

ТОПКИ В КУТИИ

		n кутии			
		различими	неразличими		
m ТОПКИ	различими	без ограничения	n^m	без ограничения	$\sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\}$
		≤ 1 топка в кутия (инекции)	$n^{\underline{m}}$	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$\llbracket m \leq n \rrbracket$
		≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$
	неразличими	без ограничения	$\binom{m+n-1}{m}$	без ограничения	$\sum_{k=1}^n p(m, k)$
		≤ 1 топка в кутия (инекции)	$\binom{n}{m}$	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$\llbracket m \leq n \rrbracket$
		≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\binom{m-1}{m-n}$	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$p(m, n)$

Обяснение на нотациите:

- $n^{\underline{m}}$ е кратък запис за произведението $\prod_{k=0}^{m-1} (n-k)$. С други думи,

$$n^{\underline{m}} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-m+1)$$

Очевидно е, че $n^{\underline{m}} = 0$ при $m > n$. Освен това, има смисъл да се дефинира $n^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$, тъй като единицата е неутрален елемент на операцията умножение. $n^{\underline{m}}$ се чете *n на падаща степен m* (*n to the m falling* на английски).

- $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ —чете се “*m*-подмножество-*n*”—е *число на Стирлинг от втори род*. $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ е броят на начините за разбиване на *m*-елементно множество на *n* подмножества. В сила е рекурентното уравнение

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\} = n \left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} m-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\} \text{ за } m > 0 \text{ и } m \geq n$$

с гранични условия $\left\{ \begin{matrix} k \\ k \end{matrix} \right\} = 1$ за $k \geq 0$ и $\left\{ \begin{matrix} k \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$ за $k > 0$. Лесно се вижда, че числата на Стирлинг от втори род са свързани с броя на сюрекции от *m* елементен домейн в *n* елементен кодомейн така:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = n! \left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}.$$

- $p(m, n)$ е броят на целочислените разбивания на числото *m* на *n* части (на английски, *number of integer partitions*). *Целочислено разбиване на m на n части* е всяка сума от *n* положителни естествени числа (където $1 \leq n \leq m$), равна на *m*, където редът на

сумиране няма значение. Тогава $\sum_{k=1}^n p(m, k)$ е броят на целочислените разбивания на числото m . Примерно, числото 4 има пет целочислени разбивания:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$4 = 1 + 1 + 2$$

$$4 = 2 + 2$$

$$4 = 1 + 3$$

$$4 = 4$$

Очевидно, $p(4, 2) = 2$.

В сила е рекурентното уравнение

$$p(n, k) = p(n - k, k) + p(n - 1, k - 1)$$

с гранични условия $p(k, k) = 1$ за $k \geq 0$ и $p(k, 0) = 0$ за $k \geq 1$ и $p(t, k) = 0$ за $t < k$.

- $\llbracket q \rrbracket$, където q някакъв израз с булева интерпретация, се дефинира така:

$$\llbracket q \rrbracket = \begin{cases} 1, & \text{ако } q \text{ е истина} \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Примерно, $\llbracket m \leq n \rrbracket$ е равно на 1, когато $m \leq n$, а във всички останали случаи е 0. Тази нотация се нарича *нотация на Iverson*.