Семестриално контролно по "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, СУ, ФМИ, летен семестър на 2016 / 2017 уч. г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Общо
получени точки							
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*120*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Оценката се изчислява на база 100 точки.*

Задача 1. Даден е куб Q с размери $3 \times 3 \times 3$ см. Докажете, че както и да изберем тридесет точки от вътрешността на Q, поне две от тях ще бъдат на разстояние, ненадвишаващо $\sqrt{3}$ см.

Задача 2. По колко начина числата $1, 2, \ldots, 2017$ могат да се разположат в редица така, че:

а) числата 1, 2 и 3 да са едно до друго? **(10 точки)**

б) поне едно от числата 1, 2 и 3 да бъде на четна позиция? **(10 точки)**

Забележка: Двете подусловия са отделни подзадачи, тоест всяко изискване е самò за себе си.

Задача 3. Докажете, че за произволни три множества A, B и C е в сила равенството

$$C \setminus (B \setminus A) = (C \cap A) \cup (C \setminus B).$$

Задача 4. Дадени са два куба. Единият е с дължина на страната 4 см, а другият — с 44 см. Постройте биекция между точките от стените на двата куба.

Задача 5. В множеството на всички крайни множества от цели числа дефинираме релация ρ:

$$X \, \rho \, Y \iff \text{разликата} \sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y \quad \text{е четно число.}$$

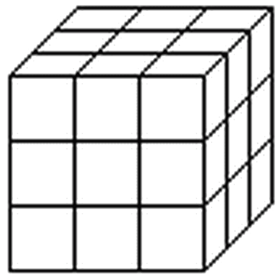
а) Докажете, че ρ е релация на еквивалентност. **(10 точки)**

б) Опишете възможно най-ясно класовете на еквивалентност и намерете броя им. **(10 точки)**

Задача 6. Докажете, че за всяко цяло число $n \geq 2$ е в сила неравенството

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \cdot$$

РЕШЕНИЯ



Задача 1. Разрязваме дадения куб Q на 27 кубчета с ръб 1 см. Двадесет и седемте единични кубчета смятаме за "чекмеджета", а тридесетте точки във вътрешността на Q — за "предмети". Прилагаме принципа на Дирихле: понеже $30 > 27$, то следва, че някое единично кубче съдържа поне две от тридесетте точки. Разстоянието между тези две точки не надхвърля диаметъра на единичното кубче, тоест $\sqrt{3}$ см.

Задача 2.

а) Разглеждаме числата 1, 2 и 3 като един пакет. Вътре в пакета числата 1, 2 и 3 образуват пермутации на три елемента без повторение, защото всяко число участва точно веднъж. Броят на тези "вътрешни" пермутации е $P_3 = 3! = 6$. Пакетът и другите 2014 числа образуват пермутации без повторение на 2015 елемента. Тези "външни" пермутации са $P_{2015} = 2015!$ на брой. Всяка "вътрешна" пермутация се съчетава с всяка "външна" пермутация, следователно прилагаме правилото за умножение: има общо $6\ .\ 2015!$ редици от този вид.

б) Всички редици са пермутации на 2017 елемента, затова са $P_{2017} = 2017!$ на брой. От тях трябва да извадим редиците, в които и трите числа 1, 2 и 3 са на нечетни позиции. За целта броим начините, по които можем да изберем три нечетни позиции от всичките 1009, а именно: № 1, № 3, № 5, ... , № 2015, № 2017. Трите нечетни позиции избираме в определен ред: на първата поставяме числото 1, на втората — числото 2, на третата — числото 3. Затова работим с вариации, и то без повторение, защото не можем да изберем една и съща позиция два пъти: числата 1, 2 и 3 заемат различни позиции. Има $V_{1009}^{3} = 1009\ .\ 1008\ .\ 1007$ начина да изберем трите нечетни позиции. Останалите 2014 числа могат да се разместват помежду си по $P_{2014} = 2014!$ начина. Следователно редиците, в които и трите числа 1, 2 и 3 стоят на нечетни позиции, са $2014!\ .\ 1009\ .\ 1008\ .\ 1007$ на брой.

В останалите $2017! - 2014!\ .\ 1009\ .\ 1008\ .\ 1007$ редици поне едно от числата 1, 2 и 3 е на четна позиция.

Задача 3 се решава по табличния метод.

A	B	C	$B \setminus A$	$C \setminus (B \setminus A)$	$C \cap A$	$C \setminus B$	$(C \cap A) \cup (C \setminus B)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1

Двете колонки със сив фон съответстват на лявата и дясната страна на равенството. Те съвпадат, което означава, че равенството е изпълнено винаги, тоест то е тъждество.

Задача 4.

Първи начин: През центровете на всеки от кубовете построяваме всевъзможните лъчи с начала тези центрове. Всеки два успоредни и еднопосочни лъча (по един от всеки център) пресичат някоя стена на съответния куб. Биекцията се получава, като съпоставим двете пресечни точки (по една за всеки куб).

