Контролно по Дискретни структури, 03.12.2016г.

Име: _________________________________, ФН:______, Група:________

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	6	6	6	6	6	30

Задача 1. Докажете, че числото $n^3 + 2n$ се дели на 3 за $\forall n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. Дадена е релацията $R = \{(x, x+5) | x \in \mathbb{Z}\}$.

R' е рефлексивно, симетрично и транзитивно затваряне на R, тоест тя е най-малката по включване релация на еквивалентност, такава че $R \subset R'$.

Дайте кратко описание на R' и опишете класовете ѝ на еквивалентност.

Задача 3. Дефинирахме на лекции множеството $I_n \stackrel{def}{=} \{i | i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$.

Нека $A \subset I_{10}$ и $|A| = 6$. Докажете, че A има 2 елемента с нечетна сума.

Задача 4. Нарекохме пермутации всички биекции от вида $f : I_n \to I_n$.

При дадена пермутация f, определяме редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ така:

$a_1 = f(1)$ и $a_{i+1} = f(a_i)$ за $1 \leq i < n$.

Наричаме f циклична пермутация, когато всички членове на редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са различни.

Пример: Нека $n = 2$. Пермутацията $f(1) = 1, f(2) = 2$ не е циклична, защото $a_1 = f(1) = 1, a_2 = f(a_1) = 1$ и двата члена на редицата a_1, a_2 са равни.

(a - 3 точки) Пребройте и опишете цикличните пермутации при $n = 4$.

(b - 3 точки) Пребройте цикличните пермутации при произволно n.

Задача 5. Какъв е броят на редиците от естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$, за които:

(a - 2 точки) $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$, и $x_i \geq 0$.

(b - 4 точки) $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$, и $x_i > 0$.

Решения:

Задача 1.

Означаваме с $f(n) = n^3 + 2n$ изразът, който ни интерсува.

Първи начин (индукция):

Очевидно $f(0) = 0$ се дели на 3. Нека $f(n)$ се дели на 3, тогава $f(n+1) = (n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1)$. Получаваме $f(n+1) = f(n) + 3(n^2 + n + 1)$, което се дели на 3, защото двете събираеми се делят на 3.

Втори начин (делимост):

Разглеждаме 3 възможни случая за n, в зависимост от остатъка при делене на 3.

(1) $n = 3k$, тогава $f(n) = 3k(n^2 + 2)$ се дели на 3.

(2) $n = 3k + 1$, тогава $f(n) = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 6k + 2$ се дели на 3.

(3) $n = 3k + 2$, тогава $f(n) = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 + 6k + 4$ се дели на 3.

Задача 2.

Да вземем произволно цяло число x и да определим класа му на еквивалентност, тоест кои други цели числа са свързани с него относно релацията R':

(1) От $R \subset R'$ следва, че $(x, x+5) \in R'$, тоест $x + 5 \in [x]$.

(2) Понеже R' е рефлексивно затваряне, следва че $x \in [x]$.

(3) Понеже R' е симетрично затваряне, следва че $(y+5, y) \in R'$ за произволно y, заместваме $x = y + 5$ и получаваме $x - 5 \in [x]$.

(4) R' е транзитивно затваряне. Ще докажем по индукция, че $x + 5k \in [x]$ за всяко естествено k:

От (2) следва, че $x + 5 \times 0 \in [x]$.

Нека $(x, x+5k) \in R'$. От (1) $(x + 5\text{к}, x + 5k + 5) \in R'$, и от транзитивноста на R' следва $(x, x + 5(k+1)) \in R'$.

Аналогично доказваме, че $x - 5k \in [x]$ за всяко естествено k.

Получаваме, че класът на еквивалентност $[x]$ се състои от всички цели числа, които при делене на 5 имат същия остатък, както и x.

Има 5 различни такива класове на еквивалентност – множествата от цели числа, даващи съответно остатъци 0, 1, 2, 3 и 4 при делене на 5.

Задача 3.

В множеството I_{10} има точно 5 четни и точно 5 нечетни числа.

