Второ домашно по Дискретни структури, 03.01.2017г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Група:_______

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	1	1	1	1	1	5

Забележка: Предайте домашното на вашия асистент най-късно на 19 януари, преди започване на упражнението на групата Ви !

Задача 1. Решете рекурентното уравнение:

$R_n = R_{n-1} + 2R_{n-2} + n$ при начални условия $R_0 = 0, R_1 = 1$.

Задача 2. Дадено е нечетно естествено число $n = 2k + 1$. Пресметнете по колко начина n може да се представи като сума на две четни и едно нечетно число. Трите числа в сумата са естествени (включително и нула).

Забележка: Две представяния са различни, ако едното не се получава от другото с разместване на събираемите.

Задача 3. Докажете, че графът на хиперкуба B_k не е планарен за $k > 3$.

Дефиниция: Върховете на B_k са всички редици от нули и единици с дължина k. Два върха са свързани с ребро, ако съответните им редици се различават в точно една позиция.

Задача 4. Дърветата $T_1(V, E_1)$ и $T_2(V, E_2)$ имат общо множество върхове, но някои от ребрата се различават.

Ако точно k ребра в двете дървета са различни ($|E_1 \backslash E_2| = |E_2 \backslash E_1| = k$), постройте редица от дървета $S_0, S_1, \dots, S_k$ със свойства:

(1) Всяко от дърветата в редицата има множество от върхове V.

(2) S_0 съвпада с T_1, а S_k съвпада с T_2.

(3) поредните дървета в редицата S_i и S_{i+1} се различават по точно едно ребро.

Задача 5. Пътна мрежа е множество градове и шосета, като всяко шосе свързва два града. Пътната мрежа на някаква държава е такава, че от всеки град може да се стигне до всеки, но по един единствен начин, и освен това броят на шосетата е четно число. Докажете, че има поне един град, от който излизат четен брой шосета.

Решения

Задача 2. Нека $n = x + y + z$, където $x \leq y$ са четни, а z е нечетно.

Ще преброим по колко начина можем да изберем x и y при фиксирано z. Очевидно $x + y = n - z = 2c$ е четно, нека $x = 2a, y = 2b$. Тогава $a + b = c, a \leq b$. Разглеждаме два случая:

Ако c е четно, a може да приема стойности от 0 до $c/2$, броят на възможните случаи за двойката (a, b) е $c/2 + 1$.

Ако c е нечетно, a може да приема стойности от 0 до $(c-1)/2$, броят на възможните случаи за двойката (a, b) е $(c + 1)/2$.

Когато z се мени от 1 до $n = 2k+1$, $2c$ ще приема четни стойности от 0 до $2k$, тоест c ще приема стойности от 0 до k.

Разглеждаме два случая за k:

(a) $k = 2l$ е четно.

В този случай c приема четни стойности $0, 2 \ldots 2l$. Броят варианти за двойката (a, b) е $\sum_{i=0}^{l} (2i/2 + 1) = \sum_{i=0}^{l} (i + 1) = l(l + 1)/2 + l + 1 = (l + 1)(l + 2)/2$.

c приема нечетни стойности $1, 3 \ldots 2l - 1$. Броят варианти за двойката (a, b) е $\sum_{i=0}^{l-1} ((2i + 1) + 1)/2) = \sum_{i=0}^{l-1} (i + 1) = l(l + 1)/2$.

Събираме случаите на четно и нечетно обхождане за c и получаваме всички варианти за (a, b):

$(l + 1)(l + 2)/2 + l(l + 1)/2 = (l + 1)(2l + 2)/2 = (l + 1)^2 = (k/2 + 1)^2 = ((n - 1)/4 + 1)^2$

(b) $k = 2l + 1$ е нечетно.

В този случай c приема четни стойности $0, 2 \ldots 2l$. Броят варианти за двойката (a, b) е $\sum_{i=0}^{l} (2i/2 + 1) = \sum_{i=0}^{l} (i + 1) = l(l + 1)/2 + l + 1 = (l + 1)(l + 2)/2$.

c приема нечетни стойности $1, 3 \ldots 2l + 1$. Броят варианти за двойката (a, b) е $\sum_{i=0}^{l} ((2i + 1) + 1)/2) = \sum_{i=0}^{l} (i + 1) = (l + 1)(l + 2)/2$.

Събираме случаите на четно и нечетно обхождане за c и получаваме всички варианти за (a, b):

$(l + 1)(l + 2)/2 + (l + 1)(l + 2)/2 = (l + 1)(l + 2) = (k + 1)(k + 3)/4 = (n + 1)(n + 5)/16$

Окончателно при четно k различните начини са $(k/2 + 1)^2 = ((n - 1)/4 + 1)^2 = (n + 3)^2/16$.

При нечетно k различните начини са $(k + 1)(k + 3)/4 = (n + 1)(n + 5)/16$.

Задача 3. На лекции сме отбелязвали, че B_k е подграф на B_{k+1}, следователно е достатъчно да покажем, че B_4 не е планарен. Ще ползваме теоремата на Куратовски за първите два начина:

(a - свиване до K_5)

Вземаме подграфа G на B_4, породен от върховете с нула, една и две единици в булевите вектори и свързващите ги ребра. Всеки връх с две единици в G е свързан с точно два други върха с по една единица.