Втори начин: Слагаме малкия куб в големия така, че центровете им да съвпаднат, а ръбовете им да са успоредни. Централното проектиране на едната повърхнина върху другата е биекция.

Трети начин: С всеки от двата куба свързваме по една правоъгълна координатна система с начало — някой от върховете на куба, и оси — трите ръба през този връх. На всяка точка (x, y, z) от повърхнината на малкия куб съпоставяме точката $(11x, 11y, 11z)$ от повърхнината на големия куб. (Всяка тройка координати е отчетена спрямо системата на съответния куб.) Полученото съответствие е биекция.

Както и да се решава задачата, трябва да се докаже, че построеното изображение е биекция. Ако задачата се решава по третия начин, биективността следва от това, че всяка точка (x, y, z) от повърхнината на големия куб има единствен първообраз от повърхнината на малкия куб, а именно точката $\left(\dfrac{x}{11}, \dfrac{y}{11}, \dfrac{z}{11}\right)$. Ако задачата се решава по някой от първите два начина, биективността следва от известни геометрични факти:

— че всяка точка е начало на единствен лъч, еднопосочен на даден лъч;

— че всеки лъч с начало точка от вътрешността на куб пресича повърхнината на куба в една и само една точка.

Задача 6 се решава по метода на математическата индукция.

База: При $n = 2$ неравенството приема вида $1 + \dfrac{1}{4} < 2 - \dfrac{1}{2}$, тоест $1,25 < 1,50$, което е вярно.

Индуктивна стъпка: Нека $n > 2$ и

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} \; < \; 2 - \frac{1}{n-1} \cdot$$

Ще докажем, че

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \; < \; 2 - \frac{1}{n} \cdot$$

Действително,

$$\underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2}} + \frac{1}{n^2} \; < \; 2 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}$$

съгласно с индуктивното предположение. Остава да докажем, че

$$2 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} \; < \; 2 - \frac{1}{n} \cdot$$

За целта преобразуваме това неравенство в поредица от еквивалентни неравенства:

$$\cancel{2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} < \cancel{2} - \frac{1}{n} \iff \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} \iff \frac{n+1}{n^2} < \frac{1}{n-1} \iff (n+1)(n-1) < n^2$$

$\iff n^2 - 1 < n^2 \iff -1 < 0,$ което е вярно.

Задача 5.

а) За да докажем, че ρ е релация на еквивалентност, трябва да проверим, че тя е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

— Рефлексивност: $X \rho X$ за $\forall X,$ защото $\displaystyle\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{x \in X} x = \sum_{x \in X} \left(x^2 - x\right)$ е четно число като сбор от четни числа. Събираемите $x^2 - x = x(x-1)$ са четни числа, понеже са произведения от две последователни цели числа (а от тях поне едно е четно).

— Симетричност: Ако $X \rho Y$, то разликата $\displaystyle\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y$ е четно число. Току-що доказахме, че $\displaystyle\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{x \in X} x$ и $\displaystyle\sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{y \in Y} y$ са четни числа. Следователно алгебричният сбор

$$\left(\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{x \in X} x\right) + \left(\sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{y \in Y} y\right) - \left(\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y\right) = \sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{x \in X} x$$

също е четно число, откъдето следва, че $Y \rho X$.

— Транзитивност: Ако $X \rho Y$ и $Y \rho Z$, то двете разлики $\displaystyle\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y$ и $\displaystyle\sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{z \in Z} z$ са четни числа. Следователно алгебричният сбор

$$\left(\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y\right) + \left(\sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{z \in Z} z\right) - \left(\sum_{y \in Y} y^2 - \sum_{y \in Y} y\right) = \sum_{x \in X} x^2 - \sum_{z \in Z} z$$

също е четно число, откъдето следва, че $X \rho Z$.

С това доказахме, че ρ е релация на еквивалентност.

б) Тъй като изваждането и прибавянето на четно число не променят четността на умалителя, съответно на другото събираемо, то

$$X \rho Y \iff \sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y \text{ е четно число}$$

$$\iff \left(\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{y \in Y} y\right) - \left(\sum_{x \in X} x^2 - \sum_{x \in x} x\right) = \left(\sum_{x \in X} x - \sum_{y \in Y} y\right) \text{ е четно число}$$

$$\iff \text{сборовете } \sum_{x \in X} x \text{ и } \sum_{y \in Y} y \text{ са с еднаква четност.}$$

Доказахме следната еквивалентност:

$$X \rho Y \iff \text{числата } \sum_{x \in X} x \text{ и } \sum_{y \in Y} y \text{ са с еднаква четност.}$$

Следователно релацията ρ има два класа на еквивалентност:

$$\left\{X : \text{ сборът } \sum_{x \in X} x \text{ е четно число}\right\} \text{ и } \left\{X : \text{ сборът } \sum_{x \in X} x \text{ е нечетно число}\right\}.$$