Задачи по булеви функции.

Съдържание

1 Теоретична основа

1.1 Дефиниция на "булева функция"

$J_2 \stackrel{\text{деф}}{=} \{0, 1\}$. $J_2^n \stackrel{\text{деф}}{=} \underbrace{J_2 \times J_2 \times \cdots \times J_2}_{n \text{ пъти}}$. *Булева функция на* n *променливи* е всяка функция $f : J_2^n \to J_2$ за някое $n \geq 1$.

Можем да дефинираме и булеви функции на 0 променливи. 0-кратното декартово произведение е $\{()\}$, следователно домейнът е едноелементен и има точно две булеви функции на 0 променливи, които булеви функции отъждествяваме с двете булеви константи 0 и 1.

Множеството от всички булеви функции на n променливи е $\mathcal{F}_2^n$. Множеството от всички булеви функции е

$$\mathcal{F}_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_2^n$$

1.2 Булеви вектори

Елементите на J_2^n са *булевите вектори с дължина* n. За краткост изпускаме прилагателното "булеви" (понеже не разглеждаме други вектори) и казваме просто "n-вектори" или дори само "вектори", ако броят на елементите е без значение. Ползваме удобната конвенция имената на векторите да бъдат записвани с удебелени букви (в полиграфията се казва "получерен шрифт", на английски е *boldface*), например $\mathbf{b}$. Ако сме дефинирали някакво име на n-вектор, да кажем $\mathbf{b}$, то неговите елементи именуваме със същото име, само че тях изписваме с нормално дебели букви (*regular face*), например $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots b_n)$. За удобство може да запишем това като $\mathbf{b} = b_1 b_2 \cdots b_n$.

Нека $x, y \in J_2$. $x \stackrel{\text{деф}}{=} \overline{y}$, ако

$$x = \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \\ 0, & \text{ако } y = 1 \end{cases}$$

Противоположни вектори са вектори с една и съща дължина, които се различават във всеки елемент. Например, ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са n-вектори, те са противоположни, ако

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : a_i = \overline{b_i}$$

Факта, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са противоположни, записваме накратко така: $\mathbf{a} = \overline{\mathbf{b}}$. Добре известно е, че $\overline{\overline{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}$, така че $\mathbf{a} = \overline{\mathbf{b}} \leftrightarrow \overline{\mathbf{a}} = \overline{\overline{\mathbf{b}}} = \mathbf{b}$.

1.3 Променливи

Нека f е булева функция на n променливи. За какви променливи става дума? Всяка булева променлива се асоциира с точно едно от множествата J_2 от домейна $\underbrace{J_2 \times J_2 \times \cdots \times J_2}_{n \text{ пъти}}$. Иначе казано, домейнът е множество от вектори, 2^n на брой, и всяка от n-те позиции в тези вектори е (по-точно, се асоциира с) булева променлива – тя може да взема стойности 0 или 1 независимо от стойностите на другите позиции. Имената на променливите обикновено записваме с x_1, x_2 и така нататък, а факта, че f е функция на n променливи, записваме по познатия начин: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Променливата x_i се нарича *фиктивна*, ако

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$$

за **всяка стойност** на $(n-1)$-вектора $x_1 x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_n$. Променлива, която не е фиктивна, се нарича *съществена*.

1.4 Композиция

Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ са булеви[†] функции. *Композицията на* g *на мястото на* x_i *във* f *е функцията* $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, g(y_1, y_2, \ldots, y_m), x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$. Това е функция, която е **различна** (в общия случай) и от f, и от g. Ако се интересуваме от изчисляването на тази функция, процедура за нейното изчисляване може да се получи от процедури за изчисляването на f и на g.

Ако $(\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i\}) \cap \{y_1, \ldots, y_m\} = \emptyset$[‡], то въпросната композиция е функция на $n + m - 1$ променливи. В общия случай обаче $(\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i\}) \cap \{y_1, \ldots, y_m\} \neq \emptyset$ и броят на променливите ѝ е $n + m - 1 - k$, където k е броят на променливите, общи за $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i\}$ и $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Във всеки случай, множеството от променливите на функцията-композиция е $(\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i\}) \cup \{y_1, \ldots, y_m\}$.

[†]Не е необходимо тези f и g да са **булеви** функции, за да може говорим за композиция. Композиция на функцията g на мястото на x_i във функцията f е мислима дори когато f и g са произволни функции при условие, че кодомейнът на g е същият като i-ия домейн на f. Казано на програмистки жаргон, при условие, че типът на изхода на g е същият като типа на i-ия вход на f.

[‡]С други думи, ако променливите на f без x_i, от една страна, и променливите на g, от друга страна, нямат общи елементи.

Ако g_1, g_2, ..., g_n са булеви функции съответно на m_1, ..., m_n променливи, а именно

$$g_1(y_{1,1}, \ldots, y_{1,m_1})$$
$$g_2(y_{2,1}, \ldots, y_{2,m_1})$$
$$\ldots$$
$$g_n(y_{n,1}, \ldots, y_{n,m_n})$$

то композицията на g_1 на мястото на x_1, на g_2 на мястото на x_2, ..., на g_n на мястото на x_n е булевата функция:

$$f(g_1(y_{1,1}, \ldots, y_{1,m_1}), g_2(y_{2,1}, \ldots, y_{2,m_2}), \ldots, g_n(y_{n,1}, \ldots, y_{n,m_n}))$$

1.5 Представяния на булеви функции

1.5.1 Представяне чрез вектор (канонично представяне)

По дефиниция, всяка булева функция на n променливи е множество от наредени двойки, 2^n на брой, първият елемент от които е n-вектор, а вторият, булева стойност (0 или 1). Въпросните n-вектори са *входните вектори*. Това име има смисъл, ако си представяме булевата функция като алгоритъм, който по даден вход (n-вектор) връща булева стойност.

Ето пример за булева функция на 3 променливи:

$$f = \{((0,0,0),0),((0,0,1),1),((0,1,0),1),((0,1,1),0)$$
$$((1,0,0),1),((1,0,1),0),((1,1,0),0),((1,1,1),1)\}$$

Можем да опишем тази функция много по-прегледно с таблица:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

В таблицата са дадени имена на променливите, което не е необходимо, за да определим функцията. Нещо повече. Ако се разберем, че 3-векторите са подредени отгоре надолу лексикографски, както е в случая, не е необходимо да ги пишем, за да определим функцията. Бихме могли да я определим само чрез колоната от нейните стойности (в случая 8 на брой):

f
0
1
1
0
1
0
0
1

За да пестим място при писането, записваме функцията не като колона, а хоризонтално:

$$f = 01101001$$

Това е *каноничното представяне* на булева функция: вектор от 2^n на брой булеви стойности, с имплицитното допускане, че входните вектори са подредени лексикографски. Ако се опитаме да определим функцията чрез вектор, чиято дължина **не е** точна степен на двойката, например

$$g = 010110$$

то това представяне е **невалидно**, тоест не задава никаква булева функция.

1.5.2 Представяне чрез хиперкуб

Понякога е много удобно да мислим за булевите функции на n променливи в термините на *хиперкуб*. n-мерен хиперкуб е обобщение на редицата от геометрични обекти `точка`, `отсечка`, `квадрат`, `куб` и така нататък:

- точката е 0-мерен хиперкуб, който е атомарен в смисъл, че няма структура,
- отсечката е 1-мерен хиперкуб, състоящ се от 2 точки и едномерния обект, който ги свързва—можем да кажем, в някакъв смисъл, "който е ограден от тях",
- квадратът е 2-мерен хиперкуб, състоящ се от 4 точки, 4 отсечки и двумерния обект, ограден от тях,
- кубът е 3-мерен хиперкуб, състоящ се от 8 точки, 12 околни ръба, 6 квадрата и тримерния обект, ограден от тях,
- и така нататък.

От тази гледна точка n-мерният хиперкуб е общият член на тази редица. Той е геометричен обект в n-мерното пространство. Може да мислим за хиперкуба като за обект, състоящ се от:

- 2^n точки, които са върховете му,
- $n2^{n-1}$ отсечки, които са околните му ръбове,
- $\binom{n}{2}2^{n-2}$ квадрата, които са околните му стени,
- $\binom{n}{3}2^{n-3}$ куба,
- и така нататък
- $\binom{n}{n-1}2^{n-(n-1)} = 2n$ на брой, $(n-1)$-мерни обекта,
- един n-мерен обект, ограден от $(n-1)$-мерните обекти.

Лесно се вижда, че k-мерните компоненти на n-мерния хиперкуб са $\binom{n}{k}2^{n-k}$ на брой.

Може да пренебрегнем геометричния аспект на хиперкуба и да мислим за него като за чисто комбинаторен обект по следния начин:

- Върховете му са векторите от J_2^n. Това са 0-мерните компоненти на n-мерния хиперкуб.

- Два вектора са *съседни* тогава и само тогава, когато се различават в точно една позиция. Например, ако $n = 3$, векторите 001 и 011 се различават в точно една позиция (втората) и те задават един околен ръб на 3-мерния хиперкуб. И така, всеки околен ръб се идентифицира с двата върха, които му притадлежат, а те се различават в точно една позиция. С други думи, 1-мерните компоненти са всички (ненаредени) двойки вектори, които се различават в точно една позиция.

- Аналогично, всяка околна стена се идентифицира с четирите върха, които ѝ принадлежат. С други думи, 2-мерните компоненти са всички (ненаредени) четворки вектори, такива че има точно две позиции, в които тези четири вектора се различават.

- Аналогично, 3-мерните компоненти са всички (ненаредени) осморки вектори, такива че има точно три позиции, в които се различават.

- И така нататък.

- n-мерната компонента е точно една: това е множеството от всички, 2^n на брой, n-вектори.

