Минимален покриващ кръг

I. Постановка на задачата

Нотация: $C_1 \prec C_2 \overset{\text{def}}{\equiv}$ кръгът C_1 е с по-малък радиус от кръга C_2. Аналогично за $\preccurlyeq, \succ, \succcurlyeq, \asymp$.

Кръг C наричаме *покриващ* за крайно множество от точки V, ако $\forall v \in V : v \in C$.

Условие на задачата:

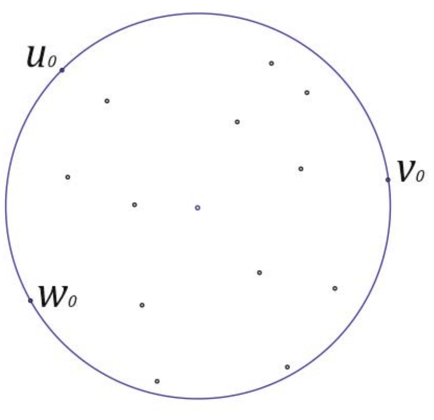
За дадено крайно множество от n точки в евклидовата равнина, $n > 1$, се търси покриващ кръг с най-малък радиус (минимален покриващ кръг, или МПК).

Твърдение:

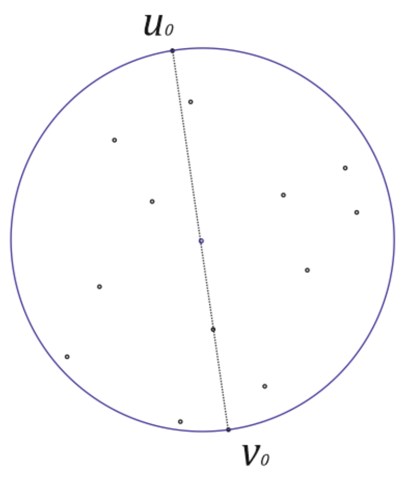
Нека C_V е минимален покриващ кръг за множество от точки V. Тогава:

1. съществуват различни точки $u_0, v_0, w_0 \in V$, такива че $C_V = C_{\{u_0, v_0, w_0\}}$ и тези точки определят остроъгълен триъгълник;
2. съществуват различни точки $u_0, v_0 \in V$, такива че $C_V = C_{\{u_0, v_0,\}}$ и отсечката между тях е диаметър на C_V.

Тези точки ще наричаме *носители* за V. Те се намират по окръжността, определена от C_V. Тъй като носителите еднозначно определят единствен кръг, то C_V е единствен.



Фиг. 1. Множество с носители u_0, v_0 и w_0.



Фиг. 2. Множество с носители u_0 и v_0.

Лема:

Нека V е множество от n точки, $n > 2$, а C_V е минималният покриващ кръг за V. Ако $v \in V$ не е носител за C_V, то $C_{V \setminus \{v\}} = C_V$.

Доказателство:

Тъй като v не е носител за C_V, $V \setminus \{v\}$ съдържа всички носители, но C_V е покриващ за $V \setminus \{v\}$, така че $C_{V \setminus \{v\}} \preccurlyeq C_V$. Ако допуснем, че $C_{V \setminus \{v\}} \prec C_V$, то $C_{V \setminus \{v\}}$ е по-малък кръг, покриващ носителите, което е противоречие с факта, че C_V е минималният такъв. В такъв случай $C_{V \setminus \{v\}} \asymp C_V$, но C_V е единственият кръг с този радиус, покриващ носителите, така че $C_{V \setminus \{v\}} = C_V$.

Следствие от лемата:

Нека V е множество от n точки, $n > 1$, C_V е минималният покриващ кръг за V и $u \notin C_V$. Тогава u е носител за $C_{V \cup \{u\}}$.

Доказателство:

В частност, $u \notin V$, така че $V = (V \cup \{u\}) \setminus \{u\}$.

Нека u не е носител за $C_{V \cup \{u\}}$. От лемата имаме, че $C_V = C_{(V \cup \{u\}) \setminus \{u\}} = C_{V \cup \{u\}}$, което е противоречие с $u \notin C_V$.

II. Алгоритъм за минимален покриващ кръг

function c2 (point u, point v) // *МПК за 2 точки*

{

return a disk with center $x = \left(\frac{u_x+v_x}{2}, \frac{u_y+v_y}{2}\right)$ and radius $r = dist(x,u)$

}

function c3 (point u, point v, point w) // *МПК за 3 точки, образуващи остроъгълен триъгълник*

{

$D = 2[u_x(v_y - w_y) + v_x(w_y - u_y) + w_x(u_y - v_y)]$

$o_x = \left[(u_x^2 + u_y^2)(v_y - w_y) + (v_x^2 + v_y^2)(w_y - u_y) + (w_x^2 + w_y^2)(u_y - v_y)\right]/D$

$o_y = \left[(u_x^2 + u_y^2)(w_x - v_x) + (v_x^2 + v_y^2)(u_x - w_x) + (w_x^2 + w_y^2)(v_x - u_x)\right]/D$

return a disk with center $x = (o_x, o_y)$ and radius $r = dist(x,u)$

}

Горните функции се изчисляват за константно време.

function shuffle (array a, int i) // *разбърква първите i елемента на масива a*

{

for ($j = i$; $j > 0$; $j = j - 1$)

