Изпит по "Дискретни структури" (СУ, ФМИ, 13. 02. 2017 г.) — задачи за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*120*

Забележка: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Задача 1. Нека $G = (V, E)$ е ориентиран граф с поне два върха, такъв, че

$$\forall u \in V,\ \forall v \in V:\ u \neq v \ \rightarrow\ (u,v) \in E \ \vee\ (v,u) \in E.$$

Докажете, че в G съществува хамилтонов маршрут, т.е. маршрут, който съдържа всеки връх точно веднъж (първият и последният връх от маршрута са различни).

Задача 2. В множеството на наредените n-орки от нули и единици разглеждаме бинарната релация R, дефинирана по следния начин: $\alpha R \beta \iff$ наредената n-орка α може да се получи от наредената n-орка β с една или повече размени на съседни елементи.

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност. **(10 точки)**

б) Пресметнете броя на класовете на еквивалентност на R. **(10 точки)**

Задача 3. Квадрат със страна 1 метър е разделен на $100 \times 100 = 10000$ квадратчета, всяко със страна 1 см. Възможно ли е да се оцветят 517 от малките квадратчета така, че всяко от оцветените квадратчета да има един или три оцветени съседа? Две квадратчета са съседни, ако имат обща страна.

Задача 4. По колко начина можем да заплатим n лева (без ресто), ако разполагаме с неограничен брой монети от 1 лв. и 2 лв., банкноти от 1 лв. и 2 лв. и купони от 2 лв.? Платежните средства от един и същи вид и стойност са неразличими, а тези от различен вид или с различна стойност са различими. Редът на събираемите <u>има</u> значение (например при $n = 2$ съществуват седем възможности).

Задача 5. Нека $\mathcal{F}_2^n$ е множеството на булевите функции на n аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
$J_2 = \left\{0,\ 1\right\}$, $\quad J_2^n = \underbrace{J_2 \times J_2 \times \ldots \times J_2}_{n \text{ пъти}}$, $\quad A = \left\{ f \in \mathcal{F}_2^n \;\middle|\; \forall \mathbf{x} \in J_2^n:\ f(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{f}(\mathbf{x}) \right\}$,

$$B = \left\{ \bigoplus_{k \in M} x_k \;\middle|\; M \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\} \right\} \bigcup \left\{ 1 \bigoplus_{k \in M} x_k \;\middle|\; M \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\} \right\}.$$

Пресметнете $\left| A \cup B \right|$.

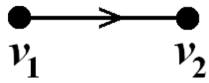
Задача 6. Докажете, че $\displaystyle\sum_{k=q}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{q} = \binom{n}{q} \cdot 2^{n-q}$.

РЕШЕНИЯ

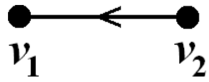
Задача 1 се решава с математическа индукция по броя n на върховете на графа, $n \geq 2$.

База: $n = 2$. Ако графът съдържа два върха v_1 и v_2 , то между тях има ребро (по условие). Налице е някоя от следните възможности:

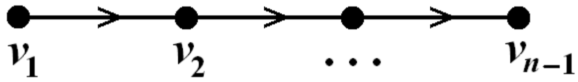
— Ако $(v_1\,,\,v_2) \in E$, то реброто $(v_1\,,\,v_2)$ представлява хамилтонов маршрут с начало v_1 и край v_2 .



— Ако $(v_2\,,\,v_1) \in E$, то реброто $(v_2\,,\,v_1)$ представлява хамилтонов маршрут с начало v_2 и край v_1 .

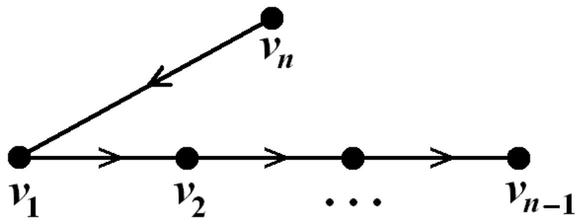


Индуктивна стъпка: Нека $n > 2$. Предполагаме, че твърдението е вярно при $|\,V\,| = n - 1$. Ще докажем, че то е вярно при $|\,V\,| = n$. Нека G е произволен граф от описания вид с n върха. Да означим с v_n кой да е от върховете на G. Нека H е подграфът на G, породен от останалите $n - 1$ върха. Щом H е подграф на G, то H също изпълнява изискването от условието: между всеки два върха на H има ребро. От индуктивното предположение следва, че в графа H има хамилтонов маршрут.