Тогава общият брой компоненти на n-мерния хиперкуб е:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{n-k} 2^{n-k} =$$

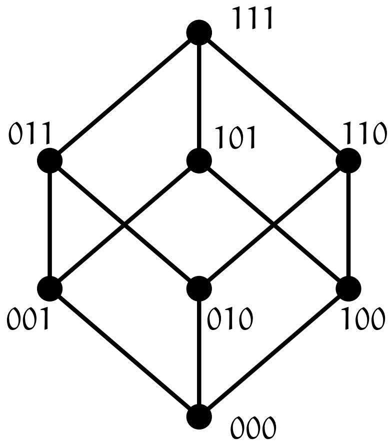
$$\sum_{0 \geq -k \geq -n} \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \sum_{n \geq n-k \geq 0} \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} 2^{k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} 2^{k} 1^{n-k} = 3^n$$

Като пример да разгледаме 3-мерния хиперкуб, записан **напълно подробно**:

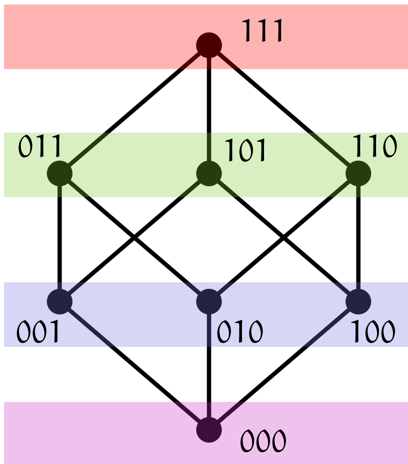
$$\begin{array}{l}
\{ \\
\ \{\{000\},\{001\},\{010\},\{011\},\{100\},\{101\},\{110\},\{111\}\}, \quad //8 \text{ върха} \\
\ \{\{000,100\},\{000,010\},\{010,011\},\{001,011\},\{000,100\},\{001,101\}, \\
\quad \{011,111\},\{010,110\},\{100,101\},\{101,111\},\{111,110\},\{110,100\}\} \quad //12 \text{ ръба} \\
\ \{\{000,001,011,010\},\{000,100,101,001\},\{001,101,111,011\}, \\
\quad \{010,110,100,000\},\{010,110,111,011\},\{100,101,111,110\}\}, \quad //6 \text{ стени} \\
\ \{\{000,001,010,011,100,101,110,111\}\} \quad //1 \text{ обем} \\
\}
\end{array}$$

Обикновено хиперкубът се рисува като граф: само върховете и страните. Това означава, че 0-мерните и 1-мерните компоненти се изобразяват, а останалите, не. Така е много по-прегледно. Но ние знаем, че хиперкубът като комбинаторен обект е съвкупност от обектите от всички размерности, от 0 до n †. Ето типично изображение на 3-мерния хиперкуб:

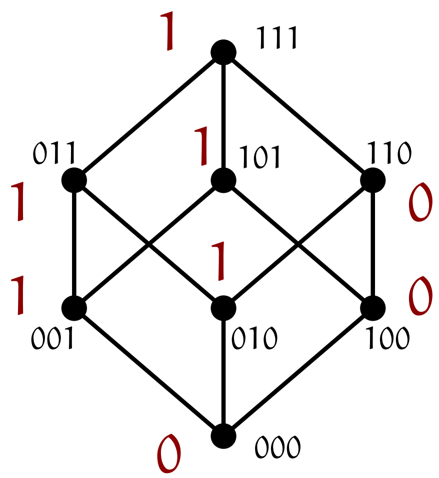
† Ако говорим за *граф-хиперкуб*, тогава имаме предвид обекта, който е съвкупност само от 0-мерните компоненти (върховете) и 1-мерните компоненти, които в този контекст наричаме "ребра". n-мерен граф-хиперкуб не е същото нещо като n-мерен хиперкуб: графът-хиперкуб е подмножество на хиперкуба. Хиперкубът съдържа и компонентите от размерности ≥ 2.



Върховете на n-мерния хиперкуб се разбиват на $n + 1$ *слоя*. Върховете от един слой са точно тези вектори, които имат един и същи брой единици. Броят на единиците може да е 0, 1, ..., n, затова и слоевете са $n + 1$. Когато говорим за слой k, $0 \leq k \leq n$, имаме предвид слоя от векторите, всеки от които има точно k единици. Очевидно слой k има $\binom{n}{k}$ вехктора в себе си. Ето същия хиперкуб, като четирите слоя са указани с различни цветове:



Всяка булева функция на n променливи може да бъде разглеждана като асоцииране на всеки връх на n-мерния хиперкуб (помним, че върховете му са точно n-векторите) с една булева стойност. Например, функцията $f = 01101001$ от миналата подсекция се изобразява върху хиперкуба така:



Стойностите на функцията върху векторите са написани с червено.

От казаното дотук изглежда, че каноничното представяне на дадена булева функция и представянето чрез хиперкуб са едно и също нещо. Всъщност, разлика има и тя е само в наредбата на векторите. При каноничното представяне, векторите са наредени лексикографски[†], а при представянето с хиперкуб те са наредени от частичната наредба $\preccurlyeq$, дефинирана по следния начин:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in J_2^n : \mathbf{a} \preccurlyeq \mathbf{b} \leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : a_i \leq b_i) \tag{1}$$

Това е частична наредба, която не е линейна, понеже има двойки вектори, които не са сравними (спрямо нея), например 011 и 100. Тази частична наредба е полезна за осмислянето на различни понятия и решаването на много задачи от областта на булевите функции. На горния пример всъщност е показана диаграмата на Hasse на частичната наредба $\preccurlyeq$ върху 3-векторите.

Както казахме вече, съседни вектори са такива, които се различават в точно една позиция[‡]. Съседството на вектори може да осмислим и в термините на хиперкуба: два негови вектора са съседни, ако са в съседни слоеве. Съседство на вектори може да осмислим и чрез релацията $\preccurlyeq$ (виж (1)). А именно, ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са n-вектори, то те са съседни тогава и само тогава, когато $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ или $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$, където релацията $\prec$ се дефинира така:

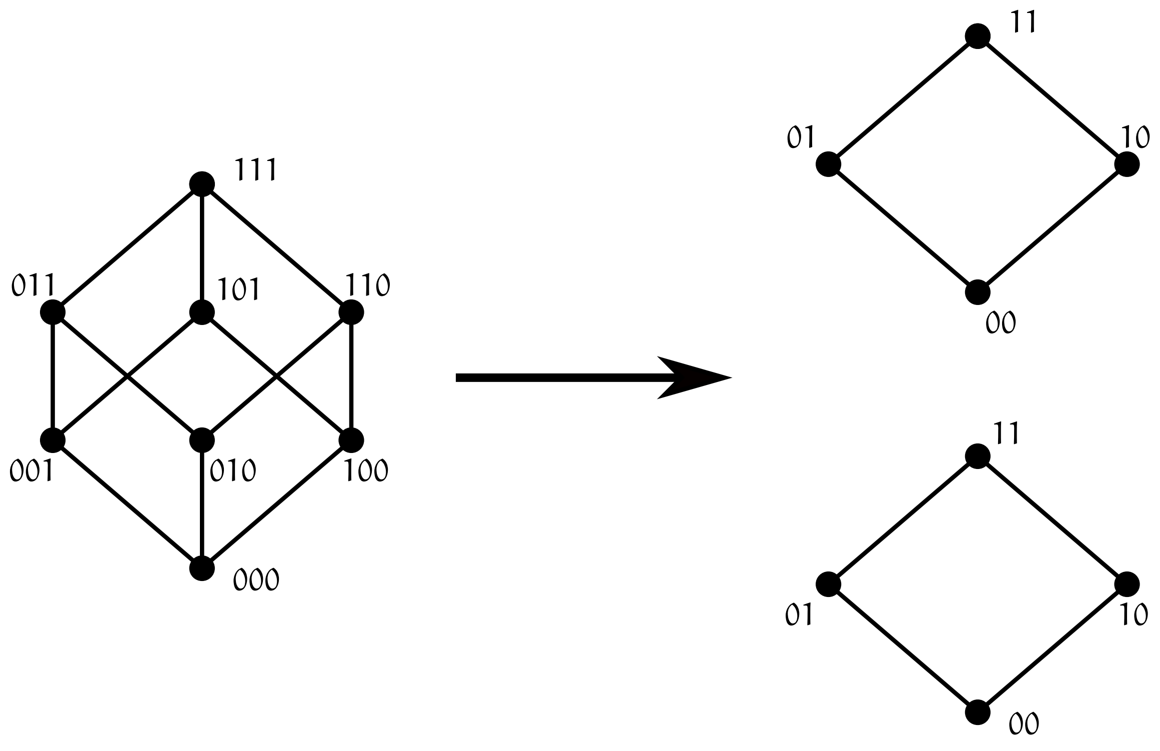
$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in J_2^n : \mathbf{a} \prec \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{a} \preccurlyeq \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \wedge \neg \exists \mathbf{c} (\mathbf{a} \preccurlyeq \mathbf{c} \preccurlyeq \mathbf{b}) \tag{2}$$

Например, $0010 \prec 0011$ и $0010 \prec 1010$, но $0010 \not\prec 1111$, въпреки че $0010 \preccurlyeq 1111$.

Срязване на n-мерния хиперкуб в i-тата димензия е понятие, което първо ще онагледим с пример. Ето срязване на 3-мерния хиперкуб във втората димензия:

[†]Лексикографската наредба е линейна.

[‡]Освен това, за да говорим за съседство на вектори, трябва те да имат една и съща дължина. При вектори с различни дължини за съседство не може да става дума.



За удобство, нека да мислим за хиперкуба като за граф-хиперкуб, тоест съвкупност от върхове и ребра. Срязването се състои в премахване на i-тата позиция на всички вектори-върхове, след което тяхната дължина става $n-1$, и премахването на точно тези ребра, които са от вида:

$$\{\alpha 0 \beta, \alpha 1 \beta\}$$

където α е булев вектор с дължина $i-1$, а β е булев вектор с дължина $n-i$. В примера със срязването на 3-мерния хиперкуб във втората дименсия, ребрата, които махаме, са точно

$$\{000, 010\}, \{001, 011\}, \{100, 110\}, \{101, 111\}$$

Ако гледаме на хиперкуба не като на граф, а като на "истински" хиперкуб с компоненти от всички възможни размерности, ясно е, че срязването води до изчезването на n-мерната компонента, както и до намаляването на броя на k-мерните компоненти от $\binom{n}{k}2^{n-k}$ на $\binom{n-1}{k}2^{n-k-1}$, тъй като резултатът от срязването е появата на два нови хиперкуба, всеки с размерност $n-1$.