{

k = random integer from 0 to $j - 1$

swap($a[j-1]$, $a[k]$)

}

}

Разбъркването на елементи отнема време $\Theta(i)$.

```
function SEC (array a of n ≥ 2 points)
{
        shuffle(a, n)
        C = c2(a[0], a[1])

        for (i = 2; i < n; i = i + 1) if (a[i] ∉ C) // loop1
        {
                shuffle(a, i)
                C = c2(a[i], a[0])

                for (j = 1; j < i; j = j + 1) if (a[j] ∉ C) // loop2
                {
                        shuffle(a, j)
                        C = c2(a[i], a[j])

                        for (k = 0; k < j; k = k + 1) if (a[k] ∉ C) C = c3(a[i], a[j], a[k]) // loop3
                }
        }

        return C
}
```

III. Анализ на коректност и сложност на алгоритъма

1. Инвариантата на *loop3* е:
   На всяка стъпка от цикъла, C е МПК за точките $a[0] \dots a[k-1]$ и носители $a[i]$ и $a[j]$.
   Сложността му е $\Theta(j)$.

2. Инвариантата на *loop2* е:
   На всяка стъпка от цикъла, C е МПК за точките $a[0] \dots a[j-1]$ и носител $a[i]$.

   Нека C е МПК за точките $a[0] \dots a[j-1]$ и носител $a[i]$.
   Нека D е МПК за $a[0] \dots a[j]$ и носител $a[i]$.

   Ако $a[j] \notin C$, от лемата имаме, че тя е носител за D. Вероятността за това е

   $$\frac{1}{j+1}, \text{ ако } D \text{ има 2 носителя;}$$

   $$\frac{2}{j+1}, \text{ ако } D \text{ има 3 носителя.}$$

   Все пак $a[i]$ е фиксиран носител.

   В първия случай сложността на тази итерация е

   $$\frac{1}{j+1}\Theta(j) + \frac{(j+1)-1}{j+1}\Theta(1) = \Theta(1),$$

   а във втория:

   $$\frac{2}{j+1}\Theta(j) + \frac{(j+1)-2}{j+1}\Theta(1) = \Theta(1).$$

И в двата случая имаме сложност $\Theta(1)$, откъдето очакваната сложност на *loop2* е

$$\sum_{j=1}^{i-1} \Theta(1) = \Theta(i).$$

3. Инвариантата на *loop1* е:
На всяка стъпка от цикъла, C *е МПК за точките* $a[0] \dots a[i-1]$.

Нека C е МПК за точките $a[0] \dots a[i-1]$.
Нека D е МПК за $a[0] \dots a[i]$.

Ако $a[i] \notin C$, от лемата имаме, че тя е носител за D. Вероятността за това е

$$\frac{2}{i+1}, \text{ ако } D \text{ има 2 носителя;}$$

$$\frac{3}{i+1}, \text{ ако } D \text{ има 3 носителя.}$$

В първия случай сложността на тази итерация е

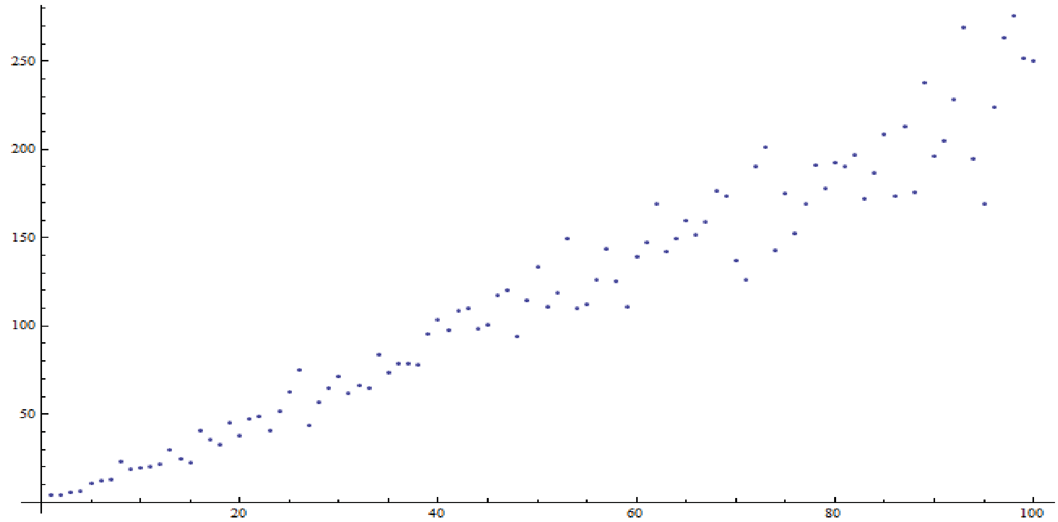
$$\frac{2}{i+1}\Theta(i) + \frac{(i+1)-2}{i+1}\Theta(1) = \Theta(1),$$

а във втория:

$$\frac{3}{i+1}\Theta(i) + \frac{(i+1)-3}{i+1}\Theta(1) = \Theta(1).$$

И в двата случая имаме сложност $\Theta(1)$, откъдето очакваната сложност на *loop1* е

$$\sum_{i=2}^{n-1} \Theta(1) = \Theta(n).$$



Фиг. 3. Резултати от тестовете (хиляди точки — ms).