Домашно № 2 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2016/2017 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*10*	*10*	*10*	*10*	*40*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. С помощта на цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6 са съставени всички възможни шестцифрени числа с различни цифри. Тези числа са подредени във възходящ ред (най-малкото число е първо, а най-голямото — последно). Кое число се намира на 423-то място?

Задача 2. Да се докаже, че ако m и n са цели числа и $0 \leq m \leq n$, то

$$\sum_{k\,=\,m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Задача 3. Колко на брой са строго растящите редици от пет цели положителни числа, ако:
а) членовете са едноцифрени числа? **(4 точки)**
б) първият член е 1 и разликата на всеки два поредни члена не надхвърля 3 ? **(6 точки)**

Забележка: Двете подусловия нямат връзка, т.е. всяко от тях е самостоятелна задача.

Задача 4. В множеството $\Big\{$а , б , в , г , д , … , ю , я , 0 , 1 , 2 , 3 , … , 8 , 9$\Big\}$, съставено от тридесетте кирилски букви и десетте арабски цифри, е въведена частична строга наредба:

а < б < в < г < д < … < ю < я ; $0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < 8 < 9$.

Тази наредба е непълна, защото всяка буква е несравнима с всяка цифра. По колко начина дадената непълна строга наредба може да се разшири до пълна строга наредба?

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Тъй като числата са шестцифрени и с различни цифри, то всяко число съдържа и шестте дадени цифри, всяка по веднъж. Тоест две числа от разглеждания вид се различават само по реда на цифрите си, значи са пермутации (без повторение). Броят им е $P_6 = 6! = 720$.

Според първата си цифра числата се разделят на 6 групи от по 120 числа. Тъй като $423 : 120 = 3$ ост. 63, то търсеното число е 63-то поред от четвъртата група, т.е. то започва с цифрата 4.

Според втората си цифра (1, 2, 3, 5 или 6) числата в тази група се разделят на 5 подгрупи от по 24 числа. Тъй като $63 : 24 = 2$ ост. 15, то търсеното число е 15-то поред от третата подгрупа, т.е. втората му цифра е 3.

Според третата си цифра (1, 2, 5 или 6) числата в тази подгрупа се разделят на 4 подгрупи от по 6 числа. Тъй като $15 : 6 = 2$ ост. 3, то търсеното число е 3-то поред от третата подгрупа, т.е. третата му цифра е 5.

Според четвъртата си цифра (1, 2 или 6) числата в тази подгрупа се разделят на 3 подгрупи от по 2 числа. Тъй като $3 : 2 = 1$ ост. 1, то търсеното число е първото поред от втората подгрупа, т.е. четвъртата му цифра е равна на 2.

Двете числа в споменатата втора подгрупа завършват съответно на 16 и 61. Първото от тях е търсеното; то завършва на 16, т.е. петата му цифра е 1, а шестата му цифра е 6.

Окончателно, търсеното число е 435216.

Задача 2 може да се реши по различни начини.

Първи начин: Според биномната формула $\dbinom{k}{m}$ е коефициентът пред x^m в израза $(1+x)^k$. Тогава $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$ е коефициентът пред x^m в израза $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(1+x)^k$. По формулата за сбор на геометрична прогресия: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(1+x)^k = \frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^m}{x}$. Заради делението на x коефициентът пред x^m в този израз е равен на коефициента пред x^{m+1} в числителя на дробта. В умалителя $(1+x)^m$ липсва x^{m+1}, остава коефициентът пред x^{m+1} в умаляемото $(1+x)^{n+1}$. Според биномната формула въпросният коефициент е точно $\dbinom{n+1}{m+1}$.

Втори начин: с математическа индукция по n.

База: При $n = m$ равенството приема вида $\dbinom{m}{m} = \dbinom{m+1}{m+1}$, т.е. $1 = 1$, което е вярно.

Индуктивна стъпка: Да предположим, че е изпълнено равенството $\displaystyle\sum_{k=m}^{n-1}\binom{k}{m} = \binom{n}{m+1}$.