От казаното досега може да не е ясно защо настояваме да се казва, че срязваме именно в i-тата размерност. Например, на последната фигура от един куб се получават два квадрата и по нищо не личи точно в коя от трите размерности е бил срязан куба. Отговорът на тази забележка е, че хиперкубът ни интересува в контекста на булевите функции, когато върховете му са "маркирани" с нули или единици – стойностите на булевата функция. При срязването асоциацията между върхове и стойности на функцията **се запазва**, така че в общия случай резултатът от срязването в различни размерности е **различен**.

1.5.3 Представяне чрез формули

Формула е чисто синтактично понятие. Средношколското разбиране за "формула" е "прост алгоритъм", например "формулата за лицето на кръг с радиус r е $S = \pi r^2$". Тук ние възприемаме съвсем друго разбиране за "формула". Формула е всеки стринг, конструиран над дадена азбука съгласно дадени правила. Етимологията на думата е следната: на латински "formula" е умалително от "forma". Не е грешка да казваме "форма" вместо "формула".

Формулите на булевите функции може да се дефинират индуктивно по следния начин. Да фиксираме изброимо безкрайно множество от булеви променливи $\{x_0, x_1, \ldots\}$. Нека Σ е азбуката:

$$\Sigma = \{f, x, 0, 1, \ldots, 9, (,), ,\}$$

С червено са записани буквите от езика, който ще опишем, а именно езика от формулите на булевите функции, а с черно са буквите от метаезика, който използваме, за да опишем езика от формулите на булевите функции. Нека $\Sigma_d = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Нека $\widetilde{\Sigma}$ е множеството от стрингове над Σ_d, които са валидни записи[†] на числа в десетична позиционна бройна система. Нека ι е стандартната десетична позиционна бройна система, тоест биекцията

$$\iota : \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{N}$$

която знаем от училище. Нека t е произволно изброяване на всички булеви функции, тоест биекция $t : \mathcal{F}_2 \to \mathbb{N}$. За удобство можем да вземем най-простото и естествено изброяване на булевите функции:

- за всяко $n \in \mathbb{N}$, ако $f \in \mathcal{F}_2^n$ и $g \in \mathcal{F}_2^{n+1}$, то $t(f) < t(g)$,
- за всяко $n \in \mathbb{N}$, ако $f, g \in \mathcal{F}_2^n$ и $f \neq g$, то $t(f) < t(g)$ тогава и само тогава, когато каноничното представяне на f предхожда лексикографски каноничното представяне на g.

Нека изброените от t булеви финкции са f_0, f_1 и така нататък. Тогава дефинираме "формула на булева функция" чрез следната индуктивна дефиниция.

Определение 1 (Формулите на булевите функции)**.** Всеки стринг $\phi \in \Sigma^+$ е *формула на булева функция* тогава и само тогава, когато в сила е точно едно от двете:

- **База.** $\phi = x\alpha$, където $\alpha \in \widetilde{\Sigma}$
- **Индуктивна стъпка.** $\phi = f\alpha(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$ където ϕ_1, ϕ_2, $\ldots$, ϕ_n са формули на булеви функции, $\alpha \in \widetilde{\Sigma}$ и $t^{-1}(\iota(\alpha))$ има точно n променливи[‡].

Въвеждаме и функцията ν, която се нарича *дълбочина на формулата*:

- В базовия случай, $\nu(\phi) \stackrel{\text{деф}}{=} 0$.
- В индуктивната стъпка, $\nu(\phi) \stackrel{\text{деф}}{=} \max\{\nu(\phi_1), \nu(\phi_2), \ldots, \nu(\phi_n)\} + 1$

Неформално, ако си представим съответна реализация чрез функционални елементи, то дълбочината на схемата е максималният брой функционални елементи, през които трябва да премине сигналът. □

Това дали дефинираме $x\alpha$—запис на номерирана променлива—като формула или не, е въпрос на наш избор. Ако не желаем това, може да усложним Определение 1 или, което е по-просто решение, да дефинираме допълнително, че *истинска формула на булева функция* е всяка формула с дълбочина поне единица.

[†] Например 0017 не е валиден запис заради двете водещи нули.

[‡] Забележете, че $\iota(\alpha)$ е число, а $t^{-1}(\iota(\alpha))$ е една от всички булеви функции, защото $t^{-1} : \mathbb{N} \to \mathcal{F}_2$.

Дотук сме дефинирали, чисто синтактично, формулите на булевите функции. Не сме казали нищо за техния смисъл, или, иначе казано, за тяхната *семантика*. Семантиката можем да дефинираме, използвайки индуктивната дефиниция на синтаксиса, като аналогът на синтактичната операция "вмъкване на стринг на мястото на подстринг" (има се предвид вмъкването на формулите ϕ_i на местата на имената на променливите) е семантичната "композиция на функция на мястото на променлива в друга функция". И така:

- семантиката на всяка формула с дълбочина нула $x\alpha$ е булевата променлива $x_{\iota(\alpha)}$.
- семантиката на всяка формула с дълбочина единица $f\alpha(x\beta_1, x\beta_2, \ldots, x\beta_n)$, където $\beta_i \in \widetilde{\Sigma}$ за $1 \leq i \leq n$, е булевата функция $f_i(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n})$, където $f_i = t^{-1}(\iota(\alpha))$ и x_{k_j} за $1 \leq j \leq n$ е булевата променлива, чийто индекс k_j е $\iota(\beta_j)$.
- семантиката на всяка формула с дълбочина повече от единица $\phi = f\alpha(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ е композицията на семантиките на $\phi_1, \ldots, \phi_n$ на местата на съответно първата, ..., n-тата променлива на функцията f_i, където $f_i = t^{-1}(\iota(\alpha))$.

Лесно се вижда, че при изредените правила булевата функция, която е семантиката на някаква формула, е **една единствена**, но обратното не е вярно: за всяка функция има **безброй много** формули, на които тя е семантика. Ако булевата функция f е семантиката на формулата ϕ ще казваме, че f *съответства на* ϕ.

Често срещана задача е: дадени са две формули, да се реши дали са еквивалентни, тоест дали съответната им булева функция е една и съща, или не. Това е частен случай на общата задача: дадени са два синтактични обекта (някакви стрингове, изградени по някакви правила), да се определи дали семантиката им е една и съща, или не, като семантиката е добре дефинирана функция.

Функциите, чиито формули ще използваме най-често, са "стандартните" булеви функции на две променливи: конюнкцията, дизюнкцията, импликацията, сумата по модул 2, стрелката на Peirce и чертата на Sheffer, а така също и отрицанието, което е функция на една променлива. Има смисъл множеството от функциите, чиито формули ще се ползват, да бъде пълно множество (вж. Секция 1.6).

1.6 Пълнота на множества от булеви функции

Нека $F \subseteq \mathcal{F}_2$. Неформално, множеството F е *пълно*, ако всяка булева функция $f \in \mathcal{F}_2$ може да бъде представена като композиция на функциите от F. Формално, нека $[F]$ означава затварянето на F спрямо композиция. Затварянето може да се дефинира чрез следната индуктивна дефиниция:

- $[F]$ съдържа всички функции от F.
- Нека f и g са произволни функции от $[F]$. Нека f има n променливи за някакво $n \geq 0$. Тогава композицията на g на мястото на i-тата променлива на f също се съдържа в $[F]$, за $1 \leq i \leq n$.

И така, F е пълно множество, ако $[F] = \mathcal{F}_2$.

Теорема 1 (теорема на Boole)**.** Множеството от трите булеви функции конюнкция, дизюнкция и отрицание е пълно. $\square$

1.7 Съвършена дизюнктивна нормална форма на булева функция

Нека са фиксирани краен брой булеви променливи $x_1, \ldots, x_n$ за $n \geq 1$. *Литерал* ще наричаме всяко име на променлива или всяко име на променлива с черта отгоре (отрицание). Литералите от първия вид се наричаме *положителни*, а от втория – *отрицателни*. Веднага подчертаваме, че литералите са **формули** и като такива са качествено различни от самите променливи, понеже формулите са понятия от синтактичното ниво, а променливите са от по-високото семантично ниво. Това, че използваме един и същи запис "x_1" и за името на променлива (което е формула), и за самата променлива, не води до объркване, защото опитният читател винаги може да разбере от контекста дали става дума за синтактичното ниво или за семантичното ниво. Примери за положителни литерали са x_1, x_4 и така нататък. Примери за отрицателни литерали са $\overline{x_1}$, $\overline{x_3}$ и така нататък.

Елементарна конюнкция е непразна формула, която се състои от конкатенация на литерали, такива че всяко име на променлива се появява най-много веднъж – било като положителен, било като отрицателен литерал. Ако променливите са $x_1, \ldots, x_6$, примери за елементарни конюнкции са $x_1x_3x_4$, $x_1\overline{x_4}$, $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, $\overline{x_3}$, $x_2\overline{x_5}\,\overline{x_6}$ и така нататък. Не е задължително, но е силно препоръчително имената да се записват отляво надясно в нарастващ ред на индексите. Тук подчертаваме, че "елементарна конюнкция" е формула, тоест понятие от синтактичното ниво. Но знаем, че думата "конюнкция" се използва и за добре известната булева функция на две променливи† и това може да бъде объркващо, защото последното понятие е от семантичното ниво.

Пълна елементарна конюнкция е елементарна конюнкция, която съдържа точно n литерала. С други думи, това е непразна формула, която се състои от конкатенация на литерали, такива че всяко име на променлива се появява точно веднъж – било като положителен, било като отрицателен литерал. Ако променливите са $x_1, \ldots, x_6$, примери за елементарни конюнкции са $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}\,x_6$ и така нататък. Не е задължително, но е силно препоръчително имената да се записват отляво надясно в нарастващ ред на индексите.

Дизюнктивна нормална форма, съкратено ДНФ, е формула, която се състои от една или повече различни‡ елементарни конюнкции, "слепени" помежду си със символа "$\vee$". В горния контекст, примери за ДНФ са $x_2\overline{x_3}x_4$, $x_1x_4 \vee x_2\overline{x_5}\,\overline{x_6} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}$ и така нататък. *Съвършена дизюнктивна нормална форма*, съкратено СъвДНФ е дизюнктивна нормална форма, в която участват само пълни елементарни конюнкции. В горния контекст, пример за СъвДНФ е $x_1\overline{x_2}x_3x_4x_5x_6 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}\,\overline{x_6}$.

