

# Лениво оценяване и програмиране от по-висок ред

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, спец. Информатика, 2016/17 г.

5–12 януари 2017 г.

# Щипка $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$

# Щипка $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$

## Щипка $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?



Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4))$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)})$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!})$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)}$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$



Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$
- $g(f(4))$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$
- $\underline{g(f(4))} \longrightarrow (\underline{f(4)})^2 + \underline{f(4)}$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$
- $\underline{g(f(4))} \longrightarrow (\underline{f(4)})^2 + \underline{f(4)} \longrightarrow (\underline{4!})^2 + \underline{4!}$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$
- $\underline{g(f(4))} \longrightarrow \underline{(f(4))^2} + \underline{f(4)} \longrightarrow \underline{(4!)^2} + \underline{4!} \longrightarrow 24^2 + 24$

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$ 
  - оценява се **отвътре навън**
- $\underline{g(f(4))} \longrightarrow \underline{(f(4))^2 + f(4)} \longrightarrow \underline{(4!)^2 + 4!} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$ 
  - оценява се **отвън навътре**

Щипка  $\lambda$ -смятане

- $\lambda$ -изрази:  $E ::= x \mid E_1(E_2) \mid \lambda x E$
- Изчислително правило:  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto E_1[x := E_2]$
- В какъв ред прилагаме изчислителното правило?
- Нека  $f := \lambda x x!$ ,  $g := \lambda z z^2 + z$
- $g(f(4)) \longrightarrow ?$
- $g(\underline{f(4)}) \longrightarrow g(\underline{4!}) \longrightarrow \underline{g(24)} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$ 
  - оценява се **отвътре навън**
  - **стриктно** (апликативно, лакомо) оценяване
- $\underline{g(f(4))} \longrightarrow \underline{(f(4))^2} + \underline{f(4)} \longrightarrow \underline{(4!)^2} + \underline{4!} \longrightarrow 24^2 + 24 \longrightarrow 600$ 
  - оценява се **отвън навътре**
  - **нестриктно** (нормално, лениво) оценяване

# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране

# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)



# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение

# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже “пази чисто”

# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже “пази чисто”

## Нестриктното оценяване

# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже “пази чисто”

## Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано

# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже “пази чисто”

## Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано
- въпреки това се среща в някаква форма в повечето езици!

# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже “пази чисто”

## Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано
- въпреки това се среща в някаква форма в повечето езици!
  - `x = p != NULL ? p->data : 0;`

# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже “пази чисто”

## Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано
- въпреки това се среща в някаква форма в повечето езици!
  - `x = p != NULL ? p->data : 0;`
  - `found = i < n && a[i] == x`

# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже “пази чисто”

## Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано
- въпреки това се среща в някаква форма в повечето езици!
  - `x = p != NULL ? p->data : 0;`
  - `found = i < n && a[i] == x`
- нарича се още “call-by-name” (извикване по име)



# Стриктно и нестриктно оценяване

## Стриктното оценяване

- се използва в повечето езици за програмиране
- се нарича още “call-by-value” (извикване по стойност)
- позволява лесно да се контролира редът на изпълнение
- пестеливо откъм памет, понеже “пази чисто”

## Нестриктното оценяване

- е по-рядко използвано
- въпреки това се среща в някаква форма в повечето езици!
  - `x = p != NULL ? p->data : 0;`
  - `found = i < n && a[i] == x`
- нарича се още “call-by-name” (извикване по име)
- може да спести сметки, понеже “изхвърля боклуците”

# Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))  
(define (g l) (f (car l) (cadr l)))
```

# Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))  
(define (g l) (f (car l) (cadr l)))  
  
(g '(3)) → (f (car '(3)) (cadr '(3)))
```

# Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))

(g '(3)) → (f (car '(3)) (cadr '(3)))
           → (f 3 (cadr '(3)))
```

# Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

```
(g '(3)) → (f (car '(3)) (cadr '(3)))
           → (f 3 (cadr '(3))) → Грешка!
```

## Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l) (f (car l) (cadr l)))

(g '(3)) → (f (car '(3)) (cadr '(3)))
           → (f 3 (cadr '(3))) → Грешка!
```

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

# Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l) (f (car l) (cadr l)))

(g '(3)) → (f (car '(3)) (cadr '(3)))
           → (f 3 (cadr '(3))) → Грешка!
```

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l    = f (head l) (head (tail l))
```

g [3]

## Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

(g '(3))  $\rightarrow$  (f (car '(3)) (cadr '(3)))  
 $\rightarrow$  (f 3 (cadr '(3)))  $\rightarrow$  Грешка!

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

g [3]  $\rightarrow$  f (head [3]) (head (tail [3]))



## Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

```
(g '(3)) → (f (car '(3)) (cadr '(3)))
           → (f 3 (cadr '(3))) → Грешка!
```

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

```
g [3] → f (head [3]) (head (tail [3]))
       → if head [3] < 5 then head [3] else head (tail [3])
```

## Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

```
(g '(3)) → (f (car '(3)) (cadr '(3)))
           → (f 3 (cadr '(3))) → Грешка!
```

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

```
g [3] → f (head [3]) (head (tail [3]))
       → if head [3] < 5 then head [3] else head (tail [3])
       → if 3 < 5 then head [3] else head (tail [3])
```

## Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l) (f (car l) (cadr l)))
```

```
(g '(3)) → (f (car '(3)) (cadr '(3)))
           → (f 3 (cadr '(3))) → Грешка!
```

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l    = f (head l) (head (tail l))
```

```
g [3] → f (head [3]) (head (tail [3]))
       → if head [3] < 5 then head [3] else head (tail [3])
       → if 3 < 5 then head [3] else head (tail [3])
       → if True then head [3] else head (tail [3])
```

## Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l) (f (car l) (cadr l)))

(g '(3)) → (f (car '(3)) (cadr '(3)))
           → (f 3 (cadr '(3))) → Грешка!
```

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l    = f (head l) (head (tail l))
```

```
g [3] → f (head [3]) (head (tail [3]))
      → if head [3] < 5 then head [3] else head (tail [3])
      → if 3 < 5 then head [3] else head (tail [3])
      → if True then head [3] else head (tail [3])
      → head [3]
```

## Кога мързелът помага

```
(define (f x y) (if (< x 5) x y))
(define (g l)   (f (car l) (cadr l)))
```

```
(g '(3)) → (f (car '(3)) (cadr '(3)))
           → (f 3 (cadr '(3))) → Грешка!
```

```
f x y = if x < 5 then x else y
g l   = f (head l) (head (tail l))
```

```
g [3] → f (head [3]) (head (tail [3]))
      → if head [3] < 5 then head [3] else head (tail [3])
      → if 3 < 5 then head [3] else head (tail [3])
      → if True then head [3] else head (tail [3])
      → head [3] → 3
```

# Теорема за нормализация

- всеки път когато апликативното оценяване дава резултат и нормалното оценяване дава резултат

## Теорема за нормализация

- всеки път когато апликативното оценяване дава резултат и нормалното оценяване дава резултат
- има случаи, когато нормалното оценяване дава резултат, но апликативното не!

