Домашно № 1 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2016/2017 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*10*	*10*	*10*	*10*	*40*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Преценете дали е вярно следното твърдение:

$$\Big(\forall A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\varnothing\}\Big)\Big(\exists\, x \in A\Big)\Big(x \text{ е четно} \rightarrow (\forall y \in A)\,(\,y \text{ е четно}\,)\Big).$$

Задача 2. Едно семейство от множества се нарича верига относно релацията включване, ако за всеки две различни множества A и B от семейството е в сила включването $A \subset B$ или $B \subset A$.

Постройте неизброима верига от подмножества на $\mathbb{N}$.

Упътване: Използвайте множеството $\mathbb{Q}$ като посредник. Както е известно, $\mathbb{Q}$ притежава две противоположни свойства:

— $\mathbb{Q}$ е изброимо, следователно е равномощно на $\mathbb{N}$ (в този смисъл $\mathbb{Q}$ е "малко" множество);

— $\mathbb{Q}$ е гъсто в $\mathbb{R}$, т.е. между всеки две различни реални числа има поне едно рационално число (в този смисъл $\mathbb{Q}$ е "голямо" множество).

Задача 3. Разглеждаме функциите $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

а) Покажете с пример, че $f \cup g$ може да не е функция. **(3 точки)**

б) Докажете, че $h = f \cap g$ е функция.
Какво представлява дефиниционното множество на функцията h? На колко е равно $h(x)$?
Отговорете на горните два въпроса най-напред в общия случай, а после — в частния случай $f(x) = x^3$ и $g(x) = |x|^3$. Направете чертеж. **(7 точки)**

Задача 4. Нека A е множество от селища, а R е двучленна релация над A, дефинирана по следния начин: $xRy \iff$ от селището x до селището y може да се стигне по суша.

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност. **(4 точки)**

б) Нека множеството A се състои от следните гръцки селища: Антипата, Аргостоли, Гувия, Закинт, Катастари, Кери, Керкира, Лефкими, Лиападес, Ликсури, Периволи, Сами, Скала.
Опишете класовете на еквивалентност чрез явно изброяване **(3 точки)**
и им дайте географско тълкуване. **(3 точки)**

Упътване: Използвайте картата на Йонийско море (вж. следващата страница).

КАРТА НА ЙОНИЙСКИТЕ ОСТРОВИ
R. Botev, August 7, 2007
АЛБАНИЯ
ЙОНИЙСКО МОРЕ
906
пр. Керкира
зал. Гувия
Гувия
Керкира
зал. Сагиада
Филиатес
Тиамис
Мецово
Перистер 2295
Янина
Капцас
1816 Томарос
Сули 1658
Атаманон 2459
н. Лефкими
Игуменица
Периволи
о. Керкира (Корфу)
Лефкими
н. Аспрокавос
Парамития
Маргарити
Парга
Гайос
о. Пакси
о. Антипакси
Арахтос
Лурос
Арта
Превеза
зал. Амвракия
пр. Лефкас
Воница
Лефкас
Стерна 507
Акарнаника
Амфилохия
Дримонас
1589
Елати 1158
о. Меганиси
о. Лефкас
о. Каламос
Василики
н. Дукато
о. Кастос
Антипата
о. Атокос
зал. Миртос
зал. Молос
Итака
н. Атерас
о. Итака
Ахелос
993
Сами
Ликсури
о. Кефалония
Аргостоли
н. Акротис
Аянос 1628
зал. Лудра
Скала
н. Мунта
п-в ПЕЛОПОНЕС
Килини
н. Скинари
Катастари
Закинт
758
о. Закинт
н. Гераки
зал. Лаганас
Кери

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Твърдението $\Big(\forall A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\varnothing\}\Big)\Big(\exists x \in A\Big)\Big(x$ е четно $\rightarrow (\forall y \in A)\,(\,y$ е четно $)\Big)$ е вярно. Действително, нека A е произволно непразно множество от естествени числа. Има два случая.

Първи случай: A съдържа само четни числа. Избираме за x произволно число от A (можем да направим това, понеже множеството A е непразно). Импликацията

$$x \text{ е четно} \rightarrow (\forall y \in A)\,(\,y \text{ е четно}\,)$$

е истина, защото консеквентът е истина: всички числа от множеството A са четни.

Втори случай: A съдържа поне едно нечетно число. Избираме за x някое нечетно число от A. Импликацията

$$x \text{ е четно} \rightarrow (\forall y \in A)\,(\,y \text{ е четно}\,)$$

е истина, защото антецедентът е неистина: x е нечетно, понеже така го избрахме.

