Семестриално контролно по "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток – СУ, ФМИ, зимен семестър на 2016 / 2017 уч. г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Общо
получени точки							
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*120*

Забележка: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Задача 1. Отговорете на следните въпроси, като се аргументирате възможно най-добре.

а) Какво представлява съждителният израз $\big(\neg\, p \vee q\big) \wedge \big(q \leftrightarrow r\big) \rightarrow \big(p \rightarrow r\big)$: тавтология, противоречие или условност? **(10 т.)**

б) Вярно ли е, че от $\forall x\Big(P(x)\Big) \vee \forall x\Big(Q(x)\Big)$ следва $\forall x\Big(P(x) \vee Q(x)\Big)$? **(5 т.)**

в) Вярно ли е, че от $\forall x\Big(P(x) \vee Q(x)\Big)$ следва $\forall x\Big(P(x)\Big) \vee \forall x\Big(Q(x)\Big)$? **(5 т.)**

Задача 2. С помощта на цифрите 1, 2, 5, 8 и 9 са съставени всички възможни петцифрени числа с различни цифри. Намерете сбора на тези числа.

Задача 3. Намерете множеството X от системата

$$\left|\begin{array}{l} C \cup X = \Big(B \setminus A\Big) \cup C \\ C \cap X = \Big(A \cup B\Big) \cap C. \end{array}\right.$$

Изразете X чрез множествата A, B и C с помощта на обединение, сечение и разлика.

Задача 4. Разглеждаме функциите $f(x) = x^2 - 4$ и $g(x) = 2x - 1$, дефинирани в $\mathbb{R}$.
Представете функцията $h = f \cap g$ като множество.
Опишете това множество чрез явно изброяване на елементите му.

Задача 5. Най-много колко царя могат да се разположат върху шахматна дъска 8×8 така, че никои два от тях да не се заплашват? Два царя се заплашват, ако се намират на съседни полета. Две полета са съседни, ако имат обща страна или общ връх.

Задача 6. На витрината на магазин за плодове и зеленчуци трябва да се подредят в редица 4 ябълки, 4 круши, 4 портокала и 4 лимона. Плодовете от един и същи вид са неразличими.

а) По колко начина може да се подредят 16-те плода, ако не се налагат ограничения? **(5 т.)**

б) По колко начина може да се подредят 16-те плода, ако един до друг може да стоят най-много три плода от един и същи вид? **(15 т.)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Съждителният израз $\big(\neg p \vee q\big) \wedge \big(q \leftrightarrow r\big) \to \big(p \to r\big)$ е тавтология. Това се доказва например чрез табличния метод.

б) От $\forall x\Big(P(x)\Big) \vee \forall x\Big(Q(x)\Big)$ следва $\forall x\Big(P(x) \vee Q(x)\Big)$. Дизюнкцията $P(x) \vee Q(x)$ е истина всякога, когато е верен някой от членовете ѝ. Затова, щом поне един от членовете ѝ е верен винаги, то и самата дизюнкция е вярна винаги.

в) От $\forall x\Big(P(x) \vee Q(x)\Big)$ не следва $\forall x\Big(P(x)\Big) \vee \forall x\Big(Q(x)\Big)$: може за едни x да е вярно $P(x)$, а за останалите x да е вярно $Q(x)$.

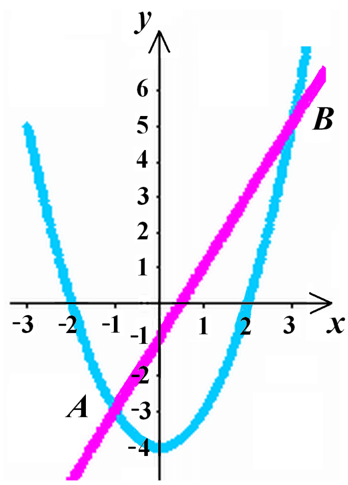
Задача 4. Понеже $h = f \cap g$, то графиката на h е сечение на графиките на функциите f и g. Пресечните точки на двете графики ще намерим, като решим уравнението

$$f(x) = g(x) \iff x^2 - 4 = 2x - 1 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = -1 \text{ или } x = 3.$$

Следователно графиката на функцията $h : D \to \mathbb{R}$ се състои от две точки с абсциси — корените на уравнението. Тоест дефиниционното множество D на функцията h съдържа две реални числа: $D = \Big\{-1 \ , \ 3\Big\}$.