## Теорема за нормализация

- всеки път когато апликативното оценяване дава резултат и нормалното оценяване дава резултат
- има случаи, когато нормалното оценяване дава резултат, но апликативното не!
- нещо повече:

### Теорема (за нормализация, Church-Rosser)

*Ако има някакъв ред на оценяване на програмата, който достига до резултат, то и с нормална стратегия на оценяване ще достигнем до някакъв резултат.*



## Теорема за нормализация

- всеки път когато апликативното оценяване дава резултат и нормалното оценяване дава резултат
- има случаи, когато нормалното оценяване дава резултат, но апликативното не!
- нещо повече:

### Теорема (за нормализация, Church-Rosser)

*Ако има някакъв ред на оценяване на програмата, който достига до резултат, то и с нормална стратегия на оценяване ще достигнем до някакъв резултат.*

### Следствие

*Ако с нормално оценяване програмата даде грешка или не завърши, то няма да получим резултат с **никая друга стратегия на оценяване.***

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$g(g(g(2)))$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$g(g(g(2))) \mapsto g(g(2))^2 + g(g(2))$$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$g(g(g(2))) \mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2)$$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned}
 g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\
 &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots
 \end{aligned}$$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

**Идея:**  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto \text{let } x = E_2 \text{ in } E_1$



## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

**Идея:**  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto \text{let } x = E_2 \text{ in } E_1$

$g(g(g(2)))$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

**Идея:**  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto \mathbf{let\ } x = E_2 \mathbf{\ in\ } E_1$

$$g(g(g(2))) \mapsto \mathbf{let\ } x = g(g(2)) \mathbf{\ in\ } x^2 + x$$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

**Идея:**  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto \text{let } x = E_2 \text{ in } E_1$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \text{let } x = g(g(2)) \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } y = g(2) \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \end{aligned}$$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

**Идея:**  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto \text{let } x = E_2 \text{ in } E_1$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \text{let } x = g(g(2)) \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } y = g(2) \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } z = 2 \text{ in let } y = z^2 + z \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \end{aligned}$$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

**Идея:**  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto \text{let } x = E_2 \text{ in } E_1$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \text{let } x = g(g(2)) \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } y = g(2) \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } z = 2 \text{ in let } y = z^2 + z \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } y = 6 \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \end{aligned}$$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

**Идея:**  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto \text{let } x = E_2 \text{ in } E_1$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \text{let } x = g(g(2)) \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } y = g(2) \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } z = 2 \text{ in let } y = z^2 + z \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } y = 6 \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } x = 42 \text{ in } x^2 + x \mapsto 1806 \end{aligned}$$

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

**Идея:**  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto \text{let } x = E_2 \text{ in } E_1$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \text{let } x = g(g(2)) \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } y = g(2) \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } z = 2 \text{ in let } y = z^2 + z \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } y = 6 \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } x = 42 \text{ in } x^2 + x \mapsto 1806 \end{aligned}$$

- Избягва се повторението чрез споделяне на общи подизрази

## Извикване при нужда (“call-by-need”)

Ако  $g(z) = z^2 + z$ ,  $g(g(g(2))) = ?$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto g(g(2))^2 + g(g(2)) \mapsto (g(2)^2 + g(2))^2 + g(2)^2 + g(2) \mapsto \\ &\mapsto ((2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2) + (2^2 + 2)^2 + 2^2 + 2 \mapsto \dots \end{aligned}$$

Времето и паметта нарастват експоненциално!

**Идея:**  $(\lambda x E_1)(E_2) \mapsto \text{let } x = E_2 \text{ in } E_1$

$$\begin{aligned} g(g(g(2))) &\mapsto \text{let } x = g(g(2)) \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } y = g(2) \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } z = 2 \text{ in let } y = z^2 + z \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } y = 6 \text{ in let } x = y^2 + y \text{ in } x^2 + x \mapsto \\ &\mapsto \text{let } x = 42 \text{ in } x^2 + x \mapsto 1806 \end{aligned}$$

- Избягва се повторението чрез споделяне на общи подизрази
- Заместването се извършва чак когато е **абсолютно наложително**



## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е `True`, се преминава към оценката на  $e_1$

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е **True**, се преминава към оценката на  $e_1$
  - ако оценката е **False**, се преминава към оценката на  $e_2$

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е **True**, се преминава към оценката на  $e_1$
  - ако оценката е **False**, се преминава към оценката на  $e_2$
- ако  $s \equiv f\ e_1\ e_2\ \dots\ e_n$ , за  $f$  —  $n$ -местна примитивна функция:

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е **True**, се преминава към оценката на  $e_1$
  - ако оценката е **False**, се преминава към оценката на  $e_2$
- ако  $s \equiv f\ e_1\ e_2\ \dots\ e_n$ , за  $f$  —  $n$ -местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно  $e_1, \dots, e_n$

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е **True**, се преминава към оценката на  $e_1$
  - ако оценката е **False**, се преминава към оценката на  $e_2$
- ако  $s \equiv f\ e_1\ e_2\ \dots\ e_n$ , за  $f$  —  $n$ -местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно  $e_1, \dots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им



## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е **True**, се преминава към оценката на  $e_1$
  - ако оценката е **False**, се преминава към оценката на  $e_2$
- ако  $s \equiv f\ e_1\ e_2\ \dots\ e_n$ , за  $f$  —  $n$ -местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно  $e_1, \dots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че  $s \equiv f\ e$

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е **True**, се преминава към оценката на  $e_1$
  - ако оценката е **False**, се преминава към оценката на  $e_2$
- ако  $s \equiv f \ e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n$ , за  $f$  —  $n$ -местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно  $e_1, \dots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че  $s \equiv f \ e$
- първо се оценява  $f$ , за да разберем как да продължим

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е **True**, се преминава към оценката на  $e_1$
  - ако оценката е **False**, се преминава към оценката на  $e_2$
- ако  $s \equiv f \ e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n$ , за  $f$  —  $n$ -местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно  $e_1, \dots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че  $s \equiv f \ e$
- първо се оценява  $f$ , за да разберем как да продължим
- ако  $f \ x_1 \ \dots \ x_n \mid g_1 = t_1 \ \dots \mid g_k = t_k$  е дефинирана чрез пазачи:

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е **True**, се преминава към оценката на  $e_1$
  - ако оценката е **False**, се преминава към оценката на  $e_2$
- ако  $s \equiv f \ e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n$ , за  $f$  —  $n$ -местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно  $e_1, \dots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че  $s \equiv f \ e$
- първо се оценява  $f$ , за да разберем как да продължим
- ако  $f \ x_1 \ \dots \ x_n \mid g_1 = t_1 \ \dots \mid g_k = t_k$  е дефинирана чрез пазачи:
  - тогава  $f$  се замества с израза:
 

```
\x_1 \dots x_n -> if g_1 then t_1 else ... if g_k then t_k
else error "..."
```

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е **True**, се преминава към оценката на  $e_1$
  - ако оценката е **False**, се преминава към оценката на  $e_2$
- ако  $s \equiv f \ e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n$ , за  $f$  —  $n$ -местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно  $e_1, \dots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че  $s \equiv f \ e$
- първо се оценява  $f$ , за да разберем как да продължим
- ако  $f \ x_1 \ \dots \ x_n \mid g_1 = t_1 \ \dots \mid g_k = t_k$  е дефинирана чрез пазачи:
  - тогава  $f$  се замества с израза:
 

```
\x_1 \dots x_n -> if g_1 then t_1 else ... if g_k then t_k
else error "..."
```
- ако  $f$  е конструктор (константа), **оценката остава  $f \ e$**

## Кога се налага оценяване на израз?

Във всеки даден момент Haskell оценява някой израз  $s$ .

- ако  $s \equiv \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ 
  - първо се оценява  $e$
  - ако оценката е **True**, се преминава към оценката на  $e_1$
  - ако оценката е **False**, се преминава към оценката на  $e_2$
- ако  $s \equiv f\ e_1\ e_2\ \dots\ e_n$ , за  $f$  —  $n$ -местна примитивна функция:
  - оценяват се последователно  $e_1, \dots, e_n$
  - прилага се примитивната операция над оценките им
- нека сега да допуснем, че  $s \equiv f\ e$
- първо се оценява  $f$ , за да разберем как да продължим
- ако  $f\ x_1\ \dots\ x_n \mid g_1 = t_1\ \dots \mid g_k = t_k$  е дефинирана чрез пазачи:
  - тогава  $f$  се замества с израза:
 

```
\x_1... x_n -> if g_1 then t_1 else ... if g_k then t_k
else error "..."
```
- ако  $f$  е конструктор (константа), **оценката остава  $f\ e$**
- ако  $f = \backslash p \rightarrow t$ , където  $p$  е образец, редът на оценяване зависи от образца!