Семантиката на литералите, елементарните конюнкции и ДНФ е очевидната: чертата отговаря на функцията отрицание, конкатенацията, на функцията конюнкция и слепването с "$\vee$", на функцията дизюнкция. Като пример да разгледаме формулата (тя е СъвДНФ, ако $n = 6$)

$$\phi = x_1\overline{x_2}x_3x_4x_5x_6 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}\,\overline{x_6}$$

Очевидно, нейната семантика е булевата функция—да я наречем h—на шестте променливи x_1, $\ldots$, x_6, която има стойност 1 върху векторите 000000 и 101111 и има стойност 0 върху всички останали, 62 на брой, вектори. Сега да си представим, че трябва да запишем h чрез формула, изградена съгласно индуктивното Определение 1. Естествено, има безброй начини да сторим това, но нека се опитаме да напишем формула, която е аналогична на ϕ. Лесно се вижда, че ни трябват формули за функциите отрицание, конюнкция и дизюнкция. Функцията h е равна

†Която е 1 тстк и двете ѝ променливи са 1.

‡Кога две елементарни конюнкции са различни? Ако настояваме индексите на променливите да са в нарастващ ред отляво надясно, то две елементарни конюнкции са различни тстк са различни като стрингове. Без това ограничение можем да дефинираме "различни формули" чрез разлика в семантиките.

на някаква композиция от тези функции[†], а именно на дизюнкция от някакви конюнкции. Аналогът на това в синтактичния свят на формулите е: че формула за h може да бъде получена, като във формула за дизюнкция заместим стринговете-имена на променливи с някакви формули за конюнкции.

Да направим формула за h точно по Определение 1, като използваме червен цвят за буквите ѝ. Функциите отрицание, конюнкция и дизюнкция имат номера съответно 4, 7 и 13 в изброяването t, тоест, това са съответно f_4, f_7 и f_{13}. Ето пример за формула, съответна на h:

$$\begin{aligned}\psi = {} & \mathrm{f13(f7(x1, f7(f4(x2), f7(x3, f7(x4, f7(x5, x6))))),}\\ & \mathrm{f7(f4(x1), f7(f4(x2), f7(f4(x3), f7(f4(x4), f7(f4(x5), f4(x6))))))}\end{aligned}$$

Очевидно ϕ е несравнимо по-лека за четене от ψ, макар че са еквивалентни, имайки една и съща семантика. Може да възникне въпросът, защо изобщо ползваме тромавата конструкция на Определение 1, след като има начин да се записват еквивалентни формули, които са много по-лесни за четене. Отговорът е, че конструкцията на Определение 1 има чисто теоретично значение. Там искахме да дефинираме прецизно и кратко "формула" и "функция, съответна на формула", а не сме имали за цел получените формули да са кратки и ясни. Говорейки за ДНФ искаме друго – кратък и много ясен запис на формулите. За тази цел е много по-удачно да се въведат литерали и елементарни конюнкции и чрез тях и буквите "$\vee$" да се дефинират ДНФ.

Доказателството на теоремата на Boole се основава на факта, че всяка булева функция на ≥ 1 променливи, която не е константа-нула, има една единствена СъвДНФ.

1.8 Разни

Функция (може дори да не е булева, но типовете на променливите трябва да са едни и същи) на n променливи, да я наречем $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се нарича *симетрична*, ако стойността ѝ се запазва при всяка пермутация на променливите. С други думи,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

за всяка пермутация $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$ на вектора $1, 2, \ldots, n$. Например, ако $n = 3$, то:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3, x_2) = f(x_2, x_1, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = f(x_3, x_1, x_2) = f(x_3, x_2, x_1)$$

Ако пък $n = 2$, то:

$$f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$$

Очевидно комутативността е частен случай на симетричността.

2 Задачи

Задача 1. Намерете $|\mathcal{F}_2^n|$.

Решение: Добре известно е, че броят на тоталните функции с краен домейн X и краен кодомейн Y е $|Y|^{|X|}$. Прилагаме тази формула с $|X| = 2^n$ и $|Y| = 2$ и получаваме $|\mathcal{F}_2^n| = 2^{2^n}$. $\square$

[†] Тази композиция не е единствена заради комутативността на дизюнкцията и конюнкцията.

Задача 2. Нека

$$S = \left\{ f \in \mathcal{F}_2^n \,|\, \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in J_2^n : \mathbf{w} = \overline{\mathbf{z}} \to f(\mathbf{w}) = \overline{f(\mathbf{z})} \right\}$$

Намерете $|S|$ (като функция на n, разбира се).

Решение: С други думи, търси се броят на булевите функции, които върху противоположни вектори имат противоположни стойности[†].

Да групираме n-векторите по двойки $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, такива че $\mathbf{a} = \overline{\mathbf{b}}$. За всяка функция $f \in X$ и за всяка от тези двойки е изпълнено следното. Стойността на функцията върху единия елемент от двойката се определя от стойността на функцията върху другия елемент от двойката. Иначе казано, стойностите, които функцията има върху *половината* от n-векторите, я определят напълно.

Но n-векторите са 2^n, така че половината от тях са $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$ на брой. Имайки предвид това, виждаме, че броят на въпросните функции е равен на броя на всички булеви функции върху $n-1$ променливи. Отговорът е $|S| = 2^{2^{n-1}}$. □

Задача 3. Нека

$$X = \left\{ f \in \mathcal{F}_2^n \,|\, \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in J_2^n : \mathbf{w} = \overline{\mathbf{z}} \to f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{z}) \right\}$$

Намерете $|X|$.

Решение: В тази задача се търси броят на функциите, които имат една и съща стойност върху противоположни вектори. Отговорът е $|X| = 2^{2^{n-1}}$ със практически същите съображения като в решението на Задача 2. □

Задача 4. Намерете броя на булевите функции на n променливи, които имат стойност 1 върху точно k вектора.

Решение: Отговорът очевидно е $\binom{2^n}{k}$. □

Задача 5. Да се намери броят на симетричните булеви функции на n променливи.

Решение: Съгласно определението на симетрична функция, става дума за булеви функции, които запазват стойността си при произволно разместване на стойностите на елементите на входния вектор. Входният вектор се състои от нули и единици, следователно се иска върху всички входни вектори **с един и същи брой единици**, стойността на функцията да е една и съща. С други думи, иска се върху всеки слой на хиперкуба функцията да има една и съща стойност. Слоевете на n-мерния хиперкуб са $n+1$, върху всеки от тях стойността е една и съща, а стойностите върху различни слоеве са произволни една спрямо друга. Тогава отговорът е 2^{n+1}. □

Задача 6. Кои са симетричните булеви функции на 2 променливи?

Решение: С други думи, кои са комутативните функции, тъй като при $n = 2$, свойството симетричност съвпада със свойството комутативност. Съгласно Задача 5, тези функции са

[†] Такива функции се наричат *самодвойнствени* (на английски *self-dual*). Просто *двойнствена* функция на $f \in \mathcal{F}_2^n$ е единствената $g \in \mathcal{F}_2^n$, за която е изпълнено $\forall \mathbf{a} \in J_2^n : g(\mathbf{a}) = \overline{f(\overline{\mathbf{a}})}$. Самодвойнствените функции са тези, които са двойнствени на себе си.

$2^{2+1} = 8$ на брой. В каноничното представяне, това са функциите

$$\begin{aligned}
f_0 &= 0000\\
f_1 &= 0001\\
f_6 &= 0110\\
f_7 &= 0111\\
f_8 &= 1000\\
f_9 &= 1001\\
f_{14} &= 1110\\
f_{15} &= 1111
\end{aligned}$$

□

Задача 7. Да се определи броят на булевите функции на n променливи за $n \geq 2$, които запазват стойността си при размяна на променливите x_1 и x_2.

Решение: С други думи, иска се

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$$

за всички възможни стойности на x_1, …, x_n. Решението ще получим след като съобразим колко различни входни вектори има по отношение на тази задача.

Лесно се вижда, че ако $x_1 = x_2 = 0$ или $x_1 = x_2 = 1$, разместването на x_1 и x_2 няма значение и функцията запазва стойността си по очевидни причини при разместването на x_1 и x_2. Да разбием множеството от всички входни вектори на 4 равномощни подмножества съгласно четирите възможности за подвектора x_1x_2:

$$\begin{aligned}
A &= 0 \times 0 \times \underbrace{J_2 \times \cdots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}}\\
B &= 0 \times 1 \times \underbrace{J_2 \times \cdots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}}\\
C &= 1 \times 0 \times \underbrace{J_2 \times \cdots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}}\\
D &= 1 \times 1 \times \underbrace{J_2 \times \cdots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}}
\end{aligned}$$

Всяко от тези множества има мощност 2^{n-2}. Да разгледаме булевите функции на n променливи без ограничения. Всяка булева функция на n променливи без ограничения има 2^{n-2} стойности върху векторите от A, върху векторите от B, върху векторите от C и върху векторите от D. Всички тези стойности на функцията, на брой $4 \times 2^{n-2} = 2^n$ може да са единици или нули независимо една от друга, откъдето и броят на всички функции е $= 2^{2^n}$.

Ако имаме предвид ограничението от условието на задачата, виждаме, че върху всеки вектор от C, стойността на функцията трябва да съвпада със стойността ѝ върху точно един вектор от B. От друга страна, върху векторите от A стойностите на функцията са произволни – без значение какви стойности има върху останалите три множества. Аналогично, върху векторите от D стойностите на функцията са произволни – без значение какви стойности има върху останалите три множества.

За да получим броя на търсените функции, достатъчно е да игнорираме едно от множествата B и C, да кажем, че игнорираме C, и да разглеждаме само A, B и D. За всеки вектор $\mathbf{z} \in A \cup B \cup D$, стойността на функцията е независима от стойността ѝ върху кой да е друг вектор $\mathbf{z}' \in A \cup B \cup D$. Тогава отговорът е

$$2^{2^{|A|+|B|+|D|}} = 2^{3 \times 2^{n-2}}$$

Ако заместим $n = 2$, получаваме 2^3, което точно съвпада с отговора на Задача 6. □

Задача 8. Да се намери броят на булевите функции на n променливи, които приемат стойност 1 върху поне една двойка противоположни входни вектори.