Тогава
$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} + \sum_{k=m}^{n-1}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$
$$= \frac{n!}{(m+1)!(n-m)!}\Big((m+1)+(n-m)\Big) = \frac{n!}{(m+1)!(n-m)!}\,(n+1) = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = \binom{n+1}{m+1},$$
което трябваше да се докаже.

Задача 3.

а) По принцип две редици могат да се различават както по избора на елементите си, така и по техния ред, т.е. редиците са вариации (в общия случай). В конкретната задача обаче редиците са растящи, т.е. редът на елементите е фиксиран, затова две редици могат да се различават само по елементите си, но не и по техния ред. Ето защо в тази задача редиците са комбинации, а не вариации. Понеже всяка редица е *строго* растяща, то членовете ѝ са различни, т.е. тя е комбинация без повторение на девет елемента (положителните едноцифрени числа 1, 2, ... , 9) от пети клас (пет е дължината на редицата). Следователно броят на редиците е равен на

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{6\,.\,7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 2\,.\,7\,.\,9 = 126.$$

б) Нека a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 е една от дадените редици. Да разгледаме редицата от разликите:

$$b_1 = a_2 - a_1 \quad , \quad b_2 = a_3 - a_2 \quad , \quad b_3 = a_4 - a_3 \quad , \quad b_4 = a_5 - a_4$$

(всеки член на новата редица е разлика на два поредни члена на дадената редица). По условие $1 \leq b_k \leq 3$ за всяко $k = 1$, 2 , 3 , 4. Няма други ограничения за редицата от разликите (в частност не е задължително тя да е строго растяща).

Обратно, ако b_1 , b_2 , b_3 , b_4 е редица от единици, двойки и тройки, то тя е редица от разлики на строго растящата редица a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , където

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = b_1 + a_1 \quad , \quad a_3 = b_2 + a_2 \quad , \quad a_4 = b_3 + a_3 \quad , \quad a_5 = b_4 + a_4$$

(тези формули са обратни на горните).

П р и м е р : Ако дадената редица е 1 , 4 , 5 , 7 , 8 , то редицата от разликите е 3 , 1 , 2 , 1 (която в този случай не е строго растяща). Редицата от разликите е пресметната, както следва: $4 - 1 = 3$, $5 - 4 = 1$, $7 - 5 = 2$, $8 - 7 = 1$. Обратно, като знаем редицата от разликите, можем да възстановим първоначалната редица — започваме от единица и прибавяме разликите една по една: 1 , $1 + 3 = 4$, $4 + 1 = 5$, $5 + 2 = 7$, $7 + 1 = 8$.

Двата комплекта от формули (правите и обратните) показват, че съответствието между редиците a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 и b_1 , b_2 , b_3 , b_4 е взаимно еднозначно (биекция). Затова броят на едните е равен на броя на другите. По-лесно е да намерим броя на редиците от разлики. За целта преформулираме задачата така:

Колко на брой са редиците с четири члена, всеки от които е единица, двойка или тройка?

Две такива редици се различават било по избора на елементите, било по техния ред. Тоест този вид редици са вариации на три елемента (числата 1, 2 и 3) от четвърти клас (дължината на всяка редица). Позволено е (дори е неизбежно) редица да съдържа равни числа, следователно имаме вариации с повторение. Броят им е равен на

$$\widetilde{V}_3^4 = 3^4 = 81.$$

Задача 4. По същество в задачата се пита по колко начина 40-те елемента (буквите и цифрите) могат да образуват редица така, че както буквите, тъй и цифрите да бъдат в обичайния си ред. Всяка такава редица еднозначно се определя от позициите на цифрите. Все едно че търсим по колко начина можем да изберем 10 позиции от 40. Редът на тяхното избиране няма значение (например няма разлика дали ще кажем, че има цифри на осма и девета позиция, или ще кажем, че има цифри на девета и осма позиция). Затова всеки такъв избор е комбинация на 40 елемента от 10-ти клас. Всяка позиция може да бъде избрана само веднъж, защото на една позиция може да има само една цифра. Тоест комбинациите са без повторение. Броят им е равен на

$$C_{40}^{10} = \frac{40!}{10!\,30!} = 847\,660\,528.$$