

Системи за изразяване на доказателства

Трифон Трифонов

λ -смятане и теория на доказателствата, 2016/17 г.

16 май 2017 г.

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Аксиоми на H_m

$$\textcircled{1} (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$$

$$\textcircled{2} A \rightarrow B \rightarrow A$$

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Аксиоми на H_m

- ❶ $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$
- ❷ $A \rightarrow B \rightarrow A$
- ❸ $A \wedge B \rightarrow A, \quad A \wedge B \rightarrow B$
- ❹ $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Аксиоми на H_m

- ❶ $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$
- ❷ $A \rightarrow B \rightarrow A$
- ❸ $A \wedge B \rightarrow A, \quad A \wedge B \rightarrow B$
- ❹ $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$
- ❺ $A \rightarrow A \vee B, \quad B \rightarrow A \vee B$
- ❻ $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Аксиоми на H_m

- ❶ $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$
- ❷ $A \rightarrow B \rightarrow A$
- ❸ $A \wedge B \rightarrow A, \quad A \wedge B \rightarrow B$
- ❹ $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$
- ❺ $A \rightarrow A \vee B, \quad B \rightarrow A \vee B$
- ❻ $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$
- ❼ $\forall_x A \rightarrow A[x \mapsto t]$
- ❽ $\forall_x (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall_x A), \text{ ако } x \notin FV(B)$

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Аксиоми на H_m

- ❶ $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$
- ❷ $A \rightarrow B \rightarrow A$
- ❸ $A \wedge B \rightarrow A, \quad A \wedge B \rightarrow B$
- ❹ $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$
- ❺ $A \rightarrow A \vee B, \quad B \rightarrow A \vee B$
- ❻ $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$
- ❼ $\forall_x A \rightarrow A[x \mapsto t]$
- ❽ $\forall_x (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall_x A), \text{ ако } x \notin FV(B)$
- ❾ $A[x \mapsto t] \rightarrow \exists_x A$
- ❿ $\forall_x (A \rightarrow B) \rightarrow (\exists_x A \rightarrow B), \text{ ако } x \notin FV(B)$

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Аксиоми на H_m

- ❶ $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$
- ❷ $A \rightarrow B \rightarrow A$
- ❸ $A \wedge B \rightarrow A, \quad A \wedge B \rightarrow B$
- ❹ $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$
- ❺ $A \rightarrow A \vee B, \quad B \rightarrow A \vee B$
- ❻ $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$
- ❼ $\forall_x A \rightarrow A[x \mapsto t]$
- ❽ $\forall_x (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall_x A), \text{ ако } x \notin FV(B)$
- ❾ $A[x \mapsto t] \rightarrow \exists_x A$
- ❿ $\forall_x (A \rightarrow B) \rightarrow (\exists_x A \rightarrow B), \text{ ако } x \notin FV(B)$

Допълнителна аксиома за H_i

- ⓫ $\perp \rightarrow A \text{ (ex falso quodlibet)}$

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Аксиоми на H_m

- ❶ $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$
- ❷ $A \rightarrow B \rightarrow A$
- ❸ $A \wedge B \rightarrow A, \quad A \wedge B \rightarrow B$
- ❹ $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$
- ❺ $A \rightarrow A \vee B, \quad B \rightarrow A \vee B$
- ❻ $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$
- ❼ $\forall_x A \rightarrow A[x \mapsto t]$
- ❽ $\forall_x (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall_x A), \text{ ако } x \notin FV(B)$
- ❾ $A[x \mapsto t] \rightarrow \exists_x A$
- ❿ $\forall_x (A \rightarrow B) \rightarrow (\exists_x A \rightarrow B), \text{ ако } x \notin FV(B)$

Допълнителна аксиома за H_i

- ❾ $\perp \rightarrow A \text{ (ex falso quodlibet)}$

Допълнителна аксиома за H_c

- ❾ $\neg\neg A \rightarrow A \text{ (стабилност)}$

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в $H[mic]$, наричаме списък от формули $A_1, \dots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в $H[mic]$, наричаме списък от формули $A_1, \dots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

$$(As) \quad A_i \in \Gamma$$

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в $H[mic]$, наричаме списък от формули $A_1, \dots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