Решение: Отговорът очевидно е $= 2^{2^n} - |A|$, където A е множеството от булевите функции на n променливи, които не приемат стойност 1 върху никои два противоположни вектора. С други думи, за всеки входен вектор $\mathbf{a}$ и за всяка функция $f \in A$ е изпълнено:

$$(f(\mathbf{a}) = 0 \wedge f(\overline{\mathbf{a}}) = 0) \vee \tag{3}$$
$$(f(\mathbf{a}) = 0 \wedge f(\overline{\mathbf{a}}) = 1) \vee \tag{4}$$
$$(f(\mathbf{a}) = 1 \wedge f(\overline{\mathbf{a}}) = 0) \tag{5}$$

Двойките противоположни вектори на брой са $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$. За всяка такава двойка показахме, че възможностите са точно 3 (за да може функцията да бъде от A). И така, $|A| = 3^{2^{n-1}}$. Отговорът тогава е

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} \tag{6}$$

Тук може да възникне следното питане. Щом $2^{2^n} - 3^{2^{n-1}}$ е мощността на непразно множество, то очевидно това е положително число за всяко n. Ако обаче не знаем комбинаторните съображения, довели до отговора, а просто видим $2^{2^n} - 3^{2^{n-1}}$, може да се запитаме, това не може ли да е отрицателно за някакви n. С помощта на математическия анализ можем да докажем, че не може да е отрицателно при неограничено нарастване на n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2^n}}{3^{2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2^n}}{2^{(\log_2 3)2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{(2^n - (\log_2 3)2^{n-1})} = \lim_{n\to\infty} 2^{(2-\log_2 3)2^{n-1}} = \infty$$

понеже $2 > \log_2 3$.

Следното доказателство на същото твърдение е на Добромир Кралчев:

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} = 2^{2\times 2^{n-1}} - 3^{2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}} - 3^{2^{n-1}} > 0$$

Тази задача може да се реши и с други съображения. Нека B е подмножеството на $\mathcal{F}_2^n$ от функциите, които приемат стойност 1 върху поне една двойка противоположни вектори. Ние търсим $|B|$. Нека B_k за $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ е подмножеството от тези функции, които приемат стойност 1 върху точно k двойки противоположни вектори. Очевидно B се разбива на B_1, …, $B_{2^{n-1}}$, така че

$$|B| = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |B_k|$$

Лесно се вижда, че

$$|B_k| = \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)}$$

Съображенията са следните: по $\binom{2^{n-1}}{k}$ начина можем да изберем от всички 2^{n-1} двойки противоположни вектори такива, върху които функцията да има стойност 1, а за всяка от останалите $2^{k-1}-k$ двойки вектори имаме точно 3 възможности (виж (3)), така щото функцията да няма стойност 1 върху двата елемента на двойката. И така, отговорът е:

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)} \tag{7}$$

От (6) и (7) извеждаме (с комбинаторни разсъждения) тъждеството:

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)}$$

□

Задача 9. За колко булеви функции f на n променливи е изпълнено следното: ако $f(\mathbf{a})$ има стойност 1, то f има стойност 1 върху всеки вектор, който има поне толкова единици, колкото $\mathbf{a}$?

Решение: С други думи, ако f има стойност 1 върху някакъв вектор $\mathbf{a}$, то f има стойност 1 върху всички вектори от слоя на хиперкуба, към който слой принадлежи $\mathbf{a}$, и освен това f има стойност 1 върху всички вектори от всички следващи слоеве. Веднага се вижда, че всяка такава функция има една и съща стойност върху всеки слой на хиперкуба и се определя еднозначно от това, къде е "границата" между нулите и единиците върху хиперкуба;. По-подробно казано, върху някакви последователни слоеве на хиперкуба (може и да няма такива), започвайки от слой 0, функцията има стойност само 0, и после върху всички останали слоеве (може и да няма такива), функцията има стойност само 1. Тъй като слоевете са $n+1$, то има точно $n+2$ такива функции. □

Задача 10. За колко булеви функции f на n променливи е изпълнено следното: ако $f(\mathbf{a})$ има стойност 1, то f има стойност 1 върху всеки вектор, който има повече единици от $\mathbf{a}$?

Решение: Задачата е подобна на Задача 9, но само донякъде. В Задача 10:

- или има някакъв "граничен слой" в хиперкуба, нека да е слой k, в който за първи път се появява стойност на функцията 1, като върху всички слоеве с по-малък номер функцията е задължително 0, а върху всички слоеве с по-голям номер функцията е задължително 1,
- или такъв граничен слой няма, тоест изобщо няма единици, тоест функцията е константа-нула[†].

[†]Благодарности на Добромир Кралчев за посочването на това!

Първо да сметнем колко са функциите от търсения вид, които имат поне една единица (с други думи, не са константа-нула). Числото k (номерът на граничния слой) може да е най-малко 0 и най-много n. Тъй като в слоеве с номера $0, \ldots, k-1$ и $k+1, \ldots, n$ нещата са фиксирани, единственото, което варира, е как точно са "раздадени" нулите и единиците в слой k по такъв начин, че да има поне една единица.

Знаем, че слой k има мощност $\binom{n}{k}$. Всички начини да "раздадем" нули и единици на неговите елементи са $2^{\binom{n}{k}}$ на брой. От това число вадим единица, за да отразим факта, че върху поне един вектор от слой k функцията е единица (с други думи, изваждаме от разглеждането раздаването само на нули). И така, за дадено k, броят на начините функцията да има поне една единица върху векторите на слой k е $2^{\binom{n}{k}} - 1$. А отговорът, съгласно принципа на разбиването, е:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(2^{\binom{n}{k}}\right) - n - 1 \tag{8}$$

Към (8) добавяме единица, защото функцията може да е константа-нула, и получаваме

$$\sum_{k=0}^{n} \left(2^{\binom{n}{k}}\right) - n$$

□

Задача 11. Да се намери броят на булевите функции на n променливи, които нямат фиктивни променливи.

Решение: Очевидно отговорът е $= 2^{2^n} - |A|$, където A е множеството от булевите функции, които имат поне една фиктивна променлива.

Да разгледаме без ограничение на общността променливата x_1. В колко функции тя е фиктивна? Може да има и други фиктивни променливи, може и да няма – пита се, за колко функции е изпълнено x_1 да е фиктивна? От дефиницията на фиктивна променлива имаме изискването за всяка от тези функции, да кажем f, да е изпълнено:

$$f(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Ако си представим входните вектори, наредени лексикографски отгоре надолу, иска се функцията (която е колона с височина 2^n) да е такава, че горната половина на колоната да е точно като долната половина. Ето малък пример за функция, в която x_1 е фиктивна:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Виждаме, че за да бъде x_1 фиктивна, стойността на функцията върху половината вектори определя стойността ѝ върху другата половина. Броят на функциите, в които x_1 е фиктивна, е $2^{2^{n-1}}$.

Всяка променлива на функцията може да е фиктивна. Но отговорът на въпроса, колко са функциите с поне една фиктивна променлива, **не е** $n \times 2^{2^{n-1}}$, тъй като този израз брои някои функции по няколко пъти. Може да има повече от една фиктивна променлива. Ето пример за функция, в която и x_1, и x_2 са фиктивни:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

От $n \times 2^{2^{n-1}}$ ще изваждаме по принципа на включването и изключването: ще намерим колко са функциите, в които поне две променливи са фиктивни, в колко поне три са фиктивни, и така нататък, в колко поне n са фиктивни, и ще построим израз с алтерниращи положителни и отрицателни знаци съгласно принципа на включването и изключването.

Броят на функциите с поне две фиктивни променливи е $\binom{n}{2} \times 2^{2^{n-2}}$, защото по $\binom{n}{2}$ начина избираме кои да са променливите и след това забелязваме, че една четвърт от входните вектори определят функцията напълно в смисъл, че върху останалите стойностите ѝ повтарят тези от четвъртинката. Аналогично, броят на функциите с поне три фиктивни променливи е $\binom{n}{3} \times 2^{2^{n-3}}$.

И така, броят на функциите с поне една фиктивна променлива е:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$$

Тогава броят на функциите без фиктивни променливи е:

$$2^{2^n} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$$

□

Задача 12. Дадени са булевите функции $f = 1011$ и $g = 1001$. Да се намери каноничното представяне на функцията $h(x_2, x_4, x_3) = f(g(x_4, x_3), x_2)$.

Решение: Имената на променливите са дадени по този начин за объркване. С просто преименуване получаваме еквивалентен израз $h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_2, x_3), x_1)$. Каквито и имена на променливи да ползваме, става дума за 3 променливи и таблицата на търсената функция трябва да има 8 реда:

x_1	x_2	x_3	$h(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?
1	1	1	?

Това, че f и g са дадени без имена на променливите няма никакво значение. Очевидно $f(00) = 1$, $g(00) = 1$, $f(01) = 0$ и така нататък. Функцията h е дефинирана като $h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_2, x_3), x_1)$. Заместваме в таблицата:

x_1	x_2	x_3	$f(g(x_2, x_3), x_1)$
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?
1	1	1	?

Ще пресмятаме отвътре навън, тъй като тази функция е композиция на $g(x_2, x_3)$ на мястото на първата променлива на f. И така, да видим какви са стойностите на $g(x_2, x_3)$ в таблицата. Те са еднозначно определени, защото на всеки ред x_2 и x_3 си имат някакви стойности, а от каноничната дефиниция на g знаем какви са функционалните ѝ стойности върху всеки вход.

x_1	x_2	x_3	$g(x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Тук никъде не ползвахме най-лявата колона, защото g не зависеше от x_1. В следващата стъпка от решението пък няма да ползваме колоните на x_2 и x_3, защото f зависи непосредствено само от стойностите на g и от x_1:

x_1	x_2	x_3	$g(x_2, x_3)$	$f(g(x_2, x_3), x_1)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

За да се убедим, че е така, да си припомним дефиницията $f = 1011$. Функцията f е нула тогава и само тогава, когато входът е 01. На горните четири реда $x_1 = 0$, а в израза $f(g(x_2, x_3), x_1)$, x_1 е втората променлива, така че на горните четири реда функцията е четири единици. На долните четири реда, $x_1 = 1$, така че функцията просто повтаря стойностите на $g(x_2, x_3)$. □

Задача 13. Нека $f = 1000$ и $g = 0001$. Да се намери каноничната форма на функцията $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$

Решение:

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2)$	$g(x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0

И така, $h = 0111\,0000\,0000\,0000$. □

Задача 14. Дадени са следните функции чрез формули:

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= xy \oplus xz \oplus yz \\
g(x, y, z) &= (x \to y) \oplus ((y \to z) \oplus (z \to y)) \\
h(x, y, z) &= (x \to y)(y \to z) \to (x \to z)
\end{aligned}
$$

Да се намерят каноничните представяния на функциите.