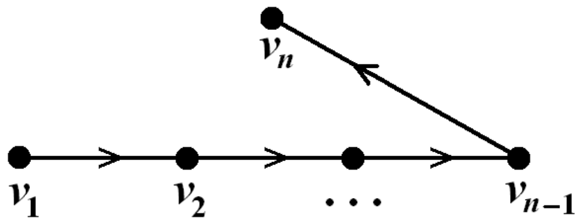


Номерираме върховете на H в реда, определен от този хамилтонов маршрут. По-нататък разглеждаме няколко случая:

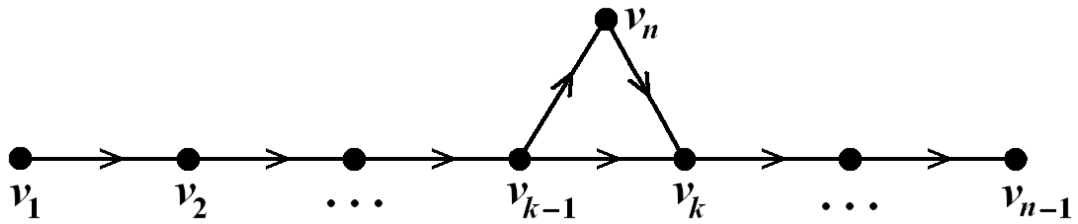
— Ако G съдържа ребро $(v_n\,,\,v_1)$, то $v_n \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \;\ldots\; \longrightarrow v_{n-1}$ представлява хамилтонов маршрут с начало v_n и край v_{n-1} .



— Ако G съдържа ребро $(v_{n-1}\,,\,v_n)$, то $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \;\ldots\; \longrightarrow v_{n-1} \longrightarrow v_n$ представлява хамилтонов маршрут с начало v_1 и край v_n .



— Нека $G = (\,V,\,E\,)$ не съдържа нито ребро $(v_n\,,\,v_1)$, нито ребро $(v_{n-1}\,,\,v_n)$. Следователно $(v_1\,,\,v_n) \in E$ и $(v_n\,,\,v_{n-1}) \in E$. Нека $A = \{1,\,2,\,\ldots\,,\,n-1\}$, $B = \{i \in A \mid (v_n\,,\,v_i) \in E\}$. Понеже $n-1 \in B$, то $1 \leq |B| \leq |A| = n-1$, следователно множеството B е крайно и непразно. Затова съществува $k = \min B$. По предположение $1 \notin B$, затова $2 \leq k \leq n-1$, откъдето $1 \leq k-1 \leq n-2$. От определението на k е ясно, че $k \in B$, $k - 1 \notin B$. С други думи, $(v_n\,,\,v_k) \in E$, $(v_n\,,\,v_{k-1}) \notin E$. От условието на задачата следва, че $(v_{k-1}\,,\,v_n) \in E$.



В такъв случай графът G отново съдържа хамилтонов маршрут:
$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \ \dots \ \longrightarrow v_{k-2} \longrightarrow v_{k-1} \longrightarrow v_n \longrightarrow v_k \longrightarrow v_{k+1} \longrightarrow \ \dots \ \longrightarrow v_{n-2} \longrightarrow v_{n-1}$.

Задача 2.

а) Релацията R е рефлексивна, тъй като всяка наредена n-орка от нули и единици може да се получи от самата себе си чрез размени на съседни елементи: първите два елемента се разместват веднъж — ако са равни, и още веднъж — ако са различни.

Релацията R е симетрична, защото, ако наредената n-орка α може да се получи от наредената n-орка β чрез размени на съседни елементи, то и β се получава от α с помощта на същите размени, но извършени в обратен ред — от последната към първата.