(As) $A_i \in \Gamma$

(Ax) A_i е инстанция на някоя от аксиомите на $H[mic]$

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в $H[mic]$, наричаме списък от формули $A_1, \dots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

(As) $A_i \in \Gamma$

(Ax) A_i е инстанция на някоя от аксиомите на $H[mic]$

(MP) $A_k \equiv A_j \rightarrow A_i$ за някои $j, k < i$

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в $H[mic]$, наричаме списък от формули $A_1, \dots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

(As) $A_i \in \Gamma$

(Ax) A_i е инстанция на някоя от аксиомите на $H[mic]$

(MP) $A_k \equiv A_j \rightarrow A_i$ за някои $j, k < i$

(Gen) $A_i \equiv \forall_x A_j$ за някое $j < i$, ако $x \notin FV(\Gamma)$.

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в $H[mic]$, наричаме списък от формули $A_1, \dots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

(As) $A_i \in \Gamma$

(Ax) A_i е инстанция на някоя от аксиомите на $H[mic]$

(MP) $A_k \equiv A_j \rightarrow A_i$ за някои $j, k < i$

(Gen) $A_i \equiv \forall_x A_j$ за някое $j < i$, ако $x \notin FV(\Gamma)$.

Теорема (за дедукцията)

$\Gamma, A \vdash B$ тогава и само тогава когато $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

Секвенциално смятане: G1c

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме секвент.

Секвенциално смятане: G1c

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме секвент.
“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то със сигурност
някоя от формулите в Δ също е вярна”.

Секвенциално смятане: G1c

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме секвент.
“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то със сигурност някоя от формулите в Δ също е вярна”.

Аксиоми (G1c)

$$\text{Ax} \frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot \Rightarrow}$$

Секвенциално смятане: G1c

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме секвент.
“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то със сигурност
някоя от формулите в Δ също е вярна”.

Аксиоми (G1c)

$$\text{Ax} \frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot \Rightarrow}$$

Структурни правила (G1c)

$$\text{LW} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{RW} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Секвенциално смятане: G1c

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме секвент.
“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то със сигурност
някоя от формулите в Δ също е вярна”.

Аксиоми (G1c)

$$\text{Ax} \frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot \Rightarrow}$$

Структурни правила (G1c)

$$\text{LW} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{RW} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

$$\text{LC} \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{RC} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad (i = 0, 1)$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$L\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$L\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$L\forall \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$R\forall \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x A} \quad x \notin FV(\Gamma\Delta)$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$L\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$L\forall \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$L\exists \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma\Delta)$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$R\forall \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x A} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma\Delta)$$

$$R\exists \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x A}$$

Секвенциално смятане: $G1m$, $G1i$

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме конструктивни секвенти.

Секвенциално смятане: $G1m$, $G1i$

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме конструктивни секвенти.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна”.

Секвенциално смятане: $G1m$, $G1i$

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме конструктивни секвенти.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна”.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, получаваме противоречие”.

Секвенциално смятане: $G1m$, $G1i$

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме конструктивни секвенти.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна”.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, получаваме противоречие”.

Аксиоми ($G1[m_i]$)

$$\text{Ax} \frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot \Rightarrow} \text{ (само за } G1i\text{)}$$

Секвенциално смятане: $G1m$, $G1i$

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме конструктивни секвенти.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна”.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, получаваме противоречие”.

Аксиоми ($G1[mi]$)

$$Ax \frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$L\bot \frac{}{\bot \Rightarrow} \text{ (само за } G1i\text{)}$$

Структурни правила ($G1[mi]$)

$$LW \frac{\Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$RW \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}$$

Секвенциално смятане: $G1m$, $G1i$

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме конструктивни секвенти.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна”.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, получаваме противоречие”.

