразен списък?

Свиване на непразен списък (`foldr1`, `foldl1`)

Задача. Да се намери максималният елемент на списък.

```
(define (maximum l) (foldr max (car l) l))
```

Можем ли да пропуснем нулевата стойност за непразен списък?

$$a_1 \oplus \left(\ldots \oplus \left(a_{n-1} \oplus a_n \right) \ldots \right)$$

Свиване на непразен списък (foldr1, foldl1)

Задача. Да се намери максималният елемент на списък.

```
(define (maximum l) (foldr max (car l) l))
```

Можем ли да пропуснем нулевата стойност за непразен списък?

$$a_1 \oplus \left(\ldots \oplus \left(a_{n-1} \oplus a_n \right) \ldots \right)$$

```
(define (foldr1 op l)
  (if (null? (cdr l)) (car l)
      (op (car l)
          (foldr1 op (cdr l)))))
```

Свиване на непразен списък (`foldr1`, `foldl1`)

Задача. Да се намери максималният елемент на списък.

```
(define (maximum l) (foldr max (car l) l))
```

Можем ли да пропуснем нулевата стойност за непразен списък?

$$a_1 \oplus \left(\ldots \oplus \left(a_{n-1} \oplus a_n \right) \ldots \right)$$

```
(define (foldr1 op l)
  (if (null? (cdr l)) (car l)
      (op (car l)
          (foldr1 op (cdr l)))))
```

$$\left(\ldots \left(\left(a_1 \oplus a_2 \right) \oplus \ldots \right) \oplus a_n \right)$$

Свиване на непразен списък (foldr1, foldl1)

Задача. Да се намери максималният елемент на списък.

```
(define (maximum l) (foldr max (car l) l))
```

Можем ли да пропуснем нулевата стойност за непразен списък?

$$a_1 \oplus \left(\ldots \oplus \left(a_{n-1} \oplus a_n \right) \ldots \right)$$

```
(define (foldr1 op l)
  (if (null? (cdr l)) (car l)
      (op (car l)
          (foldr1 op (cdr l)))))
```

$$\left(\ldots \left(\left(a_1 \oplus a_2 \right) \oplus \ldots \right) \oplus a_n \right)$$

```
(define (foldl1 op l)
  (foldl op (car l) (cdr l)))
```