Отговор:

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= 00010111 \\
g(x, y, z) &= 10010101 \\
h(x, y, z) &= 11111111
\end{aligned}
$$

□

Задача 15. Еквивалентни ли са следните две формули:

$$
\begin{aligned}
&((x \oplus y) \to (x \vee y))((\overline{x} \to y) \to (x \oplus y)) \\
&x|y
\end{aligned}
$$

Решение: Да, еквивалентни са. Ще решим задачата с табличния метод (таблиците не са показани). Първата формула е конюнкция от $\tilde{1} = ((x \oplus y) \to (x \vee y))$ и $1110 = ((\overline{x} \to y) \to (x \oplus y))$, която е очевидно 1110. А долната формула—чертата на Sheffer—е на функцията 1110 по дефиниция. □

Задача 16. Докажете чрез еквивалентни преобразувания следните еквивалентности:

- $x \to (xy \to ((x \to y) \to y)z) = y \to (x \to z)$.
- $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

- $\overline{x}(y \oplus z) = \overline{x \vee ((y \to z)(z \to y))}$.

Разрешените еквивалентни преобразувания са всички свойства на булевите функции на две променливи, дадени в учебника, и освен това свойството на импликацията $x \to y = \overline{x} \vee y$ и свойството на сумата по модул две $x \oplus y = \overline{x}y \vee x\overline{y}$, свойството на еквивалентността $x \equiv y = xy \vee \overline{xy}$, свойството на чертата на Sheffer $x|y = \overline{xy}$ и свойството на стрелката на Peirce $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

Решение: Ще покажем само последната еквивалентност, която е

$$\overline{x}(y \oplus z) = \overline{x \vee (\underbrace{(y \to z)(z \to y)}_{A})}$$

Да разгледаме израза $A = (y \to z)(z \to y)$. В сила е:

$$\begin{aligned} A &= (y \to z)(z \to y) \quad \text{// свойство на импликацията} \\ &= (\overline{y} \vee z)(\overline{z} \vee y) \quad \text{// дистрибутивност на конюнкцията над дизюнкцията} \\ &= \overline{y}\,\overline{z} \vee \underbrace{\overline{y}y}_{0} \vee \underbrace{z\overline{z}}_{0} \vee zy \\ &= yz \vee \overline{y}\,\overline{z} \end{aligned}$$

И така, дясната страна е еквивалентна на

$$\begin{aligned} &\overline{x \vee yz \vee \overline{y}\,\overline{z}} = \quad \text{// De Morgan} \\ &\overline{x}\,\overline{yz}\,\overline{\overline{y}\,\overline{z}} = \quad \text{// De Morgan} \\ &\overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z})(\overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}) = \overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z})(y \vee z) = \overline{x}(\overline{y}y \vee \overline{y}z \vee \overline{z}y \vee \overline{z}z) = \\ &\overline{x}(\overline{y}z \vee \overline{z}y) = \overline{x}(y \oplus z) \end{aligned}$$

□

Задача 17. Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че x_1 е фиктивна променлива в следните функции:

- $f(x_1, x_2) = (x_2 \to x_1)(x_2 \downarrow x_2)$.
- $g(x_1, x_2) = (x_2 \equiv x_1) \vee (x_1|x_2)$.
- $h(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \oplus x_2) \to x_3)(\overline{x_3 \to x_2})$.

Решение:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_2 \to x_1)(x_2 \downarrow x_2) = (x_2 \to x_1)\left(\overline{x_2 \vee x_2}\right) = (x_2 \to x_1)\overline{x_2} = \\ &(\overline{x_2} \vee x_1)\overline{x_2} = \overline{x_2}\,\overline{x_2} \vee x_1\overline{x_2} = \overline{x_2} \vee x_1\overline{x_2} = \overline{x_2}(1 \vee x_1) = \overline{x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= (x_2 \equiv x_1) \vee (x_1|x_2) = (x_1x_2 \vee \overline{x_1x_2}) \vee (\overline{x_1x_2}) = x_1x_2 \vee \overline{x_1x_2} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \\ &x_1x_2 \vee \overline{x_1}(\overline{x_2} \vee 1) \vee \overline{x_2} = x_1x_2 \vee \overline{x_1}1 \vee \overline{x_2} = x_1x_2 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \\ &x_1x_2 \vee \overline{x_1x_2} = \quad \text{// нека } x_1x_2 = p \\ &p \vee \overline{p} = 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h(x_1, x_2, x_3) = {} & ((x_1 \oplus x_2) \to x_3)(x_3 \to x_2) = (\overline{x_1 \oplus x_2} \vee x_3)(\overline{\overline{x_3} \vee x_2}) = \\
& (\overline{x_1 \oplus x_2} \vee x_3)(\overline{\overline{x_3}}\;\overline{x_2}) = (\overline{x_1 \oplus x_2} \vee x_3)\overline{x_2}x_3 = (\overline{x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2} \vee x_3)\overline{x_2}x_3 = \\
& ((\overline{x_1\overline{x_2}}\;\overline{\overline{x_1}x_2}) \vee x_3)\overline{x_2}x_3 = ((\overline{x_1} \vee \overline{\overline{x_2}})(\overline{\overline{x_1}} \vee \overline{x_2}) \vee x_3)\overline{x_2}x_3 = \\
& ((\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2}) \vee x_3)\overline{x_2}x_3 = ((\overline{x_1}x_1 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_2x_1 \vee x_2\overline{x_2}) \vee x_3)\overline{x_2}x_3 = \\
& ((\overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_2x_1) \vee x_3)\overline{x_2}x_3 = (\overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_2x_1 \vee x_3)\overline{x_2}x_3 = \\
& \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_2}x_3 \vee x_2x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_3\overline{x_2}x_3 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee 0 \vee \overline{x_2}x_3 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_2}x_3 = \\
& (\overline{x_1} \vee 1)\overline{x_2}x_3 = 1\overline{x_2}x_3 = \overline{x_2}x_3
\end{aligned}
$$

□

Задача 18. Докажете, че всяка симетрична булева функция, различна от константа, има само съществени променливи.

Решение: Да наречем тази функция f. Нека n е броят на нейните променливи. Щом f не е константа, f има стойност 0 върху поне един вектор и стойност 1 върху поне един вектор. Съгласно расъжденията в решението на Задача 5, за всеки слой на n-мерния хиперкуб, f има една и съща стойност върху всички вектори от този слой. Лесно се вижда, че в хиперкуба има съседни слоеве (тоест, единият има една единица повече от другия), такива че f има стойност 0 върху единия от тях и стойност 1 върху другия от тях.

Без ограничение на общността, нека f има стойност 0 върху всички вектори от слой k и стойност 1 върху всички вектори от слой $k+1$, за някое k, такова че $0 \leq k \leq n-1$. Ще докажем едно помощно твърдение, чиято важност налага да го обособим като лема. Използваме контрапозитивното твърдение[†] на Лема 1 и търсеният резултат следва веднага.

Лема 1. Ако $f \in \mathcal{F}_2^n$ има поне една фиктивна променлива, то за всеки два съседни слоя L_k и L_{k+1} на n-мерния хиперкуб съществува вектор $\mathbf{a} \in L_k$ и съществува вектор $\mathbf{b} \in L_{k+1}$, такива че $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$.

Доказателство: Нека x_i е фиктивната променлива. По дефиниция:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$$

за всяко "раздаване" на (булеви) стойности на x_1, x_2, …, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, …, x_n.

Да разгледаме произволно k, такова че $0 \leq k \leq n-1$. Очевидно съществува поне едно "раздаване"[‡] на стойности на x_1, x_2, …, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, …, x_n, което "дава" точно k единици на променливите x_1, x_2, …, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, …, x_n. Да разгледаме кое да е раздаване, даващо k единици, и да го наречем ϕ. По отношение на ϕ, векторът

$$\mathbf{a} = x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$$

има точно k единици, а векторът

$$\mathbf{b} = x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$$

има точно $k+1$ единици[§]. Но $\mathbf{a}$ е вектор от слой k и $\mathbf{b}$ е вектор от слой $k+1$ на хиперкуба. **QED**

[†] Контрапозитивното е "Ако съществуват съседни слоеве L_k и L_{k+1} на хиперкуба, такива че $\forall \mathbf{a} \in L_k \forall \mathbf{b} \in L_{k+1} : f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$, то f няма фиктивни променливи".

[‡] По-точно казано, има точно $\binom{n-1}{k}$ такива "раздавания".

[§] Забележете, че след като изберем такова ϕ и разглеждаме нещата по отношение на него, символите x_1 и така нататък вече не са променливи, а са конкретни булеви стойности.

□

Следващата задача ползва релацията $\preccurlyeq$, дефинирана в (1).

Задача 19. Да разгледаме някаква $f \in \mathcal{F}_2^n$, такава че съществуват k вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ за някакво $k \geq 2$, такива че

$$\mathbf{a}_1 \preccurlyeq \mathbf{a}_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \mathbf{a}_k$$
$$f(\mathbf{a}_1) \neq f(\mathbf{a}_2) \neq \cdots \neq f(\mathbf{a}_k)$$

Да се докаже, че функцията има поне $k-1$ съществени променливи.