За всяко $x \in D$ стойността на $h(x)$ е общата стойност на $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $h(x) = f(x) = g(x)$ за $\forall x \in D$. Затова $h(-1) = f(-1) = (-1)^2 - 4 = g(-1) = 2 \ . \ (-1) - 1 = -3$; $h(3) = f(3) = 3^2 - 4 = 5 = g(-1) = 2 \ . \ 3 - 1 = 5$.

Окончателно, функцията $h : \Big\{-1 \ , \ 3\Big\} \to \mathbb{R}$ приема следните стойности: $h(-1) = -3$, $h(3) = 5$. Графиката на h се състои от двете точки $A(-1 \, , \, -3)$ и $B(3 \, , \, 5)$, т.е. $h = \Big\{ (-1 \, , \, -3) \ , \ (3 \, , \, 5) \Big\}$.



Задача 2. По условие всяко число трябва да бъде петцифрено и с различни цифри. Затова всяко число съдържа всичките пет цифри. Тогава две числа се различават само по реда на цифрите си, т.е. числата са пермутации без повторение. Броят им е равен на $P_5 = 5! = 120$. Според цифрата на единиците те се разделят на 5 групи по $P_4 = 4! = 24$ числа във всяка група. Следователно сборът на единиците е равен на

$$24 \, . \, 1 + 24 \, . \, 2 + 24 \, . \, 5 + 24 \, . \, 8 + 24 \, . \, 9 = 24 \, . \, (1 + 2 + 5 + 8 + 9) = 24 \, . \, 25 = 600.$$

Аналогично, сборът на десетиците е равен на 600, сборът на стотиците е 600 и т.н. Следователно сборът на числата е равен на

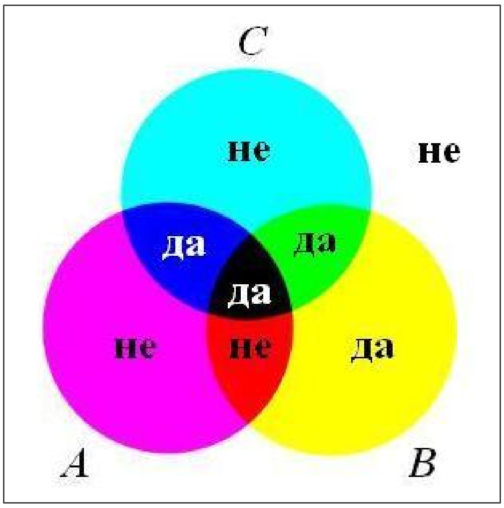
$$600 \, . \, 1 + 600 \, . \, 10 + 600 \, . \, 100 + 600 \, . \, 1000 + 600 \, . \, 10000 = 600 \, . \, (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) =$$

$= 600 \, . \, 11111 = 6\,666\,600$. Това число е отговорът на задачата.

Задача 3. Извършваме еквивалентни преобразувания на дадената система:

$$\left|\begin{array}{l} C\cup X=\Big(B\setminus A\Big)\cup C \\ C\cap X=\Big(A\cup B\Big)\cap C \end{array}\right\} \iff \left|\begin{array}{l} X \text{ и } B\setminus A \text{ съвпадат извън } C \\ X \text{ и } A\cup B \text{ съвпадат в } C \end{array}\right\} \iff \left|\begin{array}{l} X\setminus C=\Big(B\setminus A\Big)\setminus C \\ C\cap X=\Big(A\cup B\Big)\cap C \end{array}\right.$$

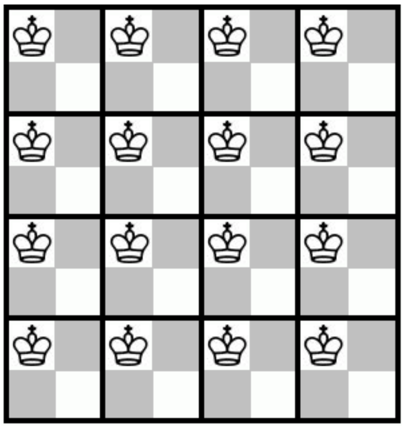
Понеже всеки елемент на X или принадлежи, или не принадлежи на множеството C, то $X=\Big(C\cap X\Big)\cup\Big(X\setminus C\Big)$. След заместване от уравненията на системата намираме неизвестното $X=\Big[\Big(A\cup B\Big)\cap C\Big]\cup\Big[\Big(B\setminus A\Big)\setminus C\Big]$. Обратно, не е трудно да се провери, че това множество X удовлетворява системата.