Аксиоми ($G1[mi]$)

$$Ax \frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$L\bot \frac{}{\bot \Rightarrow} \text{ (само за } G1i)$$

Структурни правила ($G1[mi]$)

$$LW \frac{\Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$RW \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}$$

$$LC \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

Секвенциално смятане: $G1m$, $G1i$

Логически правила ($G1[mi]$)

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]} \quad (i = 0, 1)$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

Секвенциално смятане: $G1m$, $G1i$

Логически правила ($G1[mi]$)

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C] \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Логически правила (G1[mi])

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C] \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$L\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Логически правила (G1[mi])

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C] \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$L\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$L\forall \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow [C]}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

$$R\forall \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall_x A} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma)$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Логически правила (G1[mi])

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C] \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$L\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$L\forall \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow [C]}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$L\exists \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C]}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow [C]} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma, C)$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

$$R\forall \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall_x A} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma)$$

$$R\exists \frac{\Gamma \Rightarrow A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \exists_x A}$$

Секвенциално смятане: $G2m$, $G2i$, $G2c$

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Секвенциално смятане: G2m, G2i, G2c

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Аксиоми (G2c)

$$\text{Ax} \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Секвенциално смятане: G2m, G2i, G2c

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Аксиоми (G2c)

$$\text{Ax} \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Структурни правила (G2c)

$$\text{LC} \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{RC} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Секвенциално смятане: G2m, G2i, G2c

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Аксиоми (G2c)

$$Ax \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta}$$

$$L\perp \frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Структурни правила (G2c)

$$LC \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$RC \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Аксиоми (G2[mi])

$$Ax \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A}$$

$$L\perp \frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow [C]} \text{ (само за G2i)}$$

Секвенциално смятане: G2m, G2i, G2c

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Аксиоми (G2c)

$$Ax \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta}$$

$$L\perp \frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Структурни правила (G2c)

$$LC \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$RC \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Аксиоми (G2[mi])

$$Ax \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A}$$

$$L\perp \frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow [C]} \text{ (само за G2i)}$$

Структурни правила (G2[mi])

$$LC \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax} \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{x}}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax} \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{x}}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$\text{L}\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax} \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{x}}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$\text{L}\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax} \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{x}}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$\text{L}\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$\text{L}\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax} \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{x}}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$\text{L}\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$\text{L}\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$\text{L}\forall \frac{\forall_x A, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\forall \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x A} x \notin \text{FV}(\Gamma\Delta)$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$Ax \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{x}}$$

$$L\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$L\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$L\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$L\forall \frac{\forall_x A, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$R\forall \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x A} x \notin FV(\Gamma\Delta)$$

$$L\exists \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} x \notin FV(\Gamma\Delta)$$

$$R\exists \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x \mapsto t], \exists_x A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x A}$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$\text{Ax} \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow p\vec{x}}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C} \text{ (само за G3i)}$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$\text{Ax} \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow p\vec{x}}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C} \text{ (само за G3i)}$$

Логически правила (G3[mi])

$$\text{L}\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\text{R}\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$Ax \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow p\vec{x}}$$

$$L\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C} \text{ (само за G3i)}$$

Логически правила (G3[mi])

$$L\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[m])

$$\text{Ax} \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow p\vec{x}}$$

$$\text{L}\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C} \text{ (само за G3i)}$$

Логически правила (G3[m])

$$\text{L}\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\text{R}\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\text{R}\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$\text{L}\rightarrow \frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\text{R}\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$Ax \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow p\vec{x}}$$

$$L\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C} \text{ (само за G3i)}$$

Логически правила (G3[mi])

$$L\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\rightarrow \frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

$$L\forall \frac{\forall x A, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\forall \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall x A} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[m])

$$Ax \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow p\vec{x}}$$

$$L\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C} \text{ (само за G3i)}$$

Логически правила (G3[m])

$$L\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\rightarrow \frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

$$L\forall \frac{\forall x A, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow C}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$R\forall \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall x A} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

$$L\exists \frac{A, \Gamma \Rightarrow C}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow C} \quad x \notin FV(\Gamma, C)$$

$$R\exists \frac{\Gamma \Rightarrow A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}$$

Секвенциално смятане: Cut

$$(\text{Cut}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \quad C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma \cup \Gamma' \Rightarrow \Delta \cup \Delta'}$$

Секвенциално смятане: Cut

$$(\text{Cut}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \quad C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma \cup \Gamma' \Rightarrow \Delta \cup \Delta'}$$

Теорема

Ако $G[123][mic] + Cut \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, то $G[123][mic] \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Системи за естествен извод: Nm , Ni , Nc

Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети.