Но A има 6 елемента, то ще съдържа поне едно четно число a и поне едно нечетно число b Сумата на двете $a + b$ е нечетна.

Задача 4.

(a) Ще записваме съкратено една пермутация f като редица от стойностите $(f(1), f(2) \ldots f(n))$.

При този съкратен запис $(2, 3, 4, 1)$ означава $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$. Лесно се проверява, че $(2, 3, 4, 1)$ е една от цикличните пермутации при $n = 4$.

Цикличните пермутации при $n = 4$ са общо 6 на брой, те са:

$(2, 3, 4, 1)$, $(2, 4, 1, 3)$, $(3, 4, 2, 1)$, $(3, 1, 4, 2)$, $(4, 3, 1, 2)$, $(4, 1, 2, 3)$

(b) Броят на цикличните пермутации за произволно n е $(n-1)!$ (всички пермутации са $n!$).

Има различни начини да се уверим в това, ето един от тях:

Да си представим, че турист иска да посети n музея за един ден. В началото на разходката си той посещава музей 1, който е близо до хотела, в който е отседнал. След разглеждането на всеки музей, туристът прави преход до друг музей, като всички посетени музеи са различни и накрая туристът се връща уморен в хотела.

Нека с $a_0 = a_n = 1$ означим началния/крайния пункт на разходката на туриста (музей номер 1, или хотела на туриста). Нека a_i е номерът на музея, посетен след i-тия преход.

Множеството от двойки $(a_i, a_{i+1}), 0 \leq i < n$ е функция, да я означим с f. Лесно се проверява, че $f : I_n \to I_n$ е циклична пермутация, а всяка циклична пермутация съответства на разходка на туриста из музеите.

Да преброим различните разходки. При първия преход търистът може да избере някой от $n-1$ непосетени музея. При втория трябва да посети някой от оставащите $n-2$ непосетени музея. След това трябва да стигне до някой от оставащите $n-3$ непосетени музея и т.н., докато се върне в хотела.

Броят на различните разходки ще е $(n-1)(n-2)\dots 2.1 = (n-1)!$, толкова са и цикличните пермутации на n елемента.

Задача 5.

(a) Броят на редиците е броят на комбинаторните конфигурации с повторение, без да отчитаме наредбата.

Избираме n елемента от k типа (цвята). x_1 е броят на елементите от първи тип (цвят), x_2 – от втория цвят и т.н.

Знаем от лекции, че конкретна редица $x_1, x_2, \dots, x_k$ биективно съответства на символен низ от редуващи се '*' и '|'. Низът започва с x_1 звездички, следва разделител '|', после x_2 звезди, разделител и т.н. Дължината на низа е $n + k - 1$, броят на разделите е $k - 1$.

Броят на редиците е $\binom{n+k-1}{k-1}$, точно колкото са начините да разположим $k-1$ разделителя в низ с дължина $n + k - 1$.

(b) В този случай пак можем да съпоставим на всяка редица низ от '*' и '|', но искаме между всеки два разделителя да има поне една '*' (също и в началото и края на низа има звезда).

Нека разгледаме по-къс низ, като от всеки интервал звездички махнем една. На всяка редица $x_1, x_2, \dots, x_k$ съпоставяме редица $y_1, y_2, \dots, y_k$, такава че $y_i = x_i - 1$. От условието $x_i > 0$ следва $y_i \geq 0$.

Търсим броя на редиците $y_1, y_2, \dots, y_k$. Сумата на числата $\sum_{i=1}^{k} y_i = n - k$ и $y_i \geq 0$. Пак търсим броя на конфигурациите без наредба и с повторение. Сега броят на елементите е $n - k$, а броят на конфигурациите е $\binom{n-1}{k-1}$.

В терминологията на низ от звездички и чертички, след изтриването на звездичка във всеки интервал, низът се скъсява (изтрили сме точно k звезди). Дължината на низа става $n - 1$, броят на '|' остава $k - 1$, а броят начини по които можем да разположим чертичките в низа е $\binom{n-1}{k-1}$.