Задачата може да се реши и по друг начин — с диаграма на Вен. Множествата X и $B\setminus A$ съвпадат извън C, т.е. X съдържа жълтия сектор, но няма сечение с белия, розовия и червения. Аналогично, щом X и $A\cup B$ съвпадат в C, то X съдържа зеления, черния и тъмносиния сектор, но няма сечение със светлосиния. Окончателно, множеството X се състои от жълтия, зеления, черния и тъмносиния сектор, откъдето получаваме израза $X=\Big[\Big(A\cup B\Big)\cap C\Big]\cup\Big[\Big(B\setminus A\Big)\setminus C\Big]$. Първият член $\Big(A\cup B\Big)\cap C$ представлява сумата на зеления, черния и тъмносиния сектор. Вторият член $\Big(B\setminus A\Big)\setminus C$ съответства на жълтия сектор от диаграмата; той може да се запише и така: $B\setminus\Big(A\cup C\Big)$, т.е. $X=\Big[\Big(A\cup B\Big)\cap C\Big]\cup\Big[B\setminus\Big(A\cup C\Big)\Big]$.

Тези изрази могат да бъдат опростени: $X=\Big[\Big(A\cup B\Big)\cap C\Big]\cup\Big(B\setminus A\Big)$. Сега вторият член се състои от два сектора — жълтия и зеления. Тоест зеленият сектор участва два пъти (по веднъж във всеки от двата члена), но това не е проблем.

Задача 5. Максималният брой е 16. Пример за 16 царя е показан на чертежа. Да разделим шахматната дъска на 16 квадрата 2×2 (вж. чертежа). Както и да сложим 17 царя (или повече от 17), от принципа на Дирихле следва, че поне два от тях ще бъдат в един и същ квадрат 2×2, следователно ще се застрашават.



Задача 6. а) Две подредби в редица се различават само по реда на плодовете, следователно подредбите са пермутации. Има еднакви плодове, затова подредбите са пермутации с повторение. Броят им е равен на $\widetilde{P}_{16}^{\,4,4,4,4} = \dfrac{16!}{(4!)^4} = 63\,063\,000.$

б) От всички пермутации с повторение вадим онези, които нарушават изискването. Нека A_k е множеството на пермутациите, в които всички плодове от k-тия вид са един до друг, $k = 1, 2, 3, 4$. Забранените пермутации образуват множеството $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Според принципа за включване и изключване броят им е равен на

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \right| = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+1} \binom{4}{k} \frac{(16-3k)!}{(4!)^{4-k}} .$$

Тази сума е получена по следния начин:

— Множителят $(-1)^{k+1}$ отразява смяната на знака в принципа за включване и изключване.

— Множителят $\dbinom{4}{k} = C_4^k$ показва по колко начина можем да изберем k множества от четирите.

— Множителят $\dfrac{(16-3k)!}{(4!)^{4-k}}$ е броят на пермутациите с повторение, образуващи сечението на избраните k множества. Пакетираме плодовете от избраните k вида (поотделно за всеки вид), тъй като стоят един до друг. Получаваме k различими пакета и $16 - 4k$ непакетирани плода, общо $16 - 3k$ елемента, откъдето идва изразът $(16 - 3k)!$ в числителя. Както и по-рано, множителите $4!$ в знаменателя съответстват на неразличимите плодове. Тези множители са толкова на брой, колкото са непакетираните видове плод, тоест $4 - k$, което обяснява степенния показател в знаменателя.

От всички пермутации вадим забранените и получаваме

$$\frac{16!}{(4!)^4} - \left| A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \right| = \frac{16!}{(4!)^4} - \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k+1} \binom{4}{k} \frac{(16-3k)!}{(4!)^{4-k}} =$$

$$= \frac{16!}{(4!)^4} + \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k} \binom{4}{k} \frac{(16-3k)!}{(4!)^{4-k}} = \sum_{k=0}^{4} (-1)^{k} \binom{4}{k} \frac{(16-3k)!}{(4!)^{4-k}} = 61\,298\,184.$$

Това е броят на разрешените пермутации, тоест отговорът на задачата.