Системи за естествен извод: Nm , Ni , Nc

Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети. Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула.

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети.
Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула.

$$\rightarrow^+ \frac{\begin{array}{c} [A^u] \\ | M \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} u$$

$$\rightarrow^- \frac{\begin{array}{c} | M \\ A \rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} | N \\ A \end{array}}{B}$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети. Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула.

$$\rightarrow^+ \frac{\begin{array}{c} [A^u] \\ | M \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} u$$

$$\rightarrow^- \frac{\begin{array}{c} | M \quad | N \\ A \rightarrow B \quad A \end{array}}{B}$$

$$\wedge^+ \frac{\begin{array}{c} | M \quad | N \\ A \quad B \end{array}}{A \wedge B}$$

$$\wedge^- \frac{\begin{array}{c} | M \\ A_0 \wedge A_1 \end{array}}{A_i} (i = 0, 1)$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети. Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула.

$$\rightarrow^+ \frac{\begin{array}{c} [A^u] \\ | M \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} u$$

$$\rightarrow^- \frac{\begin{array}{c} | M \quad | N \\ A \rightarrow B \quad A \end{array}}{B}$$

$$\wedge^+ \frac{\begin{array}{c} | M \quad | N \\ A \quad B \end{array}}{A \wedge B}$$

$$\wedge^- \frac{\begin{array}{c} | M \\ A_0 \wedge A_1 \end{array}}{A_i} (i = 0, 1)$$

$$\vee^+ \frac{\begin{array}{c} | M \\ A_i \end{array}}{A_0 \vee A_1} (i = 0, 1)$$

$$\vee^- \frac{\begin{array}{c} [A^u] \quad [B^v] \\ | \mathcal{P} \quad | M \quad | N \\ A \vee B \quad C \quad C \end{array}}{C} u, v$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

$$\forall^+ \frac{| M \quad A}{\forall_x A} x \notin FV(M)$$

$$\forall^- \frac{| M \quad \forall_x A \quad t}{A[x \mapsto t]}$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

$$\forall^+ \frac{| M \quad A}{\forall_x A} \quad x \notin FV(M)$$

$$\forall^- \frac{| M \quad \forall_x A \quad t}{A[x \mapsto t]}$$

$$\exists^+ \frac{| M \quad t \quad A[x \mapsto t]}{\exists_x A}$$

$$\exists^- \frac{| M \quad \exists_x A \quad \begin{array}{c} [A^u] \\ | N \\ C \end{array}}{C} \quad u \quad x \notin FV(N \setminus \{A^u\}) \cup FV(C)$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

$$\forall^+ \frac{| M \quad A}{\forall_x A} \quad x \notin FV(M)$$

$$\forall^- \frac{| M \quad \forall_x A \quad t}{A[x \mapsto t]}$$

$$\exists^+ \frac{| M \quad t \quad A[x \mapsto t]}{\exists_x A}$$

$$\exists^- \frac{| M \quad [A^u] \quad | N \quad C}{\exists_x A \quad C} u \quad x \notin FV(N \setminus \{A^u\}) \cup FV(C)$$

$$\text{Eq} \frac{| M}{\perp A} \quad (\text{само за Ni})$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

$$\forall^+ \frac{| M \quad A}{\forall_x A} \quad x \notin FV(M)$$

$$\forall^- \frac{| M \quad \forall_x A \quad t}{A[x \mapsto t]}$$

$$\exists^+ \frac{| M \quad t \quad A[x \mapsto t]}{\exists_x A}$$

$$\exists^- \frac{\begin{array}{c} [A^u] \\ | M \quad | N \\ \exists_x A \quad C \end{array}}{C} u \quad x \notin FV(N \setminus \{A^u\}) \cup FV(C)$$

$$\text{Efq} \frac{| M}{\perp A} \quad (\text{само за Ni})$$

$$\text{Stab} \frac{\begin{array}{c} [\neg A^u] \\ | M \end{array}}{\perp A} u, \quad (\text{само за Nc})$$