Решение: Релацията $\preccurlyeq$ е рефлексивна, но от второто ограничение следва, че векторите са два по два различни. Да си припомним и релацията $\prec$, дефинирана в (2). Очевидно, по отношение на $\preccurlyeq$ има верига

$$\mathbf{a}_1 \prec \mathbf{b}_{1,1} \prec \cdots \prec \mathbf{b}_{1,t_1} \prec \mathbf{a}_2 \prec \mathbf{b}_{2,1} \prec \cdots \prec \mathbf{b}_{2,t_2} \prec \cdots \prec \mathbf{a}_{k-1} \prec \mathbf{b}_{k-1,1} \prec \cdots \prec \mathbf{b}_{k-1,t_{k-1}} \prec \mathbf{a}_k$$

Твърдим, че в тази верига има поне $k-1$ различни съседни двойки вектори[†], такива че функцията има противоположни стойности върху векторите от всяка двойка. Това твърдение е очевидно и няма да го доказваме. Векторите от всяка двойка се различават в точно една позиция, следователно са вектори от два съседни слоя на хиперкуба. Прилагаме контрапозитивното твърдение на Лема 1 и виждаме, че функцията има $k-1$ фиктивни променливи.

Факта, че всяка двойка двойки задава **различни** фиктивни променливи, поради което заключаваме, че променливите не може да са по-малко от $k-1$, е очевиден. □

Задача 20. Нека $f, g \in \mathbf{F}_2^n$ са такива, че $f(\mathbf{a}) \oplus g(\mathbf{a}) = 1$ за точно нечетен брой вектори $\mathbf{a} \in J_2^n$. Да се докаже, че всяка променлива е съществена за поне едната от функциите f и g.

Решение: Ограничението "$f(\mathbf{a}) \oplus g(\mathbf{a}) = 1$ за точно нечетен брой вектори" е същото като "f и g се различават върху точно нечетен брой вектори" – това следва тривиално от дефиницията на функцията $\oplus$.

И така, двете функции имат противоположни стойности върху подмножество на J_2^n с нечетна мощност. Да допуснем, че съществува променлива x_i, която е фиктивна и за двете функции. По дефиниция:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$$
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$$

за всяко раздаване на 0 и 1 на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$.

Да си представим и двете функции едновременно върху хиперкуба – да си представим n-мерния хиперкуб и до всеки негов връх, стойността на функцията f в червено и стойността на функцията g в синьо.

Да срежем хиперкуба в i-тата размерност. Получаваме два хиперкуба, всеки от размерност $n-1$. За произволен връх u от единия получен $(n-1)$-мерен хиперкуб, ако v е неговият съответен връх[‡] в другия $(n-1)$-мерен хиперкуб, ясно е, че $f(u) = f(v)$ и $g(u) = g(v)$ – това е заради фиктивността на x_i по отношение и на f, и на g.

Следователно, броят на върховете, върху които f и g имат **една и съща стойност** в единия $(n-1)$-мерен хиперкуб е равен на броя на върховете, върху които f и g имат **една и съща стойност** в другия $(n-1)$-мерен хиперкуб. А оттук следва, че броят на върховете,

[†]Две такива двойки може да имат общ елемент, въпреки че са различни като двойки.

[‡]"Съответен връх" означава, че има същия етикет, тоест $(n-1)$-мерен булев вектор.

върху които f и g имат **различна стойност** в единия $(n-1)$-мерен хиперкуб е равен на броя на върховете, върху които f и g имат **различна стойност** в другия $(n-1)$-мерен хиперкуб. Но броят на върховете, върху които f и g се различават в оригиналния (преди срязването) n-мерен хиперкуб, е равен на сумата от броя на върховете, върху f и g се различават върху единия получен $(n-1)$-мерен хиперкуб и броя на върховете, върху f и g се различават върху другия получен $(n-1)$-мерен хиперкуб. Щом двете събираеми са равни, тяхната сума е четно число. Тогава броят на върховете, върху които f и g се различават в оригиналния (преди срязването) n-мерен хиперкуб, е четна. Което противоречи на условието на задачата. □

Задача 21. Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че следните две формули не са еквивалентни:

$$
\begin{aligned}
U &= (x \downarrow \overline{y}) \rightarrow \big(\overline{x}\,\overline{z} \rightarrow ((\overline{x}|(y \equiv z)) \vee (\overline{xy} \vee z))\big) \\
V &= ((x \rightarrow y)|(x \downarrow (y\overline{z})) \vee \overline{yz}
\end{aligned}
$$

Разрешените еквивалентни преобразувания са тези от Задача 16.

Решение: От една страна:

$$
\begin{aligned}
U &= \overline{x \downarrow \overline{y}} \vee \big(\overline{\overline{x}\,\overline{z}} \vee ((\overline{x}|(y \equiv z)) \vee (\overline{xy} \vee z))\big) \\
&= \overline{\overline{x \vee \overline{y}}} \vee \overline{\overline{x}\,\overline{z}} \vee ((\overline{x}|(y \equiv z)) \vee (\overline{xy} \vee z)) \\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{x}\,\overline{z}} \vee ((\overline{x}|(y \equiv z)) \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee z = \quad \text{// понеже е от вида } x \vee \cdots \overline{x} \vee \cdots \\
&= 1
\end{aligned}
$$

От друга страна:

$$
\begin{aligned}
V &= \overline{(\overline{x} \vee y)(\overline{x \vee y\overline{z}})} \vee \overline{yz} \\
&= (\overline{\overline{x} \vee y}) \vee (\overline{\overline{x \vee y\overline{z}}}) \vee \overline{y} \vee \overline{z} \\
&= \overline{\overline{x}}\,\overline{y} \vee x \vee y\overline{z} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \\
&= x\overline{y} \vee 1\overline{x} \vee y\overline{z} \vee 1\overline{z} \vee \overline{y} \\
&= x(\overline{y} \vee 1) \vee \overline{z}(y \vee 1) \vee \overline{y} = x \vee \overline{y} \vee \overline{z}
\end{aligned}
$$

Показахме, че V е еквивалентна на $x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$. От тази проста формула лесно се вижда, че семантиката на V не е константа-единица. Следователно, U и V не са еквивалентни. □

Задача 22. Намерете СъвДНФ на булевата функция $f = 01110100$.

Решение: Имената на променливите не са уточнени, така че имаме свобода да си ги изберем. Избираме x, y и z, като се ползва традиционната наредба x-преди-y и y-преди-z. Тогава таблицата на функцията е:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

СъвДНФ е:

$$\overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z$$

□

Задача 23. Намерете СъвДНФ на следните булеви функции:

А) $(x_1 \oplus x_2) \to x_2 x_3$

Б) $f = 01101100$

В) $g = 0001\,1101\,1001\,1011$

Г) $\overline{x_1\overline{x_2} \to \overline{x_3}}$

Д) $(x|y)\overline{z}$

Е) $xy \equiv (y \equiv z)$

Ако променливите не са именувани явно, допуснете подходящо именуване с, например, x, y, z или x_1, x_2, x_3 и така нататък.

Отговори и решения:

А) $(x_1 \oplus x_2) \to x_2 x_3 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3} \vee x_1\,x_2\,x_3$

Б) $f(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z$

В) $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4 \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4 \vee x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_2\,x_3\,x_4$

Г) $\overline{x_1\overline{x_2} \to \overline{x_3}} = \overline{\overline{x_1\overline{x_2}} \vee \overline{x_3}} = \overline{\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}} = \overline{\overline{x_1}} \vee \overline{x_2} \vee \overline{\overline{x_3}} = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$. В този случай намерхиме СъвДНФ с еквивалентни преобразувания. По-точно казано, извършихме редица от еквивалентни преобразувания, резултатът от които е израз, който е СъвДНФ по **формални** причини: има точно такава форма, каквато трябва да има една СъвДНФ.

Д) $(x|y)\overline{z} = \overline{xy}\,\overline{z}$. За съжаление, полученият израз **не е** СъвДНФ, защото няма желаната форма! За да е СъвДНФ с една пълна елементарна конюнкция, изразът трябва да е конкатенация от литерали, а този израз не е такъв, защото $\overline{xy}$ нито е литерал, нито е конкатенация от литерали. Ако искаме да решим подзадачата с еквивалентни преобразувания, трябва да продължим. $\overline{xy}\,\overline{z} = (\overline{x} \vee \overline{y})\overline{z} = \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z} = \overline{x}\,\overline{z}(y \vee \overline{y}) \vee \overline{y}\,\overline{z}(x \vee \overline{x}) = \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z}$

Е) $\overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xyz \vee \overline{x}\,\overline{y}z$

□

Задача 24. Колко СъвДНФ има над n променливи?

Решение: Броят на пълните елементарни конюнкции е точно 2^n, защото във всяка от тях участват точно n литерала, а за всеки от тях има точно 2 възможности независимо от останалите. Всяка СъвДНФ се определя еднозначно от това, кои пълни елементарни конюнкции участват. Но отговорът 2^{2^n} за броя на всички СъвДНФ не е точен, понеже не може да няма нито една пълна елементарна конюнкция. С други думи, празната формула (празният стринг) не е СъвДНФ по дефиниция. Отговорът е $2^{2^n} - 1$.

Можем да го получим и с други разсъждения: всяка булева функция на n променливи без константа-нула има точно една СъвДНФ, а на различни СъвДНФ съответстват различни булеви функции. □

Задача 25. Колко ДНФ има над n променливи?

Решение: Трябва да съобразим колко елементарни конюнкции има. В елементарните конюнкции има три възможности за всяка променлива (а не две, както беше при пълните елементарни конюнкции) – променливата може да участва като положителен литерал, като отрицателен литерал или изобщо да не участва. Това означава 3^n възможности, но ако броим и възможността да няма участващи променливи изобщо, тоест празната последователност от литерали (празният стринг). Но ние искаме всяка пълна елементарна конюнкция да е непразна, тоест да има поне един литерал, така че възможността да няма нито една променлива отпада и възможностите са $3^n - 1$.

Всяка от пълните елементарни конюнкции може да участва или да не участва, но трябва да има поне една такава, така че общо възможностите са $2^{3^n-1} - 1$. □

Задача 26. Намерете броя на булевите функции от $\mathcal{F}_2^n$, чиито СъвДНФ изпълняват условието:

1. Няма пълна елементарна конюнкция, в която броят на положителните литерали е равен на броя на отрицателните литерали.
2. Всяка пълна елементарна конюнкция има четен брой отрицателни литерали.
3. Всяка пълна елементарна конюнкция има поне два отрицателни литерала.