Релацията R е транзитивна, защото, ако наредената n-орка α може да се получи от наредената n-орка β чрез редица s_1 от размени на съседни елементи, а β може да се получи от наредената n-орка γ чрез редица s_2 от размени на съседни елементи, то и α се получава от γ чрез такава редица от размени — редицата, образувана от слепването на s_2 и s_1 (в този ред).

Щом R е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност.

б) Всеки клас на еквивалентност се състои от наредените n-орки, които се получават една от друга чрез произволно разместване на елементите. С други думи, всеки клас се състои от наредените n-орки с еднакъв сбор. Следователно класовете на еквивалентност са $n+1$, колкото са целите числа от 0 до n включително.

Задача 3. Такова оцветяване не съществува. Допускането на противното води до противоречие с теоремата, че всеки граф има четен брой върхове от нечетна степен. В случая върховете на графа са оцветените квадратчета, а ребрата свързват съседните квадратчета. Ако всяко оцветено квадратче има един или три оцветени съседа, то всеки от 517-те върха (нечетен брой) ще бъде от нечетна степен (първа или трета), което е невъзможно.

Задача 4. Да означим с a_n броя на начините, по които можем да заплатим n лева (без ресто), ако имаме неограничен брой монети от 1 лв. и 2 лв., банкноти от 1 лв. и 2 лв. и купони от 2 лв. Тази редица удовлетворява рекурентното уравнение $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ (коефициентите 2 и 3 показват броя на платежните средства от 1 лв. и 2 лв. съответно). Характеристичното уравнение $x^n = 2x^{n-1} + 3x^{n-2}$ при $x \neq 0$ е равносилно на $x^2 = 2x + 3$, чиито корени са числата 3 и -1. Следователно $a_n = C_1 \,.\, 3^n + C_2 \,.\, (-1)^n$. С непосредствено преброяване се установява, че $a_1 = 2$, $a_2 = 7$. Оттук за C_1 и C_2 се получава системата

$$\left|\begin{array}{l} 3C_1 - C_2 = 2 \\ 9C_1 + C_2 = 7 \end{array}\right.$$

с решение $C_1 = \dfrac{3}{4}$, $C_2 = \dfrac{1}{4}$. Следователно отговорът на задачата е $a_n = \dfrac{3^{n+1} + (-1)^n}{4}$.

Задача 5. A е множеството на самодвойствените, а B — на линейните булеви функции на n аргумента. Идеята на решението е да намерим отначало $|\,A\,|$, $|\,B\,|$ и $|\,A \cap B\,|$, след това чрез принципа за включване и изключване да пресметнем $|\,A \cup B\,|$.

За всяка функция от A, ако я запишем като булев вектор с 2^n елемента, ще видим, че първата половина на вектора напълно определя втората. Затова броят на самодвойствените функции е равен на броя на булевите вектори с дължина половината от 2^n, тоест 2^{n-1}. Следователно $|\,A\,| = 2^{2^{n-1}}$.

Всяка функция $f \in B$ има вида $f(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n) \;=\; a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$. Както знаем, между булевите функции и полиномите на Жегалкин има биекция, затова броят на линейните булеви функции е равен на броя на линейните полиноми на Жегалкин. Понеже всеки полином се определя еднозначно от коефициентите си, то търсеното количество е броят на булевите вектори $\left(a_0\,,\,a_1\,,\,a_2\,,\;\ldots\;,\,a_n\right)$. Оттук намираме $|\,B\,| = 2^{n+1}$.

Множеството $A \cap B$ се състои от онези линейни булеви функции, които същевременно са самодвойствени, тоест

$$f(x_1 \oplus 1\,,\,x_2 \oplus 1\,,\,\ldots\,,\,x_n \oplus 1) \;=\; f(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n) \oplus 1,$$

което е равносилно на

$$a_0 \oplus a_1\left(x_1 \oplus 1\right) \oplus a_2\left(x_2 \oplus 1\right) \oplus \ldots \oplus a_n\left(x_n \oplus 1\right) \;=\; a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \oplus 1.$$

Като разкрием скобите, получаваме

$$\left(a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots a_n\right) \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \;=\; \left(a_0 \oplus 1\right) \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n.$$

След като унищожим равните събираеми от двете страни на равенството, остава

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n \;=\; 1,$$

тоест

$$a_n \;=\; a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_{n-1} \oplus 1.$$

Щом a_n се определя еднозначно от $a_1\,,\,a_2\,,\,\ldots\,a_{n-1}$, то броят на функциите от този вид е равен на броя на булевите вектори $\left(a_0\,,\,a_1\,,\,a_2\,,\;\ldots\;,\,a_{n-1}\right)$. Следователно $|\,A \cap B\,| = 2^n$.