И тъй, във всички случаи съществува подходящо $x \in A$. Този извод важи за произволно непразно множество A от естествени числа, а точно това гласи твърдението, което доказваме; следователно то е вярно.

Задача 2. Решението се състои от две стъпки: първо доказваме, че $\mathbb{N}$ може да се замени с $\mathbb{Q}$ в условието на задачата, после решаваме новата задача (за $\mathbb{Q}$ вместо за $\mathbb{N}$).

Както е известно, $\mathbb{Q}$ е изброимо, тоест $\mathbb{Q}$ е равномощно на $\mathbb{N}$. С други думи, съществува биекция $n \leftrightarrow q_n$ между $\mathbb{N} = \Big\{0\,;1\,;2\,\ldots\Big\}$ и $\mathbb{Q} = \Big\{q_0\,;q_1\,;q_2\,\ldots\Big\}$. Тя поражда биекция f между $2^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{Q}}$, а именно: $f(A) = \Big\{q_n :\ n \in A\Big\} \in 2^{\mathbb{Q}},\ \forall A \in 2^{\mathbb{N}}$. Например $f(\varnothing) = \varnothing$, $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$, $f\left(\Big\{23\,;\,66\,;\,887\Big\}\right) = \Big\{q_{23}\,;\,q_{66}\,;\,q_{887}\Big\}$. Биекцията f запазва релациите включване и строго включване, т.е. $A \subseteq B \iff f(A) \subseteq f(B)$, $A \subset B \iff f(A) \subset f(B)$. Затова f^{-1} преобразува верига от подмножества на $\mathbb{Q}$ във верига от подмножества на $\mathbb{N}$, например веригата

$$\Big\{q_4\,;\,q_7\Big\} \subset \Big\{q_4\,;\,q_7\,;\,q_{23}\Big\} \subset \Big\{q_4\,;\,q_7\,;\,q_{23}\,;\,q_{17}\,;\,q_8\Big\}$$

под действието на f^{-1} се преобразува във веригата

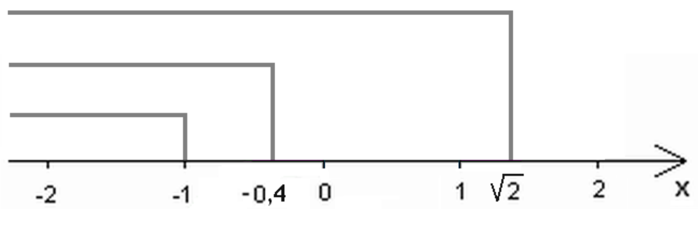
$$\Big\{4\,;\,7\Big\} \subset \Big\{4\,;\,7\,;\,23\Big\} \subset \Big\{4\,;\,7\,;\,23\,;\,17\,;\,8\Big\}.$$

Понеже f^{-1} е биекция, f^{-1} запазва броя на множествата във веригата, тоест преобразува неизброима верига в неизброима верига. Затова е достатъчно да построим неизброима верига от подмножества на $\mathbb{Q}$ (вместо на $\mathbb{N}$).

За целта на всяко реално число x съпоставяме $B_x = \mathbb{Q} \cap \big(-\infty\,;x\big]$, т.е. множеството от рационалните числа, ненадвишаващи x. Съвкупността от тези множества $\Big\{B_x :\ x \in \mathbb{R}\Big\}$ е верига, защото, ако $x \leq y$, то $B_x \subseteq B_y$, т.е. всеки две множества са сравними относно включването. Нещо повече, ако $x < y$, то $B_x \subset B_y$, защото $\mathbb{Q}$ е гъсто в $\mathbb{R}$, поради което между x и y има поне едно рационално число (то принадлежи на B_y, но не и на B_x). Веригата изглежда така:

$\ldots \subset B_{-1} \subset \ldots \subset B_{-0{,}4} \subset \ldots \subset B_{\sqrt{2}} \subset \ldots$

Веригата е безкрайна в двете посоки и между всеки две множества има безброй други. На различни $x \in \mathbb{R}$ съответстват различни B_x, следователно веригата е равномощна на $\mathbb{R}$, значи е неизброима.



Понеже f е биекция, запазваща релацията включване, то съвкупността $\Big\{f^{-1}(B_x) :\ x \in \mathbb{R}\Big\}$ е неизброима верига от подмножества на $\mathbb{N}$.

Задача 3.