Кога се оценяват изразите при използване на образци?

$$(\lambda p t) e \mapsto t [p := e]$$

Как се оценява  $(\lambda p \rightarrow t) e$ ?

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\neg p \rightarrow t)$  е?

- ако  $p \equiv c$  е константа



# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(p \rightarrow t)$  е?

- ако  $p \equiv c$  е константа
  - преминава се към оценката на аргумента е

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\backslash p \rightarrow t)$  е?

- ако  $p \equiv c$  е константа
  - преминава се към оценката на аргумента  $e$
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата  $c$ , преминава се към оценката на тялото  $t$

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\backslash p \rightarrow t)$  е?

- ако  $p \equiv c$  е константа
  - преминава се към оценката на аргумента  $e$
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата  $c$ , преминава се към оценката на тялото  $t$
- ако  $p \equiv \_$  е анонимният образец

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\backslash p \rightarrow t)$  е?

- ако  $p \equiv c$  е константа
  - преминава се към оценката на аргумента  $e$
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата  $c$ , преминава се към оценката на тялото  $t$
- ако  $p \equiv \_$  е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на  $t$  **без да се оценява  $e$**

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\backslash p \rightarrow t)$  е?

- ако  $p \equiv c$  е константа
  - преминава се към оценката на аргумента  $e$
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата  $c$ , преминава се към оценката на тялото  $t$
- ако  $p \equiv \_$  е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на  $t$  **без да се оценява  $e$**
- ако  $p \equiv x$  е променлива

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\backslash p \rightarrow t) e$ ?

- ако  $p \equiv c$  е константа
  - преминава се към оценката на аргумента  $e$
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата  $c$ , преминава се към оценката на тялото  $t$
- ако  $p \equiv \_$  е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на  $t$  **без да се оценява  $e$**
- ако  $p \equiv x$  е променлива
  - преминава се към оценка на израза  $t$  **като се въвежда локалната дефиниция  $x = e$**

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(p \rightarrow t)$  е?

- ако  $p \equiv c$  е константа
  - преминава се към оценката на аргумента  $e$
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата  $c$ , преминава се към оценката на тялото  $t$
- ако  $p \equiv \_$  е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на  $t$  **без да се оценява  $e$**
- ако  $p \equiv x$  е променлива
  - преминава се към оценка на израза  $t$  **като се въвежда локалната дефиниция  $x = e$**
- ако  $p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n)$

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\backslash p \rightarrow t) e$ ?

- ако  $p \equiv c$  е константа
  - преминава се към оценката на аргумента  $e$
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата  $c$ , преминава се към оценката на тялото  $t$
- ако  $p \equiv \_$  е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на  $t$  **без да се оценява  $e$**
- ако  $p \equiv x$  е променлива
  - преминава се към оценка на израза  $t$  **като се въвежда локалната дефиниция  $x = e$**
- ако  $p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n)$ 
  - преминава се към оценката на  $e$



# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(p \rightarrow t)$  е?

- ако  $p \equiv c$  е константа
  - преминава се към оценката на аргумента  $e$
  - ако се установи че оценката тя съвпада с константата  $c$ , преминава се към оценката на тялото  $t$
- ако  $p \equiv \_$  е анонимният образец
  - преминава се директно към оценката на  $t$  **без да се оценява  $e$**
- ако  $p \equiv x$  е променлива
  - преминава се към оценка на израза  $t$  **като се въвежда локалната дефиниция  $x = e$**
- ако  $p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n)$ 
  - преминава се към оценката на  $e$
  - ако се установи, че тя е от вида  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , преминава се към оценката на израза  $(p_1 p_2 \dots p_n \rightarrow t)$   $e_1 e_2 \dots e_n$

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\backslash p \rightarrow t)$  е?

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\backslash p \rightarrow t)$  е?

- ако  $p \equiv (p_h : p_t)$

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\backslash p \rightarrow t)$  е?

- ако  $p \equiv (p_h : p_t)$ 
  - преминава се към оценката на е

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\lambda p \rightarrow t) e$ ?

- ако  $p \equiv (p_h : p_t)$ 
  - преминава се към оценката на  $e$
  - ако се установи, че тя е от вида  $(e_h : e_t)$ , преминава се към оценката на израза  $(\lambda p_h p_t \rightarrow t) e_h e_t$

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\lambda p \rightarrow t) e$ ?

- ако  $p \equiv (p_h : p_t)$ 
  - преминава се към оценката на  $e$
  - ако се установи, че тя е от вида  $(e_h : e_t)$ , преминава се към оценката на израза  $(\lambda p_h p_t \rightarrow t) e_h e_t$
- ако  $p \equiv [p_1, p_2, \dots, p_n]$

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\lambda p \rightarrow t) e$ ?

- ако  $p \equiv (p_h : p_t)$ 
  - преминава се към оценката на  $e$
  - ако се установи, че тя е от вида  $(e_h : e_t)$ , преминава се към оценката на израза  $(\lambda p_h p_t \rightarrow t) e_h e_t$
- ако  $p \equiv [p_1, p_2, \dots, p_n]$ 
  - преминава се към оценката на  $e$

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\backslash p \rightarrow t) e$ ?

- ако  $p \equiv (p_h : p_t)$ 
  - преминава се към оценката на  $e$
  - ако се установи, че тя е от вида  $(e_h : e_t)$ , преминава се към оценката на израза  $(\backslash p_h p_t \rightarrow t) e_h e_t$
- ако  $p \equiv [p_1, p_2, \dots, p_n]$ 
  - преминава се към оценката на  $e$
  - ако се установи, че тя е от вида  $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ , преминава се към оценката на израза  $(\backslash p_1 p_2 \dots p_n \rightarrow t) e_1 e_2 \dots e_n$



# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\setminus p \rightarrow t) e$ ?

- ако  $p \equiv (p_h : p_t)$ 
  - преминава се към оценката на  $e$
  - ако се установи, че тя е от вида  $(e_h : e_t)$ , преминава се към оценката на израза  $(\setminus p_h p_t \rightarrow t) e_h e_t$
- ако  $p \equiv [p_1, p_2, \dots, p_n]$ 
  - преминава се към оценката на  $e$
  - ако се установи, че тя е от вида  $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ , преминава се към оценката на израза  $(\setminus p_1 p_2 \dots p_n \rightarrow t) e_1 e_2 \dots e_n$
  - всъщност е еквивалентно да разгледаме  $p$  като  $p_1 : p_2 : \dots : p_n : []$

# Кога се оценяват изразите при използване на образци?

Как се оценява  $(\lambda p \rightarrow t) e$ ?

- ако  $p \equiv (p_h : p_t)$ 
  - преминава се към оценката на  $e$
  - ако се установи, че тя е от вида  $(e_h : e_t)$ , преминава се към оценката на израза  $(\lambda p_h p_t \rightarrow t) e_h e_t$
- ако  $p \equiv [p_1, p_2, \dots, p_n]$ 
  - преминава се към оценката на  $e$
  - ако се установи, че тя е от вида  $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ , преминава се към оценката на израза  $(\lambda p_1 p_2 \dots p_n \rightarrow t) e_1 e_2 \dots e_n$
  - всъщност е еквивалентно да разгледаме  $p$  като  $p_1 : p_2 : \dots : p_n : []$
- ако има няколко равенства за  $f$  с използване на различни образци, се търси кой образец пасва отгоре надолу

## Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

## Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

```
sumFirst [1..10] [5..50]
```

## Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

```
  sumFirst [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
```

## Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

```
sumFirst [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
```

```
→ (\ (x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
```

## Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

```
sumFirst [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
```

```
→ let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) [5..50]
```

## Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

```
sumFirst [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
```

```
→ let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) [5..50]
```

```
→ let x=1; xs=[2..10] in (\ (y:ys) -> x + y) (5:[6..50])
```



## Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

```
sumFirst [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
```

```
→ let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) [5..50]
```

```
→ let x=1; xs=[2..10] in (\ (y:ys) -> x + y) (5:[6..50])
```

```
→ let x=1; xs=[2..10]; y=5; ys=[6..50] in x+y
```

## Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

```
sumFirst [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
```

```
→ let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) [5..50]
```

```
→ let x=1; xs=[2..10] in (\ (y:ys) -> x + y) (5:[6..50])
```

```
→ let x=1; xs=[2..10]; y=5; ys=[6..50] in x+y
```

```
→ 1 + 5
```

## Оценяване в Haskell: пример 1

```
sumFirst (x:xs) (y:ys) = x + y
```

```
sumFirst [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) [1..10] [5..50]
```

```
→ (\(x:xs) -> \(y:ys) -> x + y) (1:[2..10]) [5..50]
```

```
→ let x=1; xs=[2..10] in (\(y:ys) -> x + y) [5..50]
```

```
→ let x=1; xs=[2..10] in (\ (y:ys) -> x + y) (5:[6..50])
```

```
→ let x=1; xs=[2..10]; y=5; ys=[6..50] in x+y
```

```
→ 1 + 5 → 6
```

## Оценяване в Haskell: пример 2

```
(filter isPrime [4..1000]) !! 1
```

## Оценяване в Haskell: пример 2

```
(filter isPrime [4..1000]) !! 1  
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
```

## Оценяване в Haskell: пример 2

```
(filter isPrime [4..1000]) !! 1
```

```
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
```

```
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
```

## Оценяване в Haskell: пример 2

```

    (filter isPrime [4..1000]) !! 1
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
→ ... (\p (z:zs) ->      if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) isPrime [4..1000]...

```

## Оценяване в Haskell: пример 2

```

    (filter isPrime [4..1000]) !! 1
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
→ ... (\p (z:zs) ->      if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) isPrime [4..1000]...
→ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) [4..1000]...

```



## Оценяване в Haskell: пример 2

```

(filter isPrime [4..1000]) !! 1
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
→ ... (\p (z:zs) ->      if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) isPrime [4..1000]...
→ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) [4..1000]...
→ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) (4:[5..1000]))...

```

## Оценяване в Haskell: пример 2

```

(filter isPrime [4..1000]) !! 1
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
→ ... (\p (z:zs) ->      if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) isPrime [4..1000]...
→ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) [4..1000]...
→ ...let p=isPrime in (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) (4:[5..1000])...
→ ...let p=isPrime; z=4; zs=[5..1000] in
      if p z then z:filter p zs else filter p zs...

```

## Оценяване в Haskell: пример 2

```

(filter isPrime [4..1000]) !! 1
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
→ (\(x:xs) n -> xs !! (n-1)) (filter isPrime [4..1000]) 1
→ ... (\p (z:zs) ->      if p z then z:filter p zs
                               else filter p zs) isPrime [4..1000]...
→ ...let p=isPrime in (\(z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                               else filter p zs) [4..1000]...
→ ...let p=isPrime in (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                               else filter p zs) (4:[5..1000]))...
→ ...let p=isPrime; z=4; zs=[5..1000] in
    if p z then z:filter p zs else filter p zs...
→ ...let p=isPrime; z=4; zs=[5..1000] in
    if False then z:filter p zs else filter p zs...

```

## Оценяване в Haskell: пример 2

$\rightarrow \dots \underline{(\backslash p (z:zs) \rightarrow \quad \underline{\text{if } p \text{ z then } z:\text{filter } p \text{ zs}}$   
 $\quad \underline{\text{else filter } p \text{ zs}) \text{ isPrime } [5..1000] \dots}$

## Оценяване в Haskell: пример 2

→ ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [5..1000]...

→ ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (5:[6..1000]))...

## Оценяване в Haskell: пример 2

- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [5..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (5:[6..1000])...
- ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...

## Оценяване в Haskell: пример 2

- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [5..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (5:[6..1000]))...
- ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...
- ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in  
if True then z:filter p zs else filter p zs...

## Оценяване в Haskell: пример 2

- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [5..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (5:[6..1000])...
- ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...
- ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in  
if True then z:filter p zs else filter p zs...
- (\ (x:xs) n -> xs !! (n-1)) (5:filter isPrime [6..1000]) 1



## Оценяване в Haskell: пример 2

- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [5..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (5:[6..1000])...
- ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...
- ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in  
if True then z:filter p zs else filter p zs...
- (\ (x:xs) n -> xs !! (n-1)) (5:filter isPrime [6..1000]) 1
- let xs=filter isPrime [6..1000] in (\n -> xs !! (n-1)) 1

## Оценяване в Haskell: пример 2

```

→ ... (\p (z:zs) ->      if p z then z:filter p zs
                        else filter p zs) isPrime [5..1000]...
→ ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs
                        else filter p zs) (5:[6..1000])...
→ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
  if p z then z:filter p zs else filter p zs...
→ ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in
  if True then z:filter p zs else filter p zs...
→ (\ (x:xs) n -> xs !! (n-1)) (5:filter isPrime [6..1000]) 1
→ let xs=filter isPrime [6..1000] in (\ n -> xs !! (n-1)) 1
→ let xs=filter isPrime [6..1000]; n=1 in xs !! (n-1)

```

## Оценяване в Haskell: пример 2

- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [5..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (5:[6..1000]))...
- ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...
- ...let p=isPrime; z=5; zs=[6..1000] in  
if True then z:filter p zs else filter p zs...
- (\ (x:xs) n -> xs !! (n-1)) (5:filter isPrime [6..1000]) 1
- let xs=filter isPrime [6..1000] in (\n -> xs !! (n-1)) 1
- let xs=filter isPrime [6..1000]; n=1 in xs !! (n-1)
- (\ (y:\_) 0 -> y) (filter isPrime [6..1000]) 0

## Оценяване в Haskell: пример 2

→ ... (\p (z:zs) ->      if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [6..1000]...

## Оценяване в Haskell: пример 2

```

→ ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) isPrime [6..1000]...
→ ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs
      else filter p zs) (6:[7..1000])...

```

## Оценяване в Haskell: пример 2

- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [6..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (6:[7..1000]))...
- ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...

## Оценяване в Haskell: пример 2

- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [6..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (6:[7..1000]))...
- ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...
- ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in  
if False then z:filter p zs else filter p zs...

## Оценяване в Haskell: пример 2

- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [6..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (6:[7..1000])...
- ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...
- ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in  
if False then z:filter p zs else filter p zs...
- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [7..1000]...



## Оценяване в Haskell: пример 2

- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [6..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (6:[7..1000]))...
- ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...
- ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in  
if False then z:filter p zs else filter p zs...
- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [7..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (7:[8..1000]))...

## Оценяване в Haskell: пример 2

- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [6..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (6:[7..1000]))...
- ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...
- ...let p=isPrime; z=6; zs=[7..1000] in  
if False then z:filter p zs else filter p zs...
- ... (\p (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) isPrime [7..1000]...
- ...let p=isPrime in (\ (z:zs) -> if p z then z:filter p zs  
else filter p zs) (7:[8..1000]))...
- ...let p=isPrime; z=7; zs=[8..1000] in  
if p z then z:filter p zs else filter p zs...

## Оценяване в Haskell: пример 2

→ ...let p=isPrime; z=7; zs=[8..1000] in  
if True then z:filter p zs else filter p zs ...