Заместваме намерените мощности в принципа за включване и изключване:
$|\,A \cup B\,| \;=\; |\,A\,| + |\,B\,| - |\,A \cap B\,| \;=\; 2^{2^{n-1}} + 2^{n+1} - 2^n \;=\; 2^{2^{n-1}} + 2^n.$

Задача 6 може да се реши по различни начини.

Първи начин: Преброяваме едно и също количество два пъти. Ако имаме n елемента, колко са възможностите да оцветим q от тях в червено и още няколко — в синьо? Броят на елементите, които трябва да оцветим в синьо, не е фиксиран; можем да оцветим в синьо всички останали елементи ($n - q$ на брой), може и нито един. От една страна, имаме $\dbinom{n}{q}\,.\,2^{\,n-q}$ възможности, защото по $C_n^{\,q} = \dbinom{n}{q}$ начина можем да изберем q елемента от n (за да ги оцветим в червено), а от останалите $n - q$ елемента можем да изберем произволен брой (за да ги оцветим в синьо) по $2^{\,n-q}$ начина — колкото са подмножествата на произволно множество с $n - q$ елемента. От друга страна, има $C_n^{\,k} = \dbinom{n}{k}$ начина да изберем от всичките n елемента k, които да оцветим; а от тези k елемента можем по $C_k^{\,q} = \dbinom{k}{q}$ начина да изберем q елемента за оцветяване в червено (останалите $k - q$ ще бъдат боядисани в синьо). За всяко k има $\dbinom{n}{k}\dbinom{k}{q}$ възможности. Остава да сумираме по всички допустими k, а именно: $q \leq k \leq n$.

Втори начин: с математическа индукция по n. Понеже $n \geq q$, базата на индукцията е $n = q$. При $n = q$ се получава вярното равенство $1 = 1$. За $n > q$ ще направим индуктивна стъпка от $n-1$ към n. Опростяваме сумата, докато получим стойността ѝ. Няколко пъти използваме индуктивното предположение и тъждеството, по което се строи триъгълникът на Паскал.

$$\sum_{k=q}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{q} = \binom{n}{n}\binom{n}{q} + \sum_{k=q}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{k}{q} = \binom{n}{q} + \sum_{k=q}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right]\binom{k}{q} =$$

$$= \binom{n}{q} + \sum_{k=q}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{k}{q} + \sum_{k=q}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\binom{k}{q} = \binom{n}{q} + \binom{n-1}{q} \, . \, 2^{\,n-1-q} + \sum_{k=q}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\binom{k}{q} =$$

$$= \binom{n}{q} + \binom{n-1}{q} \, . \, 2^{\,n-1-q} + \sum_{k=q}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}\left[\binom{k-1}{q} + \binom{k-1}{q-1}\right] =$$

$$= \binom{n}{q} + \binom{n-1}{q} \, . \, 2^{\,n-1-q} + \sum_{k=q-1}^{n-2}\binom{n-1}{k}\left[\binom{k}{q} + \binom{k}{q-1}\right] =$$

$$= \binom{n}{q} + \binom{n-1}{q} \, . \, 2^{\,n-1-q} + \sum_{k=q-1}^{n-2}\binom{n-1}{k}\binom{k}{q} + \sum_{k=q-1}^{n-2}\binom{n-1}{k}\binom{k}{q-1} =$$

$$= \binom{n}{q} + \binom{n-1}{q} \, . \, 2^{\,n-1-q} + \sum_{k=q}^{n-2}\binom{n-1}{k}\binom{k}{q} + \sum_{k=q-1}^{n-2}\binom{n-1}{k}\binom{k}{q-1} =$$