а) Нека $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$. Тогава $f(10) = 10^2 = 100$ и $g(10) = 10^3 = 1000$. С други думи, $(10\,;\,100) \in f$ и $(10\,;\,1000) \in g$. Значи $(10\,;100)$ и $(10\,;1000)$ принадлежат на обединението $f \cup g$, поради което то не може да бъде функция: на една и съща стойност на аргумента (10) не може да съответстват две функционални стойности (100 и 1000).

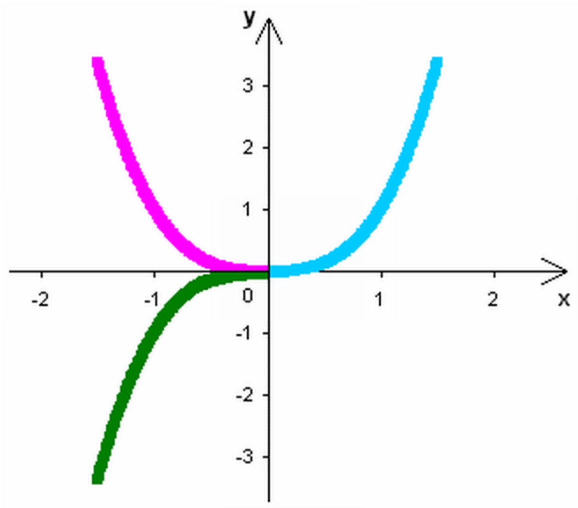
б) Нека $h = f \cap g$. Да допуснем, че h не е функция, т.е. h не е еднозначно определена. Тогава съществуват реални числа x, y_1 и y_2, такива, че $y_1 \neq y_2$, $(x\,;\,y_1) \in h$, $(x\,;\,y_2) \in h$. Но $h \subseteq f$, затова $(x\,;\,y_1) \in f$, $(x\,;\,y_2) \in f$ в противоречие с това, че f е функция.

Нека $(x\,;\,y) \in h$. Тогава $(x\,;\,y) \in f$, $(x\,;\,y) \in g$, $y = h(x) = f(x) = g(x)$.

И така, h не е дефинирана за тези реални числа x, за които $f(x) \neq g(x)$. За всички други x функцията h е дефинирана. Окончателно, $h = f \cap g$ е функция с дефиниционно множество $D = \left\{ x \in \mathbb{R} :\; f(x) = g(x) \right\}$. За всяко x от множеството D стойността на $h(x)$ е общата стойност на $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $h(x) = f(x) = g(x)$.

В частния случай $f(x) = x^3$ и $g(x) = |x|^3$ решаваме уравнението $f(x) = g(x) \iff x^3 = |x|^3 \iff x = |x| \iff x \geq 0$, тоест $D \equiv \big[0; +\infty\big)$ е дефиниционното множество на функцията $h = f \cap g$. Тази функция е определена чрез равенството $h(x) = x^3$ за всяко $x \geq 0$.

Трите функции са изобразени на чертежа. Графиката на f се състои от зелената и синята линия, а графиката на g — от розовата и синята. Графиката на h е синята линия — сечението на графиките на f и g.



Задача 4.

а) От всяко селище x може да се стигне по суша до същото селище x: изобщо не е нужно да се излиза от селището (път с дължина нула). Следователно xRx за $\forall x \in A$, т.е. релацията R е рефлексивна.

Ако от селището x може да се стигне по суша до селището y, то и от y може да се стигне по суша до x — по обратния път. Следователно от xRy следва yRx за $\forall x \in A$ и $\forall y \in A$, т.е. релацията R е симетрична.

Ако от селището x може да се стигне по суша до селището y, а от селището y може да се стигне по суша до селището z, то от x може да се стигне по суша до z: първо — от x до y, после — от y до z. Следователно от xRy и yRz следва xRz за $\forall x \in A$, $\forall y \in A$ и $\forall z \in A$, т.е. релацията R е транзитивна.

Щом R е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност.

б) От географската карта е видно, че множеството A се разбива на три класа на еквивалентност:

$$A_1 = \Big\{ \text{Лефкими, Керкира, Гувия, Периволи, Лиападес} \Big\},$$

$$A_2 = \Big\{ \text{Ликсури, Антипата, Сами, Аргостоли, Скала} \Big\},$$

$$A_3 = \Big\{ \text{Катастари, Закинт, Кери} \Big\}.$$

Всеки клас на еквивалентност съответства на един остров:
A_1 — на о-в Корфу; A_2 — на о-в Кефалония; A_3 — на о-в Закинт.