Решение:

1. Ако n е нечетно, то всички СъвДНФ са такива и отговорът е $2^{2^n} - 1$. Ако n е четно, отговорът е $2^p - 1$, където p е броят на n-векторите с неравен брой нули и единици. Очевидно, $p = 2^n - q$, където q е броят на n-векторите с равен брой нули и единици. Но ние знаем, че има точно $\binom{n}{n/2}$ начина да разположим $n/2$ нули и $n/2$ единици в линейна наредба, следователно $q = \binom{n}{n/2}$, следователно $p = 2^n - \binom{n}{n/2}$, следователно отговорът е $2^{2^n - \binom{n}{n/2}} - 1$.

2. За всеки входен вектор съответната пълна елементарна конюнкция участва в СъвДНФ тстк функцията има стойност 1 върху този входен вектор. Иска се функцията да е задължително 0 върху всички входни вектори с нечетен брой нули, тоест стойността на функцията може да варира само върху векторите с четен брой нули. Отговорът е $2^{2^{n-1}} - 1$, защото точно половината[†] вектори, тоест $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$, са тези с четен брой нули, а от $2^{2^{n-1}}$ вадим единица заради това, че функцията константа-нула няма СъвДНФ.

3. Върху векторите с нула нули и точно една нула, функцията трябва да е задължително 0. Освен това, не може да е константа-нула. Други ограничения няма. Има един вектор с нула нули и n вектора с точно една нула. Отговорът е $2^{2^n - n - 1} - 1$.

□

Задача 27. Нека $n \geq 2$. Да се определи дължината на СъвДНФ (като брой на пълните елементарни конюнкции) на следните булеви функции, представени чрез формули:

1. $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$

[†]Това се извежда тривиално, имайки предвид резултата от комбинаториката, че броят на подмножествата с четна мощност е равен на броя на подмножествата с нечетна мощност.

2. $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \cdots \vee \overline{x_n})$
3. $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$
4. $\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \rightarrow x_j)$

Решение: Задачата е същата като "колко единици съдържа каноничното представяне на функцията?". Каноничното представяне на всяка от тези четири функции има лесна за определяне форма. Трябва разберем какъв е pattern-ът на каноничното представяне на всяка от тях. Сторим ли това, решението става тривиално.

1. Функцията е сума по модул две на всички променливи. Очевидно, тази сума е 1 точно върху тези вектори, които имат нечетен брой единици. Както вече казахме в решението на Задача 26, векторите с нечетен брой единици са точно половината, тоест $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$. Отговорът е точно 2^{n-1}. Забележете, че **не е** $2^{2^{n-1}}$, защото върху въпросните вектори стойностите на функцията не варират, а само единици.

2. Лесно се вижда, че функцията е 0 върху точно два вектора: $00\cdots0$ и $11\cdots1$. Отговорът е $2^n - 2$.

3. Функцията има стойност 1 точно върху тези вектори, които имат поне две единици в себе си. Векторите, които нямат поне две единици в себе си, са тези с нула единици (само един) и с точно една единица (n такива). Отговорът е $2^n - n - 1$.

4. Може би е по-лесно да се съобрази каква е формата на каноничното представяне, ако използваме различно представяне на същата функция:

$$\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \rightarrow x_j) = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (\overline{x_i} \vee x_j)$$

   Която и от двете формули да разгледаме, виждаме, че функцията е нула върху точно тези вектори, които имат поне една 1, която е вляво от поне една 0[†]. Следователно, функцията е единица точно върху векторите $00\cdots00$, $00\cdots01$, $00\cdots11$, $\ldots$, $01\cdots11$, $11\cdots11$. Те са точно $n+1$, и това е отговорът. □

Задача 28. Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ са булеви функции, такива че СъвДНФ на f има k_1 пълни елементарни конюнкции, а на g, k_2 пълни елементарни конюнкции. Да се определи дължината, в брой пълни елементарни конюнкции, на:

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = fg$$
$$t(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = f \vee g$$

Решение: Да разгледаме първо fg. Забележете, че това е функция **не** на n, а на $2n$ променливи. Нейната таблица е показана схематично на следната таблица. Да си представим, че върху входните вектори, всеки с дължина $2n$, които са общо 2^{2n} на брой, е дефинирано групиране в нещо като правоъгълници с размери $n \times 2^n$, които на таблицата са показани в лявата страна, оцветени в розово и зелено. Всеки зелен правоъгълник огражда една група от стойности на y-променливите, като групите са 2^n общо и съдържанието им е едно и също: всяка група съдържа точно всички n-вектори в лексикографски ред. Розовите правоъгълници ограждат групи от стойности на x-променливите, като тези групи пак са 2^n общо и всяка има 2^n n-вектора, но сега всяка група съдържа 2^n копия на един и същи n-вектор.

[†] Тоест, в които има $x_i = 1$ и $x_j = 0$ при $i < j$; тоест, които са от вида $\cdots1\cdots0\cdots$.

Тъй като функцията g зависи от y-стойностите, а функцията f, от x-стойностите, в дясната страна, където са функционалните стойности, наблюдаваме следните закономерности. Колоната на g се състои от 2^n подколони, всяка от които е копие на един и същи pattern, който има точно k_2 единици (по условие g има СъвДНФ с точно k_2 пълни елементарни конюнкции). Точно какво е съдържанието на тази повтаряща се колона зависи от конкретиката на g. В таблицата "$\tilde{g}_i$" е кратък запис за $g(\tilde{y}_i)$, където $\tilde{y}_i$ е i-ият вектор от y-векторите, за $0 \leq i \leq 2^n - 1$.

От друга страна, колоната на f се състои от 2^n подколони, всяка от които съдържа 2^n копия на една и съща стойност, а именно функционалната стойност на f върху i-ия от x-векторите за $0 \leq i \leq 2^n - 1$, която е отбелязана с $\tilde{f}_i$. Очевидно точно k_1 от тези подколони са от единици. Кои точно, зависи от конкретиката на f.

И така, функцията h е конюнкция от f и g. Колоната на h не е изобразена, но лесно може да си я представим написана най-вдясно, с височина 2^{2n}, състояща от поелементни конюнкции от колоните на g и f. Тривиално е да се съобрази, че ако разбием колоната на h на 2^n подколони аналогично на разбиванията на колоните на g и f, точно $2^n - k_1$ от подколоните ще са само от нули, защото колоната на f има точно $2^n - k_1$ от подколони от нули, които в поелементните конюнкции "нулират" стойността на h върху дадения $2n$-вектор независимо от стойностите на g върху него. А останалите k_1 на брой подколони на f са само от единици. За всяка от тях, функцията h получава точно k_2 единици заради поелементната конюнкция.

Общо, h има точно $k_1 \times k_2$ единици.

Сега да разгледаме функцията t. Съображенията са аналогични и таблицата е същата, но сега търсим мощността не на сечение, а на обединение. Колоната на g има общо $k_2 \times 2^n$ единици, а колоната на f има общо $k_1 \times 2^n$ единици. От $k_1 2^n + k_2 2^n = (k_1 + k_2)2^n$ трябва да извадим, съгласно принципа на включването и изключването, мощността на сечението, която, както вече установихме, е $k_1 k_2$. Отговорът е $(k_1 + k_2)2^n - k_1 k_2$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$		$y_1, y_2, \ldots, y_n$		g		f		
$0, 0, \ldots, 0, 0$	2^n копия на $00\cdots00$	$0, 0, \ldots, 0, 0$	всички n-вектори, лексикографски	$\tilde{g}_0$	pattern с k_2 единици	$\tilde{f}_0$	2^n еднакви ст-сти	от всички тези, 2^n на брой, групи, всяка от 2^n еднакви ст-сти, точно k_1 групи са от единици
$0, 0, \ldots, 0, 0$		$0, 0, \ldots, 0, 1$		$\tilde{g}_1$		$\tilde{f}_0$		
$0, 0, \ldots, 0, 0$		$0, 0, \ldots, 1, 0$		$\tilde{g}_2$		$\tilde{f}_0$		
....		....		...		...		
$0, 0, \ldots, 0, 0$		$1, 1, \ldots, 1, 0$		$\tilde{g}_{2^n-2}$		$\tilde{f}_0$		
$0, 0, \ldots, 0, 0$		$1, 1, \ldots, 1, 1$		$\tilde{g}_{2^n-1}$		$\tilde{f}_0$		
$0, 0, \ldots, 0, 1$	2^n копия на $00\cdots01$	$0, 0, \ldots, 0, 0$	всички n-вектори, лексикографски	$\tilde{g}_0$	същият pattern с k_2 ед.	$\tilde{f}_1$	2^n еднакви ст-сти	
$0, 0, \ldots, 0, 1$		$0, 0, \ldots, 0, 1$		$\tilde{g}_1$		$\tilde{f}_1$		
$0, 0, \ldots, 0, 1$		$0, 0, \ldots, 1, 0$		$\tilde{g}_2$		$\tilde{f}_1$		
....		....		...		...		
$0, 0, \ldots, 0, 1$		$1, 1, \ldots, 1, 0$		$\tilde{g}_{2^n-2}$		$\tilde{f}_1$		
$0, 0, \ldots, 0, 1$		$1, 1, \ldots, 1, 1$		$\tilde{g}_{2^n-1}$		$\tilde{f}_1$		
....		....		....		....		
....		....		....		....		
....		....		....		....		
....		....		....		....		
$1, 1, \ldots, 1, 1$	2^n копия на $11\cdots11$	$0, 0, \ldots, 0, 0$	всички n-вектори, лексикографски	$\tilde{g}_0$	същият pattern с k_2 ед.	$\tilde{f}_{2^n-1}$	2^n еднакви ст-сти	
$1, 1, \ldots, 1, 1$		$0, 0, \ldots, 0, 1$		$\tilde{g}_1$		$\tilde{2}_{2^n-1}$		
$1, 1, \ldots, 1, 1$		$0, 0, \ldots, 1, 0$		$\tilde{g}_2$		$\tilde{f}_{2^n-1}$		
....		....		...		...		
$1, 1, \ldots, 1, 1$		$1, 1, \ldots, 1, 0$		$\tilde{g}_{2^n-2}$		$\tilde{f}_{2^n-1}$		
$1, 1, \ldots, 1, 1$		$1, 1, \ldots, 1, 1$		$\tilde{g}_{2^n-1}$		$\tilde{f}_{2^n-1}$		

□

3 Благодарности

Авторът благодари много на **Добромир Кралчев** за многобройните корекции на граматически и стилистични грешки, както и за корекциите на грешки в решенията на две от задачите.