Примерно връх 0110 е свързан с двата върха 0100 и 0010. Пътят (0100,0110,0010) се свива до ребро в свития граф G' (0100,0010).

В свития граф всички върхове с по две единици ще изчезнат при свиването, а ще се появят ребра между коя да е двойка върхове с по една единица.

Така в свития граф ще останат 5 върха - 0000, 0001, 0010, 0100 и 1000 и ребра между всеки два от тях, той е изоморфен на K_5.

(b - свиване до $K_{3,3}$)

Вземаме подграф G_0 на B_4, с върхове 0000, 0001, 0010, 0100, 0011, 0110 и ребрата между тях.

G_0 е двуделен граф с дялове (0000, 0011, 0110) и (0001, 0010, 0100), но не е пълен.

За да стане пълен, трябва да добавим 2 ребра – (0100,0011) и (0110,0001).

Добавяме следните пътища от B_4 към G_0:

(0100, 0101, 0111, 0011) и (0110,1110,1111,1101,1001,0001)

В полученият по-голям граф G всички нови (спрямо G_0) върхове имат степен 2. При свиването на добавените пътища получаваме търсените 2 ребра, които правят свития граф G' изоморфен на $K_{3,3}$.

(c - чрез формула на Ойлер)

Решението предложи студентът Данаил Цветанов.

Допускаме, че B_k е планарен.

За всеки планарен граф е в сила формулата на Ойлер:

$$v - e + f = 2 \tag{1}$$

където v е броят на върховете, e – броят на ребрата, а f е броят на лицата (площите, оградени от ребра), включително външната безкрайна площ около рисунката.

Нека броят ребра, ограждащи i-тата площ е m_i. Тъй като всяко ребро граничи с две площи, вярна е формулата:

$$\sum_{i=1}^{f} m_i = 2e \tag{2}$$

Тъй като графът на хиперкуба B_k е двуделен, всяка площ има четен брой ограждащи ребра (ограждащите ребра образуват цикъл, а в двуделните графи всички цикли са с четна дължина). Освен това в B_k няма цикли с дължина 2 (той е обикновен неориентиран граф). Следователно всяка площ има поне 4 ограждащи ребра, т.е. $m_i \geq 4$. Получаваме веригата неравенства:

$$4f = \sum_{i=1}^{f} 4 \leq \sum_{i=1}^{f} m_i = 2e \tag{3}$$

или $f \leq \frac{e}{2}$. Заместваме във формулата на Ойлер и получаваме: $v - e + \frac{e}{2} \geq 2$ или

$$v - \frac{e}{2} \geq 2 \tag{4}$$

В B_k от всеки връх излизат точно k ребра, и тъй като всяко ребро свързва точно два върха, вярно е равенството $kv = 2e$. Броят на върховете е $v = 2^k$, а за броя ребра получаваме $e = k2^{k-1}$. Заместваме в (4):

$$2^k - k2^{k-2} \geq 2 \tag{5}$$

Делим на 2^{k-2}:

$$4 - k \geq 2^{3-k} > 0 \tag{6}$$

еквивалентно на $4 > k$, но по условие $k > 3$ – противоречие.

Задача 4. Ако $k = 0$, задачата е тривиална, нека $k > 0$. Нека S_0 съвпада с T_1, ще построим S_1 по два различни начина така, че да удовлетвори условията в задачата.

Първи начин: Избираме ребро e_1 от $S_0 = T_1$, което не се среща в $S_k = T_2$. Махаме e_1 от S_0. Това действие ще го превърне в гора с две дървета. Нека V_1 и V_2 са техните върхове.

Тъй като T_2 е свързан, поне едно ребро в него ще свързва V_1 и V_2. Да означим това ребро с e_2, то не може да е от S_0, тъй като единственото ребро, свързващо V_1 и V_2 в S_0 е e_1, но то не се среща в T_2.

Сега добавяме e_2 към гората, получена при изтриването на e_1 от S_0. Полученият граф е дърво, означаваме го с S_1. Той се различава от S_0 по едно ребро (заменихме e_1 с e_2). Очевидно S_1 се различава от S_k по $k - 1$ ребра.

Втори начин: Избираме ребро e_2 от $S_k = T_2$, което не се среща в $S_0 = T_1$. Добавяме e_2 към S_0. Ще получим цикъл, в който има поне едно ребро, което не е от $S_k = T_2$. Да означим това ребро с e_1, изтриваме го и късаме цикъла.

Полученият граф е дърво, означаваме го с S_1. Той се различава от S_0 по едно ребро (заменихме e_1 с e_2). Очевидно S_1 се различава от S_k по $k-1$ ребра.

Търсената редица от дървета ще получим, като повторим гореописаната стъпка още $k-1$ пъти – като заменим ребро от S_1 ще получим S_2, после от S_2 ще получим S_3 и т.н.

За да опишем формално стъпките на строеж на редицата, трябва да ползваме индукция. Оставяме това упражнение на читателя.