$$= \binom{n}{q} + \binom{n-1}{q} \, . \, 2^{\,n-1-q} - \binom{n-1}{n-1}\binom{n-1}{q} - \binom{n-1}{n-1}\binom{n-1}{q-1} +$$
$$+ \sum_{k=q}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{k}{q} + \sum_{k=q-1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{k}{q-1} =$$

$$= \binom{n}{q} + \binom{n-1}{q} \, . \, 2^{\,n-1-q} - \binom{n-1}{n-1}\binom{n-1}{q} - \binom{n-1}{n-1}\binom{n-1}{q-1} +$$
$$+ \binom{n-1}{q} \, . \, 2^{\,n-1-q} + \binom{n-1}{q-1} \, . \, 2^{\,(n-1)-(q-1)} =$$

$$= \binom{n}{q} + 2\binom{n-1}{q} \, . \, 2^{\,n-1-q} + \binom{n-1}{q-1} \, . \, 2^{\,n-q} - \binom{n-1}{q} - \binom{n-1}{q-1} =$$

$$= \binom{n}{q} + \binom{n-1}{q} \, . \, 2^{\,n-q} + \binom{n-1}{q-1} \, . \, 2^{\,n-q} - \binom{n-1}{q} - \binom{n-1}{q-1} =$$

$$= \binom{n}{q} + \left[\binom{n-1}{q} + \binom{n-1}{q-1}\right] . \, 2^{\,n-q} - \left[\binom{n-1}{q} + \binom{n-1}{q-1}\right] =$$

$$= \binom{n}{q} + \left[\binom{n-1}{q} + \binom{n-1}{q-1}\right] . \left(2^{\,n-q} - 1\right) =$$

$$= \binom{n}{q} + \binom{n}{q} . \left(2^{\,n-q} - 1\right) = \binom{n}{q} . \left(2^{\,n-q} - 1 + 1\right) = \binom{n}{q} . \, 2^{\,n-q},$$

което е точно търсената стойност.

Трети начин: Във формулата за Нютоновия бином

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{\,n-k}$$

полагаме $x = 1 + z, \quad y = 1$:

$$(2+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1+z)^k$$

и развиваме бинома в дясната страна по същата формула:

$$(2+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} z^{\,q} \right),$$

$$(2+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{q=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{q} z^{\,q}.$$

Подреждаме събираемите в двете страни по степените на z. За целта развиваме лявата страна по биномната формула, а в дясната страна сменяме реда на сумиране:

$$\sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} \cdot 2^{\,n-q} z^{\,q} = \sum_{q=0}^{n} \sum_{k=q}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{q} z^{\,q},$$

$$\sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} \cdot 2^{\,n-q} z^{\,q} = \sum_{q=0}^{n} \left(\sum_{k=q}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{q} \right) z^{\,q}.$$

Това равенство е тъждество, тоест изпълнено е за всяко реално число z. Следователно коефициентите пред еднаквите степени на z са равни:

$$\binom{n}{q} \cdot 2^{\,n-q} = \sum_{k=q}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{q},$$

което трябваше да се докаже.

Четвърти начин: Пресмятаме сумата с помощта на формулата за биномните коефициенти.

$$\sum_{k=q}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{q} = \sum_{k=q}^{n} \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} \, \frac{\cancel{k!}}{q!(k-q)!} = \sum_{k=q}^{n} \frac{n!}{q!(k-q)!(n-k)!} = \frac{n!}{q!} \sum_{k=q}^{n} \frac{1}{(k-q)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{q!(n-q)!} \sum_{k=q}^{n} \frac{(n-q)!}{(k-q)!(n-k)!} = \binom{n}{q} \sum_{k=q}^{n} \binom{n-q}{k-q} = \binom{n}{q} \sum_{k=0}^{n-q} \binom{n-q}{k} = \binom{n}{q} \cdot 2^{\,n-q}.$$

В предпоследното равенство $k-q$ е заменено с k, а последното равенство се основава на известното комбинаторно тъждество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{\,n},$$

приложено за $n-q$ вместо за n.