## Оценяване в Haskell: пример 2

```
→ ...let p=isPrime; z=7; zs=[8..1000] in  
    if True then z:filter p zs else filter p zs ...  
→ (\ (y:_) 0 -> y) (7:filter isPrime [8..1000]) 0
```

## Оценяване в Haskell: пример 2

```

→ ...let p=isPrime; z=7; zs=[8..1000] in
    if True then z:filter p zs else filter p zs ...
→ (\ (y:_) 0 -> y) (7:filter isPrime [8..1000]) 0
→ let y=7 in y

```

## Оценяване в Haskell: пример 2

```
→ ...let p=isPrime; z=7; zs=[8..1000] in
    if True then z:filter p zs else filter p zs ...
→ (\ (y:_) 0 -> y) (7:filter isPrime [8..1000]) 0
→ let y=7 in y
→ 7
```

# Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда

# Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност,  $x:xs = (:) x xs$ , където



# Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност,  $x:xs = (:) x xs$ , където
  - $x$  е обещание за глава

# Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност,  $x:xs = (:) x xs$ , където
  - $x$  е обещание за глава
  - $xs$  е обещание за опашка

# Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност,  $x:xs = (:) x xs$ , където
  - $x$  е обещание за глава
  - $xs$  е обещание за опашка
- **списъците в Haskell всъщност са потоци!**

# Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност,  $x:xs = (:) x xs$ , където
  - $x$  е обещание за глава
  - $xs$  е обещание за опашка
- **списъците в Haskell всъщност са потоци!**
- можем да работим с безкрайни списъци

# Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност,  $x:xs = (:) x xs$ , където
  - $x$  е обещание за глава
  - $xs$  е обещание за опашка
- **списъците в Haskell всъщност са потоци!**
- можем да работим с безкрайни списъци
  - `ones = 1 : ones`

# Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност,  $x:xs = (:) x xs$ , където
  - $x$  е обещание за глава
  - $xs$  е обещание за опашка
- **списъците в Haskell всъщност са потоци!**
- можем да работим с безкрайни списъци
  - `ones = 1 : ones`
  - `length ones`  $\rightarrow \dots$

# Потоци в Haskell

- Можем да си мислим, че аргументите в Haskell са **обещания**, които се изпълняват при нужда
- В частност,  $x:xs = (:) x xs$ , където
  - $x$  е обещание за глава
  - $xs$  е обещание за опашка
- **списъците в Haskell всъщност са потоци!**
- можем да работим с безкрайни списъци
  - $ones = 1 : ones$
  - `length ones`  $\rightarrow \dots$
  - `take 5 ones`  $\rightarrow [1,1,1,1,1]$

# Генериране на безкрайни списъци

- $[a..] \rightarrow [a, a + 1, a + 2, \dots]$
- Примери:
  - `nats = [0..]`
  - `take 5 [0..] → [0,1,2,3,4]`
  - `take 26 ['a'..] → "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"`
- Синтактична захар за `enumFrom from`



# Генериране на безкрайни списъци

- $[a..] \rightarrow [a, a + 1, a + 2, \dots]$
- Примери:
  - `nats = [0..]`
  - `take 5 [0..] → [0,1,2,3,4]`
  - `take 26 ['a'..] → "abcdefghijklmnopqrstuvwxy"`
- Синтактична захар за `enumFrom from`
- $[a, a + \Delta x ..] \rightarrow [a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \dots, ]$
- Примери:
  - `evens = [0,2..]`
  - `take 5 evens → [0,2,4,6,8]`
  - `take 7 ['a','e'..] → "aeimquy"`
- Синтактична захар за `enumFromThen from then`

# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`

# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat` :: `a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`

# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat` :: `a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`

# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat` :: `a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`

# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat` :: `a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle` :: `[a] -> [a]`

# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat` :: `a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle` :: `[a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3] -> [1,2,3,1,2,3,...]`

# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3] -> [1,2,3,1,2,3,...]`
  - `cycle 1 = 1 ++ cycle 1`



# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3] → [1,2,3,1,2,3,...]`
  - `cycle 1 = 1 ++ cycle 1`
  - създава безкраен списък повтарайки подадения (краен) списък

# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3] → [1,2,3,1,2,3,...]`
  - `cycle 1 = 1 ++ cycle 1`
  - създава безкраен списък повтарайки подадения (краен) списък
- `iterate :: (a -> a) -> a -> [a]`

# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat` :: `a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle` :: `[a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3] -> [1,2,3,1,2,3,...]`
  - `cycle 1 = 1 ++ cycle 1`
  - създава безкраен списък повтарайки подадения (краен) списък
- `iterate` :: `(a -> a) -> a -> [a]`
  - `iterate f z` създава безкрайния списък `[z,f(z),f(f(z)),...]`

# Генериране на безкрайни списъци

- `repeat :: a -> [a]`
  - създава безкрайния списък `[x,x,...]`
  - `repeat x = x : repeat x`
  - `replicate n x = take n (repeat x)`
- `cycle :: [a] -> [a]`
  - `cycle [1,2,3] -> [1,2,3,1,2,3,...]`
  - `cycle 1 = 1 ++ cycle 1`
  - създава безкраен списък повтарайки подадения (краен) списък
- `iterate :: (a -> a) -> a -> [a]`
  - `iterate f z` създава безкрайния списък `[z,f(z),f(f(z)),...]`
  - `iterate f z = z : iterate f (f z)`

# Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

## Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = ?`

## Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`

## Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = ?`



## Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = [ (x,x+2) | x <- [1..], prime x, prime (x+2) ]`

## Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = [ (x,x+2) | x <- [1..], prime x, prime (x+2) ]`
- `pairs = ?`

## Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = [ (x,x+2) | x <- [1..], prime x, prime (x+2) ]`
- `pairs = [ (x,y) | x <- [0..], y <- [0..x - 1] ]`

## Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = [ (x,x+2) | x <- [1..], prime x, prime (x+2) ]`
- `pairs = [ (x,y) | x <- [0..], y <- [0..x - 1] ]`
- `pythagoreanTriples = ?`

## Отделяне на безкрайни списъци

Отделянето на списъци работи и за безкрайни списъци.

- `oddSquares = [ x^2 | x <- [1,3..] ]`
- `twins = [ (x,x+2) | x <- [1..], prime x, prime (x+2) ]`
- `pairs = [ (x,y) | x <- [0..], y <- [0..x - 1] ]`
- `pythagoreanTriples = [ (a,b,c) | c <- [1..],  
b <- [1..c-1],  
a <- [1..b-1],  
a^2 + b^2 == c^2 ]`

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \dots \end{pmatrix} * 2$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \dots \end{matrix}$$

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`



## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..] → ?`

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..] → ...`

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..] → ...`
  - **Внимание:** `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..] → ...`
  - **Внимание:** `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..] → ...`
  - **Внимание:** `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets → [[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..] → ...`
  - **Внимание:** `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets → [[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`
  - `take 5 (foldr (++) [] triplets) → ?`

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..] → ...`
  - **Внимание:** `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets → [[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`
  - `take 5 (foldr (++) [] triplets) → [3,2,1,6,5]`

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..] → ...`
  - **Внимание:** `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets → [[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`
  - `take 5 (foldr (++) [] triplets) → [3,2,1,6,5]`
  - `take 5 (foldl (++) [] triplets) → ?`



## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..] → ...`
  - **Внимание:** `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets → [[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`
  - `take 5 (foldr (++) [] triplets) → [3,2,1,6,5]`
  - `take 5 (foldl (++) [] triplets) → ...`

## Функции от по-висок ред над безкрайни списъци

Повечето функции от по-висок ред работят и над безкрайни списъци!

- `powers2 = 1 : map (*2) powers2`
- `notdiv k = filter (\x -> x `mod` k > 0) [1..]`
- `fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)`
- `foldr (+) 0 [1..] → ...`
  - **Внимание:** `foldr` не работи над безкрайни списъци с операции, които изискват оценка на десния си аргумент!
  - `triplets = iterate (map (+3)) [3,2,1]`
  - `take 3 triplets → [[3,2,1],[6,5,4],[9,8,7]]`
  - `take 5 (foldr (++) [] triplets) → [3,2,1,6,5]`
  - `take 5 (foldl (++) [] triplets) → ...`
  - `foldl` не може да работи с безкрайни списъци!

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \circ x = f \ x$

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \circ x = f \ x$
- За какво може да бъде полезна?

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\dots ((f x_1) x_2) \dots x_n) = f x_1 x_2 \dots x_n$



# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\dots ((f x_1) x_2) \dots x_n) = f x_1 x_2 \dots x_n$
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 \$ f_2 \$ \dots \$ f_n \$ x$

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\dots ((f x_1) x_2) \dots x_n) = f x_1 x_2 \dots x_n$
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 \$ f_2 \$ \dots \$ f_n \$ x$
- Примери:

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\dots ((f x_1) x_2) \dots x_n) = f x_1 x_2 \dots x_n$
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 \$ f_2 \$ \dots \$ f_n \$ x$
- Примери:
  - `head (tail (take 5 (drop 7 1)))`

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\dots ((f x_1) x_2) \dots x_n) = f x_1 x_2 \dots x_n$
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 \$ f_2 \$ \dots \$ f_n \$ x$
- Примери:
  - `head $ tail $ take 5 $ drop 7 $ l`

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\dots ((f x_1) x_2) \dots x_n) = f x_1 x_2 \dots x_n$
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 \$ f_2 \$ \dots \$ f_n \$ x$
- Примери:
  - `head $ tail $ take 5 $ drop 7 $ 1`
  - `sum (map (^2) (filter odd [1..10]))`

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\dots ((f x_1) x_2) \dots x_n) = f x_1 x_2 \dots x_n$
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 \$ f_2 \$ \dots \$ f_n \$ x$
- Примери:
  - `head $ tail $ take 5 $ drop 7 $ 1`
  - `sum $ map (~2) $ filter odd $ [1..10]`

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\dots ((f x_1) x_2) \dots x_n) = f x_1 x_2 \dots x_n$
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 \$ f_2 \$ \dots \$ f_n \$ x$
- Примери:
  - `head $ tail $ take 5 $ drop 7 $ 1`
  - `sum $ map (~2) $ filter odd $ [1..10]`
  - `map ($2) [(+2), (3~), (*5)] → ?`

$(\lambda f \rightarrow f \$ 2) (\$ 2)$

# Апликация

- Операцията “апликация” се дефинира с  $f \$ x = f x$
- За какво може да бъде полезна?
- Операцията  $\$$  е с най-нисък приоритет и е дясноасоциативна
  - за разлика от прилагането на функции, което е с най-висок приоритет и лявоасоциативно
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $(\dots ((f x_1) x_2) \dots x_n) = f x_1 x_2 \dots x_n$
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 \$ f_2 \$ \dots \$ f_n \$ x$
- Примери:
  - `head $ tail $ take 5 $ drop 7 $ 1`
  - `sum $ map (~2) $ filter odd $ [1..10]`
  - `map ($2) [(+2), (3~), (*5)] → [4,9,10]`



# Композиция

- $(f \circ g) x = f (g x)$  — операция “композиция”

## Композиция

$$(f \circ g) \circ h \equiv f \circ (g \circ h)$$

- $(f \circ g) x = f (g x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна

# Композиция

- $(f \circ g) x = f (g x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно

# Композиция

- $(f \cdot g) x = f (g x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно

$$f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = (f_1 \cdot (f_2 \cdot \dots \cdot f_n)) x$$

$$(f_1 \cdot (f_2 \cdot \dots \cdot (f_n \cdot x)))$$

# Композиция

- $(f \cdot g) x = f (g x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n \$ x$
- Примери:

# Композиция

- $(f . g) x = f (g x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 . f_2 . \dots . f_n \$ x$
- Примери:

- $\text{sublist } n \ m \ l = (\text{take } m) (\text{drop } n \ l) = (f . g) l$

*(Handwritten red annotations: 'take m' is underlined with 'f' below it, 'drop n l' is underlined with 'g' below it, and the entire expression is crossed out with a red slash.)*

# Композиция

- $(f . g) x = f (g x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 . f_2 . \dots . f_n \$ x$
- Примери:
  - `sublist n m = take m . drop n`

# Композиция

- $(f . g) x = f (g x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 . f_2 . \dots . f_n \$ x$
- Примери:
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares 1 = sum (map (^2) (filter odd 1))`



# Композиция

- $(f . g) x = f (g x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 (f_2 \dots (f_n x) \dots) = f_1 . f_2 . \dots . f_n \$ x$
- Примери:
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`

# Композиция

- $(f \ . \ g) \ x = f \ (g \ x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 \ (f_2 \ \dots \ (f_n \ x) \ \dots) = f_1 \ . \ f_2 \ . \ \dots \ . \ f_n \ \$ \ x$
- Примери:
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`

# Композиция

- $(f \ . \ g) \ x = f \ (g \ x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 \ (f_2 \ \dots \ (f_n \ x) \ \dots) = f_1 \ . \ f_2 \ . \ \dots \ . \ f_n \ \$ \ x$
- Примери:
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id (replicate n f)`

# Композиция

- $(f \ . \ g) \ x = f \ (g \ x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 \ (f_2 \ \dots \ (f_n \ x) \ \dots) = f_1 \ . \ f_2 \ \dots \ f_n \ \$ \ x$
- Примери:
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id ((replicate n) f)`

# Композиция

- $(f \ . \ g) \ x = f \ (g \ x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 \ (f_2 \ \dots \ (f_n \ x) \ \dots) = f_1 \ . \ f_2 \ . \ \dots \ . \ f_n \ \$ \ x$
- Примери:
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id ((replicate n) f)`
  - `repeated n = foldr (.) id . replicate n`

# Композиция

- $(f \ . \ g) \ x = f \ (g \ x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 \ (f_2 \ \dots \ (f_n \ x) \ \dots) = f_1 \ . \ f_2 \ . \ \dots \ . \ f_n \ \$ \ x$
- Примери:

- `sublist n m = take m . drop n`
- `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
- `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`
- `repeated n f = foldr (.) id (replicate n f)`
- `repeated n f = foldr (.) id ((replicate n) f)`
- `repeated n = (foldr (.) id) . (replicate n)`
- `repeated n = (foldr (.) id) . (replicate n)`

f

f'

# Композиция

- $(f \ . \ g) \ x = f \ (g \ x)$  — операция “композиция”
- с най-висок приоритет, дясноасоциативна
- Може да бъде използвана за спестяване на скоби вложени надясно
- $f_1 \ (f_2 \ \dots \ (f_n \ x) \ \dots) = f_1 \ . \ f_2 \ . \ \dots \ . \ f_n \ \$ \ x$
- Примери:
  - `sublist n m = take m . drop n`
  - `sumOddSquares = sum . map (^2) . filter odd`
  - `repeated n f x = foldr ($) x (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id (replicate n f)`
  - `repeated n f = foldr (.) id ((replicate n) f)`
  - `repeated n = foldr (.) id . replicate n`
  - `repeated n = (foldr (.) id .) (replicate n)`
  - `repeated = (foldr (.) id .) . replicate`

## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите  $\$$  и  $.$  можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.



## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите  $\$$  и  $.$  можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите \$ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

**Пример 1:**

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`

## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите `$` и `.` можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

**Пример 1:**

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`
- `g = filter (\f -> f $ 2 > 3)`

## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите \$ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

**Пример 1:**

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`
- `g = filter (\f -> f $ 2 > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`

## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите \$ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

**Пример 1:**

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`
- `g = filter (\f -> f $ 2 > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите `$` и `.` можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

**Пример 1:**

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`
- `g = filter (\f -> f $ 2 > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

**Пример 2:**

## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите `$` и `.` можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

### Пример 1:

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`
- `g = filter (\f -> f $ 2 > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

### Пример 2:

- `split3 11 = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0), (==0), (>0)]) 11`

## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите \$ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

### Пример 1:

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`
- `g = filter (\f -> f $ 2 > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

*flip f x y = f y x*

### Пример 2:

- `split3 11 = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)]) 11`
- `split3 = map (\x -> map (\f -> flip filter x f) [(<0),(==0),(>0)])`



## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите `$` и `.` можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

### Пример 1:

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`
- `g = filter (\f -> f $ 2 > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

### Пример 2:

- `split3 11 = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)]) 11`
- `split3 = map (\x -> map (\f -> flip filter x f) [(<0),(==0),(>0)])`
- `split3 = map (\x -> map (flip filter x) [(<0),(==0),(>0)])`

## Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите \$ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

**Пример 1:**

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`
- `g = filter (\f -> f $ 2 > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

**Пример 2:**

- `split3 ll = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0), (==0), (>0)]) ll`
- `split3 = map (\x -> map (\f -> flip filter x f) [(<0), (==0), (>0)])`
- `split3 = map (\x -> map (flip filter x) [(<0), (==0), (>0)])`
- `split3 = map (\x -> flip map [(<0), (==0), (>0)] (flip filter x))`

# Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите \$ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

**Пример 1:**

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`
- `g = filter (\f -> f $ 2 > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

**Пример 2:**

- `split3 11 = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0),(==0),(>0)]) 11`
- `split3 = map (\x -> map (\f -> flip filter x f) [(<0),(==0),(>0)])`
- `split3 = map (\x -> map (flip filter x) [(<0),(==0),(>0)])`
- `split3 = map (\x -> flip map [(<0),(==0),(>0)] (flip filter x))`
- `split3 = map (flip map [(<0),(==0),(>0)] . flip filter)`

# Безточково (point-free) програмиране

С помощта на операциите \$ и . можем да дефинираме функции чрез директно използване на други функции.

Този стил се нарича **безточково програмиране**.

## Пример 1:

- `g 1 = filter (\f -> f 2 > 3) 1`
- `g = filter (\f -> f $ 2 > 3)`
- `g = filter (\f -> (>3) (($2) f))`
- `g = filter $ (>3) . ($2)`

## Пример 2:

- `split3 ll = map (\x -> map (\f -> filter f x) [(<0), (==0), (>0)]) ll`
- `split3 = map (\x -> map (\f -> flip filter x f) [(<0), (==0), (>0)])`
- `split3 = map (\x -> map (flip filter x) [(<0), (==0), (>0)])`
- `split3 = map (\x -> flip map [(<0), (==0), (>0)] (flip filter x))`
- `split3 = map (flip map [(<0), (==0), (>0)] . flip filter)`
- `split3 = map $ flip map [(<0), (==0), (>0)] . flip filter`

# Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още функциите:

- `join`  $f\ x = f\ x\ x$
- `curry`  $f\ x\ y = f\ (x,y)$
- `uncurry`  $f\ (x,y) = f\ x\ y$

# Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още функциите:

- `join`  $f\ x = f\ x\ x$
- `curry`  $f\ x\ y = f\ (x,y)$
- `uncurry`  $f\ (x,y) = f\ x\ y$

Пример 3:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`

# Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още функциите:

- `join`  $f\ x = f\ x\ x$
- `curry`  $f\ x\ y = f\ (x,y)$
- `uncurry`  $f\ (x,y) = f\ x\ y$

Пример 3:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) ((zip l . tail) l)`

## Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още функциите:

- `join` <sup>diap</sup>  $f\ x = f\ x\ x$
- `curry`  $f\ x\ y = f\ (x,y)$
- `uncurry`  $f\ (x,y) = f\ x\ y$

Пример 3:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) ((zip l . tail) l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) ((. tail) (zip l) l)`



# Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още функциите:

- `join`  $f\ x = f\ x\ x$
- `curry`  $f\ x\ y = f\ (x,y)$
- `uncurry`  $f\ (x,y) = f\ x\ y$

Пример 3:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) ((zip l . tail) l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) ((. tail) (zip l) l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) ((. tail) . zip) l l)`

## Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още функциите:

- `join`  $f\ x = f\ x\ x$
- `curry`  $f\ x\ y = f\ (x,y)$
- `uncurry`  $f\ (x,y) = f\ x\ y$

Пример 3:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) ((zip l . tail) l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) ((. tail) (zip l) l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) ((. tail) . zip) l l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) (join ((. tail) . zip) l)`

# Безточково (point-free) програмиране

Можем да използваме още функциите:

- `join`  $f\ x = f\ x\ x$
- `curry`  $f\ x\ y = f\ (x,y)$
- `uncurry`  $f\ (x,y) = f\ x\ y$

Пример 3:

- `sorted l = all (\(x,y) -> x <= y) (zip l (tail l))`
- `sorted l = all (\(x,y) -> (<=) x y) ((zip l . tail) l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) ((. tail) (zip l) l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) ((. tail) . zip) l l)`
- `sorted l = all (uncurry (<=)) (join ((. tail) . zip) l)`
- `sorted = all (uncurry (<=)) . join ((. tail) . zip)`

# Безточково (point-free) програмиране

## Пример 4:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0)) m`

# Безточково (point-free) програмиране

## Пример 4:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0)) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`

# Безточково (point-free) програмиране

## Пример 4:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0)) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> (>0) ((mod k) x)))`

## Безточково (point-free) програмиране

## Пример 4:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0)) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> (>0) ((mod k) x)))`
- `checkMatrix k = all (\r -> any ((>0) . (mod k)) r)`

# Безточково (point-free) програмиране

## Пример 4:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0)) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> (>0) ((mod k) x)))`
- `checkMatrix k = all (\r -> any ((>0) . (mod k)) r)`
- `checkMatrix k = all (any ((>0) . (mod k)))`



# Безточково (point-free) програмиране

## Пример 4:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0)) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> (>0) ((mod k) x)))`
- `checkMatrix k = all (\r -> any ((>0) . (mod k)) r)`
- `checkMatrix k = all (any ((>0) . (mod k)))`
- `checkMatrix k = all (any ((.) (>0) (mod k)))`

# Безточково (point-free) програмиране

## Пример 4:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0)) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> (>0) ((mod k) x)))`
- `checkMatrix k = all (\r -> any ((>0) . (mod k)) r)`
- `checkMatrix k = all (any ((>0) . (mod k)))`
- `checkMatrix k = all (any ((.) (>0) (mod k)))`
- `checkMatrix k = all . any . ((.)(>0)) . mod $ k`

# Безточково (point-free) програмиране

## Пример 4:

- `checkMatrix k m = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0)) m`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> mod k x > 0) r)`
- `checkMatrix k = all (\r -> any (\x -> (>0) ((mod k) x)))`
- `checkMatrix k = all (\r -> any ((>0) . (mod k)) r)`
- `checkMatrix k = all (any ((>0) . (mod k)))`
- `checkMatrix k = all (any ((.) (>0) (mod k)))`
- `checkMatrix k = all . any . ((.)(>0)) . mod $ k`
- `checkMatrix = all . any . ((>0).) . mod`

## Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

## Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`

# Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0) → ?`

# Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)`  $\longrightarrow$  забива, но не изразходва памет

# Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)`  $\longrightarrow$  забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация



# Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)`  $\longrightarrow$  забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0)`  $\longrightarrow$  `(f 1)`  $\longrightarrow$  `(f 0)`  $\longrightarrow$  `(f 1)`  $\longrightarrow$  ...

# Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)`  $\longrightarrow$  забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0)`  $\longrightarrow$  `(f 1)`  $\longrightarrow$  `(f 0)`  $\longrightarrow$  `(f 1)`  $\longrightarrow$  ...

В Haskell:

# Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` → забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0) → (f 1) → (f 0) → (f 1) → ...`

В Haskell:

- `f x = f (1-x)`

# Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)`  $\longrightarrow$  забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0)`  $\longrightarrow$  `(f 1)`  $\longrightarrow$  `(f 0)`  $\longrightarrow$  `(f 1)`  $\longrightarrow$  ...

В Haskell:

- `f x = f (1-x)`
- `f 0`  $\longrightarrow$  ?

## Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` → забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0) → (f 1) → (f 0) → (f 1) → ...`

В Haskell:

- `f x = f (1-x)`
- `f 0` → **забива с изтичане на памет!**

## Разходване на памет при лениво оценяване

Ленивото оценяване може да доведе до голям разход на памет.

В Scheme:

- `(define (f x) (f (- 1 x)))`
- `(f 0)` → забива, но не изразходва памет
- `f` е **опашково-рекурсивна** и се реализира чрез итерация
- `(f 0) → (f 1) → (f 0) → (f 1) → ...`

В Haskell:

- `f x = f (1-x)`
- `f 0` → **забива с изтичане на памет!**
- `f 0 → f (1-0) → f (1-(1-0)) → f (1-(1-(1-0)))... →`

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание



# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`
  - `second [1..1010] 2 → 2`

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`
  - `second [1..1010] 2 → 2`
  - `seq [1..1010] 2 → 2`

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`
  - `second [1..1010] 2 → 2`
  - `seq [1..1010] 2 → 2`
  - `f x = seq x (f (1-x))`

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`
  - `second [1..1010] 2 → 2`
  - `seq [1..1010] 2 → 2`
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0 → ?`



# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`
  - `second [1..1010] 2 → 2`
  - `seq [1..1010] 2 → 2`
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0 → забива, но не изразходва памет!`

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`
  - `second [1..1010] 2 → 2`
  - `seq [1..1010] 2 → 2`
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0 → забива, но не изразходва памет!`
- `f $! x = seq x (f x)`

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`
  - `second [1..1010] 2 → 2`
  - `seq [1..1010] 2 → 2`
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0 → забива, но не изразходва памет!`
- `f $! x = seq x $ f x`

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`
  - `second [1..1010] 2 → 2`
  - `seq [1..1010] 2 → 2`
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0 → забива, но не изразходва памет!`
- `f $! x = seq x $ f x`
  - първо оценява `x` и след това прилага `f` над оценката на `x`

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`
  - `second [1..1010] 2 → 2`
  - `seq [1..1010] 2 → 2`
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0 → забива, но не изразходва памет!`
- `f $! x = seq x $ f x`
  - първо оценява `x` и след това прилага `f` над оценката на `x`
  - прилага `f` над `x` със стриктно оценяване

# Стриктно оценяване в Haskell

- в Haskell може да изискаме даден израз да се оцени веднага
- еквивалентно на форсиране на обещание
- `seq :: a -> b -> b`
- оценява първия си аргумент и връща втория като резултат
- Примери:
  - `second x y = y`
  - `second [1..1010] 2 → 2`
  - `seq [1..1010] 2 → 2`
  - `f x = seq x (f (1-x))`
  - `f 0 → забива, но не изразходва памет!`
- `f $! x = seq x $ f x`
  - първо оценява `x` и след това прилага `f` над оценката на `x`
  - прилага `f` над `x` със стриктно оценяване
  - `f x = f $! (1-x)`

Изразходване на памет при `foldl`

```
foldl (+) 0 [1..4]
```

Изразходване на памет при `foldl`

```
foldl (+) 0 [1..4]
```

```
→ foldl (+) (0 + 1) [2..4]
```



Изразходване на памет при `foldl`

`foldl (+) 0 [1..4]`

→ `foldl (+) (0 + 1) [2..4]`

→ `foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]`

Изразходване на памет при `foldl`

`foldl (+) 0 [1..4]`

→ `foldl (+) (0 + 1) [2..4]`

→ `foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]`

→ `foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]`

Изразходване на памет при `foldl`

```
foldl (+) 0 [1..4]
```

```
→ foldl (+) (0 + 1) [2..4]
```

```
→ foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
```

```
→ foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
```

```
→ foldl (+) (((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) [])
```

Изразходване на памет при `foldl`

```
foldl (+) 0 [1..4]
```

```
→ foldl (+) (0 + 1) [2..4]
```

```
→ foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
```

```
→ foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
```

```
→ foldl (+) (((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) [])
```

```
→ (((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)
```

Изразходване на памет при `foldl`

`foldl (+) 0 [1..4]`

→ `foldl (+) (0 + 1) [2..4]`

→ `foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]`

→ `foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]`

→ `foldl (+) (((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) [])`

→ `(((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)`

→ `((1 + 2) + 3) + 4)`

Изразходване на памет при `foldl`

```
foldl (+) 0 [1..4]
```

```
→ foldl (+) (0 + 1) [2..4]
```

```
→ foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
```

```
→ foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
```

```
→ foldl (+) (((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) [])
```

```
→ (((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)
```

```
→ (((1 + 2) + 3) + 4)
```

```
→ ((3 + 3) + 4)
```

Изразходване на памет при `foldl`

`foldl (+) 0 [1..4]`

→ `foldl (+) (0 + 1) [2..4]`

→ `foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]`

→ `foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]`

→ `foldl (+) (((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) [])`

→ `(((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)`

→ `((((1 + 2) + 3) + 4)`

→ `((3 + 3) + 4)`

→ `(6 + 4)`

Изразходване на памет при `foldl`

`foldl (+) 0 [1..4]`

→ `foldl (+) (0 + 1) [2..4]`

→ `foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]`

→ `foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]`

→ `foldl (+) (((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) [])`

→ `(((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)`

→ `((((1 + 2) + 3) + 4)`

→ `((3 + 3) + 4)`

→ `(6 + 4)`

→ `10`



Изразходване на памет при `foldl`

```
foldl (+) 0 [1..4]
```

```
→ foldl (+) (0 + 1) [2..4]
```

```
→ foldl (+) ((0 + 1) + 2) [3..4]
```

```
→ foldl (+) (((0 + 1) + 2) + 3) [4..4]
```

```
→ foldl (+) (((((0 + 1) + 2) + 3) + 4) [])
```

```
→ (((((0 + 1) + 2) + 3) + 4)
```

```
→ (((1 + 2) + 3) + 4)
```

```
→ ((3 + 3) + 4)
```

```
→ (6 + 4)
```

```
→ 10
```

**Проблем:** Изразходва памет при оценяване, понеже отлага изчисления!

## Стриктен вариант на foldl

$$\text{foldl}' \_ \text{nv} [] = \text{nv}$$

$$\text{foldl}' \text{ op } \text{nv} (\text{x}:\text{xs}) = (\text{foldl}' \text{ op } \$! (\text{op } \text{nv} \text{ x}) \text{ xs}$$

$$\text{foldl}' \text{ op } \$! \text{ op } \text{nv} \text{ x } \$ \text{ xs}$$

Стриктен вариант на `foldl`

```
foldl' _ nv [] = nv
```

```
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

```
foldl' (+) 0 [1..4]
```

Стриктен вариант на `foldl`

```
foldl' _ nv [] = nv
```

```
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

```
    foldl' (+) 0 [1..4]
```

```
→ foldl' (+) 1 [2..4]
```

Стриктен вариант на `foldl`

```
foldl' _ nv [] = nv
```

```
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

```
    foldl' (+) 0 [1..4]
```

```
→ foldl' (+) 1 [2..4]
```

```
→ foldl' (+) 3 [3..4]
```

## Стриктен вариант на foldl

```
foldl' _ nv [] = nv
```

```
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

```
    foldl' (+) 0 [1..4]
```

```
→ foldl' (+) 1 [2..4]
```

```
→ foldl' (+) 3 [3..4]
```

```
→ foldl' (+) 6 [4..4]
```

## Стриктен вариант на foldl

```
foldl' _ nv [] = nv
```

```
foldl' op nv (x:xs) = (foldl' op $! op nv x) xs
```

```
    foldl' (+) 0 [1..4]
```

```
→ foldl' (+) 1 [2..4]
```

```
→ foldl' (+) 3 [3..4]
```

```
→ foldl' (+) 6 [4..4]
```

```
→ foldl' (+) 10 []
```